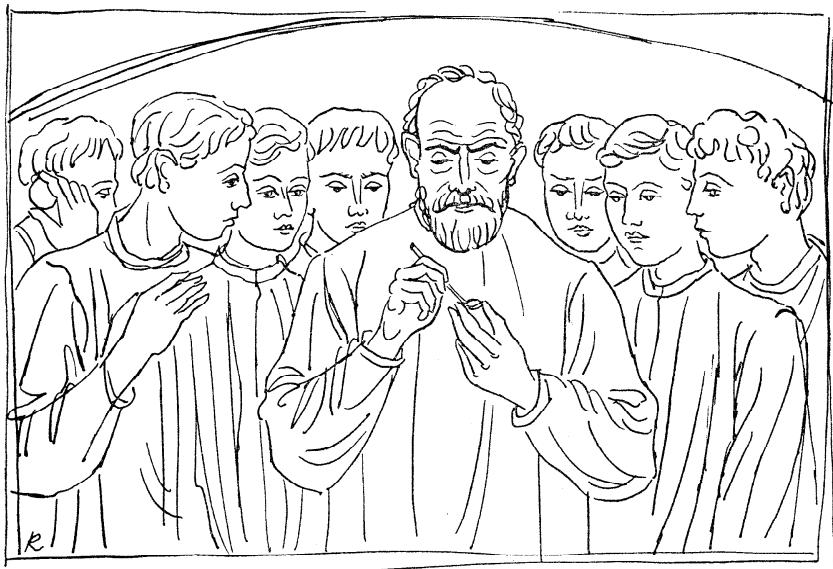


**THÉORIE GÉNÉRALE
DE
L'HORLOGERIE**



MONUMENT ÉLEVÉ AU LOCLE A LA MÉMOIRE DE

JULES GROSSMANN

1829-1907

PREMIER DIRECTEUR DE L'ÉCOLE D'HORLOGERIE DU LOCLE

JUSTIFICATION DU TIRAGE

CET OUVRAGE A ÉTÉ TIRÉ A 2200 EXEMPLAIRES, DONT 200 HORS-COMMERCE,
NUMÉROTÉS DE I A CC, ET 2000, NUMÉROTÉS DE 1 A 2000, DESTINÉS AUX
ÉLÈVES DES ÉCOLES SUISSES D'HORLOGERIE AINSI QU'AUX MEMBRES DE LA
SOCIÉTÉ SUISSE DE CHRONOMÉTRIE ET DES SECTIONS DE LA CHAMBRE SUISSE
DE L'HORLOGERIE

LE SECOND TIRAGE DE 600 EXEMPLAIRES EST NUMÉROTÉ DE 2001 A 2600

PREMIÈRE ÉDITION - SECOND TIRAGE

THÉORIE GÉNÉRALE DE L'HORLOGERIE

par
LÉOPOLD DEFOSSEZ

Préface d'A. Jaquerod
Directeur du Laboratoire suisse
de recherches horlogères
Ouvrage publié sous les auspices
des Ecoles suisses
d'horlogerie

TOME II

Edité par la
CHAMBRE SUISSE DE L'HORLOGERIE
LA CHAUX-DE-FONDS

Copyright 1952 by La Chambre suisse de l'horlogerie. La Chaux-de-Fonds
Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction
réservés pour tous pays.

CHAPITRE VII

LE MOUVEMENT OSCILLATOIRE DU BALANCIER-SPIRAL

Le mouvement oscillatoire et la mesure du temps. — Nous mesurons un intervalle de temps en le comparant à la durée d'un phénomène régulier, généralement d'un mouvement. Le mouvement continu de la Terre sur l'écliptique permet de définir l'année, tandis que le mouvement continu de rotation de la Terre autour de son axe définit le jour. Ces mouvements astronomiques se prêtent aux définitions de l'année et du jour parce que ce sont des *mouvements périodiques*, c'est-à-dire des mouvements dont les caractéristiques (position du mobile, sens et vitesse du déplacement) se reproduisent à intervalles égaux qui peuvent être pris comme unité de temps.

Pour subdiviser le jour, on ne peut pas utiliser directement les mouvements des astres ; on s'est cependant servi jadis de mouvements continus et périodiques tels que le mouvement de l'ombre d'un objet sur le sol ou sur un mur (gnomon, cadran solaire) ou l'écoulement de l'eau et du sable (clepsydre et sablier). On admettait que la vitesse de déplacement de l'ombre ou celle de l'écoulement de l'eau et du sable est constante ou que sa variation est connue.

On pourrait aussi se servir d'une horloge à poste fixe dont une roue ferait un tour par minute et porterait l'aiguille des secondes ; cette roue entraînerait, au moyen d'engrenages, d'autres roues portant les aiguilles des minutes et des heures. Ces roues maintenues en mouvement par un moteur synchrone, par exemple, auraient un mouvement continu et uniforme. Au point de vue mécanique, la solution serait simple. Si elle n'est que peu appliquée, c'est que la régularité d'une telle horloge dépend de la constance de la fréquence du courant alternatif du réseau d'alimentation du moteur. Or, cette constance n'est pas toujours réalisée et les fluctuations de la fréquence sont imprévisibles. Dans les horloges à quartz, on utilise les vibrations d'un cristal de quartz pour régulariser la fréquence du courant d'alimentation d'un moteur synchrone.

On emploie le moteur synchrone pour obtenir des éclairs lumineux équidistants sur la bande sensible d'un chronographe ; mais on régularise souvent la vitesse du moteur au moyen d'une lame vibrante. Cette utilisation du moteur synchrone est légitime, quand il s'agit de la mesure de petites durées pendant lesquelles les irrégularités de la fréquence du réseau et l'influence des changements de température sur la période de la lame vibrante restent négligeables.

De tels moyens ne peuvent être appliqués à un appareil portatif comme la montre.

C'est le mouvement oscillatoire périodique qui a permis de construire les instruments horaires les plus précis. Dans ces instruments, on a recours aux oscillations d'un pendule, d'un assemblage formé d'un balancier et d'un spiral que nous appellerons balancier-spiral, d'une lame vibrante (diapason), d'un cristal de quartz ou d'une molécule gazeuse.

Le mouvement oscillatoire est, du reste, très fréquent dans la nature ; c'est le plus souvent un mouvement peu visible tel que celui des molécules d'un corps, celui d'une lame ou d'une corde, les vibrations d'une masse gazeuse (dans la transmission du son par exemple). C'est aussi au moyen du mouvement oscillatoire des particules de l'éther que l'on explique les phénomènes lumineux dans la théorie ondulatoire. Enfin, ce mouvement joue un rôle important dans le courant électrique alternatif.

Définition du mouvement oscillatoire périodique. — Considérons un point P (fig. 198) qui se déplace le long de la droite xx en parcourant le trajet AB , puis revient de B en A pour retourner ensuite vers B , et ainsi

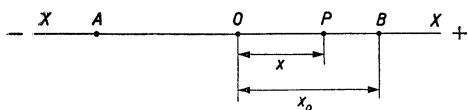


Fig. 198

de suite. Le mouvement de P est *oscillatoire*, puisque P décrit des oscillations de part et d'autre d'un point O situé entre A et B . On appelle *oscillation* le chemin parcouru entre deux états consécutifs et identiques du point P , c'est-à-dire entre deux instants où P a la même position, le même sens de déplacement et la même vitesse. La durée T d'une oscillation est la *période*, et le mouvement de P est dit *périodique* si T est constant. La *fréquence* n est le nombre d'oscillations exécutées dans l'unité de temps, qui est la seconde de temps moyen ; elle est liée à la période par la formule :

$$n = \frac{1}{T}. \quad (110)$$

La durée du trajet AB n'est que d'une *demi-période* ; la moitié d'une oscillation est une *alternance*.

Les considérations et les définitions qui précèdent sont également valables si la trajectoire de P est une portion de courbe, par exemple un arc de circonférence, comme dans le pendule circulaire, ou un arc de cycloïde, comme dans le pendule cycloïdal de Huygens.

La vitesse de P est variable puisqu'elle est nulle aux points de rebroussement A et B et différente de zéro en tout autre point de la trajectoire. Elle passe de zéro en A à un maximum en un point O situé entre A et B ; elle diminue du point O au point B où elle est de nouveau nulle; les mêmes variations se produisent pendant le trajet BA .

Dans le mouvement oscillatoire périodique *simple*, appelé aussi *harmonique* ou *sinusoïdal*, qui est, pour nous, le plus important, le point O est à égale distance des points extrêmes A et B . Le point O est le *point d'équilibre* ou *point mort*; il correspond à la *position d'équilibre* ou *position de repos* de l'oscillateur.

On connaît la position du point mobile P en un instant quelconque t quand on connaît son *élongation* à cet instant, c'est-à-dire la distance OP comptée à partir du point d'équilibre. Dans le mouvement rectiligne, l'élongation est comptée en unités de longueur, par exemple en cm; dans le mouvement circulaire, elle est exprimée en unités d'angle, en radians. Elle est affectée du signe $+$ ou du signe $-$ suivant que P se trouve d'un côté ou de l'autre du point mort.

L'élongation, en valeur absolue, est maximum aux points extrêmes A et B : elle s'appelle alors l'*amplitude*; elle est représentée dans la figure 198 par le segment OA ou par le segment OB , sans égard au signe.

Le segment AB représente le double de l'amplitude; c'est le *cheminement*.

Le mouvement de P est provoqué par une force qui ne saurait être constante, car une telle force engendrerait un mouvement continu et uniformément accéléré. La force agissante est donc variable et le mouvement qu'elle engendre dépend de la manière dont elle varie.

Le mouvement oscillatoire rectiligne et isochrone. — Supposons que le corps P de masse m qui oscille entre A et B (fig. 198) soit constamment sous l'influence d'une force f dirigée vers O et proportionnelle à l'élongation $OP = x$. Appelons x_0 l'amplitude OA .

D'après l'équation fondamentale de la dynamique, nous avons à tout instant :

$$f = m\gamma,$$

γ désignant l'accélération imprimée au corps de masse m par la force f . Dans le système C. G. S., γ s'exprimerait en cm/s^2 , m en grammes et f en dynes.

Le mouvement étant rectiligne, le vecteur accélération est dirigé suivant la trajectoire ; son intensité est par conséquent la dérivée seconde de l'espace parcouru par rapport au temps :

$$\gamma = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Nous avons admis que la force est proportionnelle à l'élongation, donc :

$$f = ax,$$

a désignant une constante.

Dans le mouvement oscillatoire, la force f varie en sens inverse de la vitesse ; quand la vitesse augmente, la force diminue et inversement.

Envisageons le mouvement de A à B . Pendant le parcours AO , la vitesse du mobile augmente, son accélération est positive ; d'après l'équation $f = m\gamma$, la force doit être positive. Mais l'abscisse x étant négative, nous devons en réalité écrire :

$$f = -ax.$$

Pendant le trajet OB , la vitesse du mobile diminue, son accélération est négative. L'abscisse x étant maintenant positive, pour que la force soit négative, il faut également poser :

$$f = -ax.$$

La relation entre la force et l'accélération prend la forme :

$$-ax = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

ou

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + ax = 0. \quad (111)$$

En multipliant cette équation par $2 \frac{dx}{dt}$, puis en intégrant, nous obtenons :

$$m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = -ax^2 + C.$$

Pour déterminer la constante d'intégration C , appliquons l'équation que nous venons de trouver au cas où le corps se trouve en A . En ce moment la vitesse est nulle et, par conséquent, pour $x = x_0$:

$$\frac{dx}{dt} = 0.$$

L'équation devient :

$$0 = -ax_0^2 + C$$

ou

$$C = ax_0^2,$$

de sorte que nous avons :

$$m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = a(x_0^2 - x^2)$$

et

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{a}{m}} \sqrt{x_0^2 - x^2}. \quad (112)$$

Séparons les variables, puis intégrons ; nous aurons successivement :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{\sqrt{x_0^2 - x^2}} &= \sqrt{\frac{a}{m}} dt, \\ \int \frac{dx}{\sqrt{x_0^2 - x^2}} &= \sqrt{\frac{a}{m}} \int dt, \\ \arcsin \frac{x}{x_0} &= \sqrt{\frac{a}{m}} t + C'. \end{aligned}$$

Dans cette équation, le premier membre est un angle exprimé en radians.

Décidons de compter le temps à partir du moment où le mobile passe par la position d'équilibre ; le point O est ainsi l'origine pour le temps t comme pour l'élongation x .

Or, pour $x = 0$, $t = 0$:

$$\arcsin \frac{0}{x_0} = 0 + C',$$

donc :

$$C' = 0.$$

L'équation qui relie le temps écoulé depuis le passage au point d'équilibre au chemin parcouru depuis ce moment est :

$$\arcsin \frac{x}{x_0} = \sqrt{\frac{a}{m}} t, \quad (113)$$

que nous écrivons :

$$t = \sqrt{\frac{m}{a}} \arcsin \frac{x}{x_0} \quad (114)$$

ou

$$x = x_0 \sin \sqrt{\frac{a}{m}} t. \quad (115)$$

Ni l'une ni l'autre de ces équations ne fournissent pour t une valeur unique, car si :

$$\arcsin \frac{x}{x_0} = \alpha,$$

nous pouvons aussi écrire :

$$\arcsin \frac{x}{x_0} = \pi - \alpha, \quad \arcsin \frac{x}{x_0} = 2\pi + \alpha, \quad \arcsin \frac{x}{x_0} = 3\pi - \alpha, \text{ etc.}$$

D'où les formules générales :

$$\arcsin \frac{x}{x_0} = 2k\pi + \alpha$$

et

$$\arcsin \frac{x}{x_0} = (2k + 1)\pi - \alpha,$$

dans lesquelles k est un nombre entier, positif ou négatif.

Nous obtenons ainsi pour t une infinité de valeurs qui correspondent aux passages du mobile au point P d'élongation x :

$$t_1 = a \sqrt{\frac{m}{a}},$$

$$t_2 = (\pi - a) \sqrt{\frac{m}{a}},$$

$$t_3 = (2\pi + a) \sqrt{\frac{m}{a}},$$

$$t_4 = (3\pi - a) \sqrt{\frac{m}{a}},$$

...

Au temps t_1 , le mobile passe au point P en allant vers A ;

» t_2 , » » » P » » B ;

» t_3 , » » » P » » A ;

» t_4 , » » » P » » B ;

...

Entre le 1^{er} et le 3^e passage, une oscillation a été parcourue en un temps égal à la période T ; il en est de même entre le 2^e et le 4^e passage.

Calcul de la période. — Nous pouvons poser :

$$T = t_3 - t_1$$

ou

$$T = (2\pi + \alpha) \sqrt{\frac{m}{a}} - \alpha \sqrt{\frac{m}{a}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{a}}.$$

En partant de :

$$T = t_4 - t_2,$$

nous trouvons le même résultat :

$$T = (3\pi - \alpha) \sqrt{\frac{m}{a}} - (\pi - \alpha) \sqrt{\frac{m}{a}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{a}}.$$

L'équation (114) permet aussi de calculer la période. Le temps employé par le mobile pour aller de O à A est le quart de la période, car, quand le corps parcourt le trajet OA et quand il revient en O , il passe par les mêmes vitesses ; donc le temps employé pour aller de O en A et de A en O est égal à la demi-période. Par raison de symétrie, nous pouvons en dire autant pour les parcours OB et BO .

Pour aller de O en A , le temps employé est :

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{m}{a}} \arcsin \frac{x_0}{x_0} = \sqrt{\frac{m}{a}} \cdot \frac{\pi}{2},$$

d'où nous tirons :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{a}}. \quad (116)$$

La constante a est égale à :

$$a = \frac{f}{x};$$

c'est donc le quotient d'une force par une longueur ; ses dimensions sont :

$$\frac{\text{MLT}^{-2}}{\text{L}} = \text{MT}^{-2}.$$

Il est facile de vérifier que le facteur $\sqrt{\frac{m}{a}}$ a les dimensions d'un temps.

Calcul du temps employé par le mobile pour passer de l'élongation x_1 à l'élongation x_2 . — D'après (114), nous avons :

$$t_1 = \sqrt{\frac{m}{a}} \arcsin \frac{x_1}{x_0}, \quad t_2 = \sqrt{\frac{m}{a}} \arcsin \frac{x_2}{x_0}.$$

La durée cherchée est :

$$t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{m}{a}} \left(\arcsin \frac{x_2}{x_0} - \arcsin \frac{x_1}{x_0} \right). \quad (117)$$

Nous savons que t_1 et t_2 peuvent avoir plusieurs valeurs pour des valeurs données de x_1 et de x_2 ; l'équation (117) est susceptible de plusieurs solutions, mais il est facile de savoir laquelle il faut admettre dans un cas donné.

Ainsi cherchons à déterminer, au moyen de l'équation (117), le temps employé par le mobile pour aller de A en B ; nous avons :

$$t_1 = \sqrt{\frac{m}{a}} \arcsin(-1) = \frac{3\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{a}}$$

ou

$$t_1 = \frac{7\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{a}}$$

et

$$t_2 = \sqrt{\frac{m}{a}} \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{a}}$$

ou

$$t_2 = \frac{5\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{a}}.$$

En prenant la 2^e valeur de t_2 et la 1^{re} valeur de t_1 , nous trouvons :

$$t_2 - t_1 = \pi \sqrt{\frac{m}{a}}.$$

Mais $t_2 - t_1 = \frac{T}{2}$, d'où :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{a}}.$$

Calculons le temps qui s'écoule entre le premier et le second passage du mobile au point A ; ce temps est égal à T :

$$T = \sqrt{\frac{m}{a}} \left(\frac{7\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} \right) = 2\pi \sqrt{\frac{m}{a}}.$$

Calcul de la vitesse du mobile en un point d'élongation x . — La vitesse du mobile en un point d'élongation x est $V = \frac{dx}{dt}$; elle est donnée par la formule (112):

$$V = \sqrt{\frac{a}{m}} \sqrt{x_0^2 - x^2}. \quad (118)$$

Chaque fois que $x = \pm x_0$, la vitesse devient nulle. Elle est maximum pour $x = 0$, c'est-à-dire au passage par la position d'équilibre; nous avons alors:

$$V_m = x_0 \sqrt{\frac{a}{m}}. \quad (119)$$

La vitesse maximum est directement proportionnelle à l'amplitude. Puisque dans l'équation (118) x figure au carré, la vitesse V est la même pour x et pour $-x$, donc pour les mêmes valeurs absolues de l'élongation.

L'amplitude dans le mouvement oscillatoire rectiligne simple reste constante. — Lorsque le mobile est en A ou en B , il n'est plus en mouvement; il n'a plus d'énergie cinétique. Mais il peut, sous l'influence de la force de rappel, exécuter un certain travail qui est son énergie potentielle.

En un point d'élongation x , la force de rappel est $f = ax$ et pendant que le mobile parcourt le chemin infiniment petit dx , elle fournit le travail:

$$dW = axdx,$$

d'où:

$$W = \int axdx.$$

Proposons-nous de calculer l'énergie potentielle en A ou en B ; c'est le travail que la force f peut effectuer jusqu'au moment où elle devient nulle, c'est-à-dire jusqu'au moment où le mobile atteint le point O . Nous devons pour cela calculer la valeur de l'intégrale prise entre les limites $x = 0$ et $x = x_0$:

$$W_p = \int_0^{x_0} axdx = \frac{ax_0^2}{2}.$$

Arrivé au point O , le mobile n'a plus d'énergie potentielle; il a atteint sa vitesse maximum. Calculons son énergie cinétique:

$$W_c = \frac{1}{2} mV_m^2.$$

D'après (119) :

$$V_m = x_0 \sqrt{\frac{a}{m}},$$

donc :

$$W_c = \frac{1}{2} m \cdot x_0^2 \frac{a}{m} = \frac{ax_0^2}{2}. \quad (120)$$

Elle est égale à l'énergie potentielle en A . En passant de A à O , le mobile n'a perdu aucune énergie. Le mouvement va se continuer indéfiniment de la même façon ; nous assisterons à une transformation d'énergie potentielle en énergie cinétique, puis à la transformation inverse. Toutes ces transformations se font sans perte : l'amplitude des oscillations reste constante. C'est la solution du problème du mouvement perpétuel.

Mais les conditions que nous avons posées plus ou moins explicitement ne sont jamais remplies. Nous avons supposé que le mobile est sollicité par une force constamment proportionnelle à l'élongation ; nous avons aussi admis que cette force est seule à agir sur le corps en mouvement. Si la première hypothèse est souvent réalisée dans une très grande mesure, la seconde ne l'est jamais.

Dans le mouvement oscillatoire simple, les oscillations sont isochrones. — Les horlogers disent que les oscillations d'un régulateur sont *isochrones* lorsque leur durée est indépendante de l'amplitude. Cette propriété s'appelle l'*isochronisme*.

La formule (116) :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{a}}$$

ne contient pas l'amplitude x_0 . La période T est donc indépendante de l'amplitude : les oscillations sont isochrones.

Les forces qui engendrent un mouvement oscillatoire simple. — La condition :

$$f = ax$$

peut paraître difficile à réaliser, de sorte que le mouvement que nous venons d'étudier semble être un mouvement rare et exceptionnel. Il n'en est rien. Toute une catégorie de forces satisfait à cette condition : ce sont les forces élastiques qui obéissent à la loi de Hooke. Cette loi peut être formulée comme suit : la force qui provoque une déformation élastique est proportionnelle à cette déformation.

Cette loi s'applique aux déformations des ressorts, des spiraux, des lames ou des cordes vibrantes. Relevons cependant qu'il s'agit d'une loi approximative, mais dont l'exactitude est suffisante pour que nous puissions l'utiliser dans nos considérations sur le mouvement oscillatoire simple, tel qu'on cherche à le réaliser dans les montres.

Mouvement oscillatoire du balancier-spiral. — L'organe régulateur des montres est un *balancier* équilibré B (fig. 199) sur l'arbre duquel est fixée l'extrémité d'un ressort S enroulé en forme de spirale et appelé le *spiral*. L'autre extrémité du spiral est attachée en P au piton qui est une pièce fixe ; la lame du spiral passe généralement entre deux goupilles C fixées à une pièce, la raquette, solidaire du pont de balancier (coq), mais mobile autour de l'axe O du balancier. Les goupilles de la raquette doivent être assez rapprochées pour que la lame du spiral n'ait aucun jeu et ne soit pas serrée si fort qu'on ne puisse déplacer les goupilles. La longueur active du spiral est comptée à partir du point A où le spiral sort de la virole jusqu'au point C .

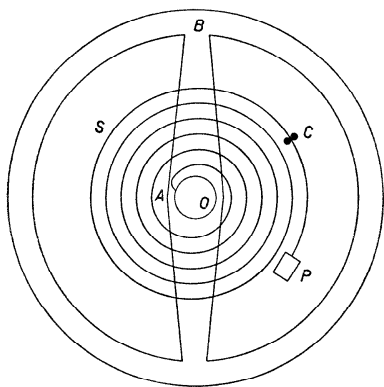


Fig. 199

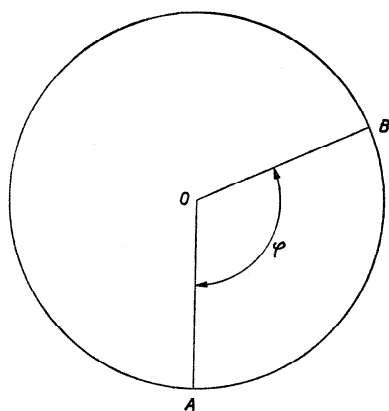


Fig. 200

Pour étudier le mouvement de l'ensemble balancier-spiral, représentons-le schématiquement par un cercle et par un unique rayon figurant la serge et le bras du balancier (fig. 200). La position OA du bras est la position d'équilibre ou position de repos ; dans cette position, le spiral n'exerce aucune action sur le balancier ; il est complètement détendu ou désarmé.

Ecartons le balancier de l'angle φ appelé *élongation* ; son bras est maintenu en OB . D'après la loi de Hooke, le couple exercé par le spiral

pour ramener le balancier à sa position d'équilibre est proportionnel à l'angle φ . Le moment M du couple est :

$$M = C\varphi . \quad (121)$$

La constante C est égale à la valeur du couple lorsque $\varphi = 1$ radian ; on l'appelle parfois le *moment élastique du spiral*.

Examinons ce qui se passe pour un élément de masse m , situé à la distance r de l'axe du balancier. La force qui agit sur cet élément est :

$$f = \frac{C\varphi}{r} .$$

Elle imprime à cette masse élémentaire m une accélération linéaire γ égale à :

$$\gamma = r \frac{d^2\varphi}{dt^2} .$$

Or :

$$f = m\gamma ,$$

donc :

$$\frac{C\varphi}{r} = mr \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

et

$$C\varphi = mr^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} .$$

Le balancier est composé d'une grande quantité de masses élémentaires dont chacune possède, à un instant donné, la même élongation φ et la même accélération angulaire $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$. Posons :

$$\sum mr^2 = I .$$

L'équation du mouvement du balancier-spiral est :

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = - C\varphi .$$

Nous donnons au couple le signe — parce qu'il est négatif quand l'accélération angulaire est positive.

L'équation :

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + C \varphi = 0 \quad (122)$$

est semblable à l'équation (111). Pour passer de l'une à l'autre, il faut, dans (111), remplacer m par I , $\frac{d^2 x}{dt^2}$ par $\frac{d^2 \varphi}{dt^2}$, a par C et x par φ .

Nous avons posé :

$$I = \sum mr^2 = \int r^2 m.$$

I est le *moment d'inertie du balancier* par rapport à l'axe de rotation. Le moment d'inertie ayant pour dimensions ML^2 est exprimé dans le système C. G. S. en $g\text{-cm}^2$.

L'angle φ est donné en radians ; le moment élastique C du spiral, étant égal au couple pour $\varphi = 1$ radian, s'exprimera en dynes-cm/rad ; ses dimensions seront ML^2T^{-2} .

Au chapitre IV (t. I, p. 103), nous avons calculé la valeur du moment élastique d'un ressort de section rectangulaire et nous avons trouvé :

$$C = \frac{Ec^3 h}{12 L}. \quad (123)$$

Rappelons que, dans cette formule :

E désigne le module d'élasticité (module de Young) de la matière dont est composé le ressort, en dynes/cm² ;

e , h , L représentent respectivement l'épaisseur, la hauteur et la longueur du ressort, en cm.

La formule (123) peut être appliquée au spiral dont la section droite est généralement rectangulaire ou à peu près.

Vitesse angulaire, période, etc. — Par deux intégrations successives, comme nous l'avons fait pour l'équation (111), nous tirons de l'équation (122) les formules suivantes :

Vitesse angulaire ω :

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{C}{I}} \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}, \quad (124)$$

où φ_0 désigne l'amplitude.

Temps t pour passer de l'élongation 0 à l'élongation φ :

$$t = \sqrt{\frac{I}{C}} \arcsin \frac{\varphi}{\varphi_0}. \quad (125)$$

Période T :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C}}. \quad (126)$$

Temps $t_2 - t_1$ pour passer de l'élongation φ_1 à l'élongation φ_2 :

$$t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{I}{C}} \left(\arcsin \frac{\varphi_2}{\varphi_0} - \arcsin \frac{\varphi_1}{\varphi_0} \right). \quad (127)$$

Valeur maximum Ω de la vitesse angulaire :

$$\Omega = \varphi_0 \sqrt{\frac{C}{I}}. \quad (128)$$

Le rapport $\frac{I}{C}$ ou son inverse $\frac{C}{I}$ ne sont souvent pas connus ; nous pouvons, en utilisant la formule (126), calculer leurs valeurs en fonction de la période T . Nous avons :

$$\sqrt{\frac{I}{C}} = \frac{T}{2\pi}, \quad \sqrt{\frac{C}{I}} = \frac{2\pi}{T}.$$

Les équations (124), (125), (127) et (128) deviennent :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}, \quad (124 \text{ a})$$

$$t = \frac{T}{2\pi} \arcsin \frac{\varphi}{\varphi_0}, \quad (125 \text{ a})$$

$$t_2 - t_1 = \frac{T}{2\pi} \left(\arcsin \frac{\varphi_2}{\varphi_0} - \arcsin \frac{\varphi_1}{\varphi_0} \right), \quad (127 \text{ a})$$

$$\Omega = \varphi_0 \frac{2\pi}{T}. \quad (128 \text{ a})$$

Autre manière de trouver les formules précédentes. — L'équation (122) :

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} + C\varphi = 0$$

est satisfaite pour :

$$\varphi = \varphi_0 \sin \sqrt{\frac{C}{I}} t. \quad (129)$$

On a en effet :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varphi_0 \sqrt{\frac{C}{I}} \cos \sqrt{\frac{C}{I}} t$$

et

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\varphi_0 \frac{C}{I} \sin \sqrt{\frac{C}{I}} t.$$

En introduisant cette dernière valeur et celle de φ dans l'équation (122), on verra qu'elle est satisfaite, que $\varphi = 0$ pour $t = 0$, et que $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 0$ pour $\varphi = \varphi_0$.

Cette solution est identique à celle qui est donnée par la formule (125). En effet, de (129) on tire :

$$\sin \sqrt{\frac{C}{I}} t = \frac{\varphi}{\varphi_0},$$

d'où :

$$\arcsin \frac{\varphi}{\varphi_0} = \sqrt{\frac{C}{I}} t$$

et

$$t = \sqrt{\frac{I}{C}} \arcsin \frac{\varphi}{\varphi_0},$$

c'est-à-dire la formule (125).

De la formule (129), on peut tirer :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varphi_0 \sqrt{\frac{C}{I}} \cos \sqrt{\frac{C}{I}} t = \varphi_0 \sqrt{\frac{C}{I}} \sqrt{1 - \sin^2 \sqrt{\frac{C}{I}} t}.$$

Mais :

$$\sin \sqrt{\frac{C}{I}} t = \frac{\varphi}{\varphi_0},$$

donc :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varphi_0 \sqrt{\frac{C}{I}} \sqrt{1 - \frac{\varphi^2}{\varphi_0^2}} = \sqrt{\frac{C}{I}} \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}$$

qui est l'équation (124).

Constance de l'amplitude et isochronisme. — Ces deux propriétés remarquables du mouvement du balancier-spiral peuvent être démontrées comme dans le cas du mouvement rectiligne.

Si le balancier est composé d'une masse m concentrée en un point situé à la distance r de l'axe et dont l'élongation est égale à φ , cette masse est sollicitée par une force :

$$f = \frac{C\varphi}{r}.$$

En décrivant l'angle infiniment petit $d\varphi$, la masse parcourt le chemin $rd\varphi$; le travail produit est alors :

$$dW_p = \frac{C\varphi}{r} rd\varphi = C\varphi d\varphi.$$

En intégrant entre $\varphi = 0$ et $\varphi = \varphi_0$, on obtient l'énergie potentielle de la masse m arrivée au point extrême de sa course et sollicitée par un spiral de moment élastique C . On trouve :

$$W_p = \int_0^{\varphi_0} C\varphi d\varphi = \frac{C\varphi_0^2}{2}.$$

Arrivée au point mort, la masse m a la vitesse angulaire Ω :

$$\Omega = \varphi_0 \sqrt{\frac{C}{I}};$$

sa vitesse linéaire est :

$$V = r\varphi_0 \sqrt{\frac{C}{I}}$$

et son énergie cinétique :

$$W_c = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}mr^2\varphi_0^2 \frac{C}{I}.$$

Comme $I = mr^2$, on aura donc :

$$W_c = \frac{1}{2}I\varphi_0^2 \frac{C}{I} = \frac{C\varphi_0^2}{2} = W_p.$$

La transformation de l'énergie potentielle en énergie cinétique se fait sans aucune perte : l'amplitude des oscillations du balancier-spiral reste constante.

L'énergie du balancier réel ne se dissipe pas non plus, puisque celui-ci est composé de masses élémentaires m dont chacune conserve la même énergie.

L'isochronisme des oscillations du balancier-spiral découle du fait que la formule (126) qui donne la valeur de la période ne contient pas le facteur φ_0 ni aucun facteur dépendant de l'amplitude.

Nombres d'alternances, d'oscillations, de fréquences et de périodes souvent utilisés dans les chronomètres de marine et dans les montres.

Nombres d'alternances par heure	14 400	16 200	18 000	21 600
Nombres d'oscillations par heure	7 200	8 100	9 000	10 800
Nombres d'alternances par seconde	4	4,5	5	6
Nombres d'oscillations par seconde (fréquence)	2	2,25	2,5	3
Périodes, en sec.	0,5	0,44	0,4	0,333...

La fonction harmonique. — Pour le mouvement oscillatoire rectiligne, nous avons obtenu la formule (115) :

$$x = x_0 \sin \sqrt{\frac{a}{m}} t$$

et, pour le mouvement oscillatoire circulaire, la formule (129) :

$$\varphi = \varphi_0 \sin \sqrt{\frac{C}{I}} t.$$

Dans les deux cas, l'élongation est une fonction sinusoïdale du temps t : elle peut être représentée par une sinusoïde (fig. 201), d'où le nom de *fonction sinusoïdale* ou *fonction harmonique* qui lui est donnée.

Nous pouvons mettre l'équation qui relie les deux variables sous la forme générale :

$$y = A \sin Bt. \quad (130)$$

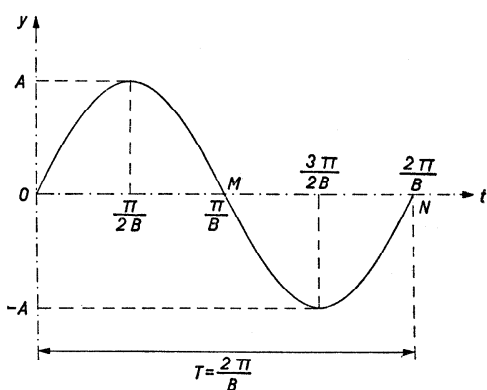


Fig. 201

Pour retrouver la formule (115), il suffit de poser :

$$y = x, \quad A = x_0, \quad B = \sqrt{\frac{a}{m}}.$$

Pour retrouver la formule (129), il faut poser :

$$y = \varphi, \quad A = \varphi_0, \quad B = \sqrt{\frac{C}{I}}.$$

Etudions la fonction représentée par l'équation (130); constatons d'abord que, pour $t = 0$, $y = 0$, que, pour $Bt = \frac{\pi}{2}$, $y = A$ et que, pour $Bt = \pi$, $y = 0$. Lorsque $Bt = 2\pi$, une oscillation est accomplie; t est égal à la période :

$$BT = 2\pi,$$

d'où :

$$T = \frac{2\pi}{B}.$$

Cette formule contient les formules (116) et (126).

Pour la fréquence, nous avons la formule générale :

$$n = \frac{1}{T} = \frac{B}{2\pi}.$$

La dérivée de y par rapport au temps est :

$$\frac{dy}{dt} = AB \cos Bt.$$

Le maximum ou le minimum de la fonction y est atteint lorsque :

$$\frac{dy}{dt} = 0,$$

c'est-à-dire pour :

$$AB \cos Bt = 0,$$

soit pour :

$$Bt = \frac{\pi}{2}, \quad Bt = \frac{3\pi}{2}, \quad \dots$$

Introduites dans (130), ces valeurs donnent :

$$y_{\max.} = A, \quad y_{\min.} = -A.$$

La figure 201 montre qu'une période complète ON se compose de deux demi-périodes OM et MN égales et de signes contraires. *La valeur moyenne de la fonction harmonique dans une période est nulle.*

Cette propriété n'appartient évidemment pas à toutes les fonctions périodiques.

Construction de la sinusoïde $y = A \sin Bt$. — Décrivons (fig. 202) une circonférence de rayon A et divisons-la en parties égales à partir du diamètre horizontal; nous obtenons les points 1, 2, 3, ... et nous considérons les angles $OC1$, $OC2$, $OC3$, ... comme les valeurs successives que prend le produit Bt .

Pour dessiner la courbe représentative de la fonction :

$$y = f(t) = A \sin Bt,$$

à partir de l'origine O , nous portons sur la droite horizontale des segments représentant t . Pour le point 1, nous avons :

$$\text{arc}(O-1) = A \cdot Bt_1,$$

d'où :

$$t_1 = \frac{\text{arc}(O-1)}{A \cdot B}.$$

Cette valeur est portée sur l'axe des abscisses, à l'échelle des temps. Nous obtenons ainsi les points $1'$, $2'$, $3'$, ... En tirant par les points 1, 2, 3, ... des horizontales et par $1'$, $2'$, $3'$, ... des verticales, nous

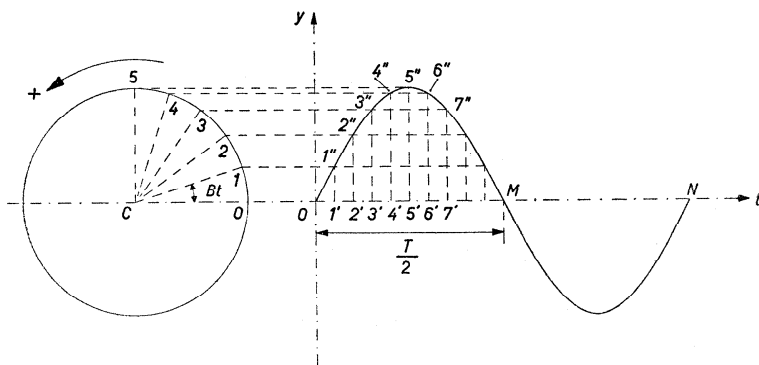


Fig. 202

déterminons des points d'intersection $1''$, $2''$, $3''$, ... qui sont des points de la sinusoïde. En effet, le point $3''$, par exemple, a les coordonnées $O3'$ et $3'3''$:

$$O3' = \frac{\text{arc}(O-3)}{A \cdot B} = \frac{A \cdot Bt_3}{A \cdot B} = t_3, \quad 3'3'' = A \cdot \sin Bt_3.$$

Ces coordonnées satisfont l'équation (130).

L'angle représenté par Bt est appelé la *phase* de la fonction au temps t : c'est une fonction linéaire du temps. La valeur de Bt au temps $t = 0$ est la *phase initiale*. Pour les fonctions représentées par une équation telle que (130), la phase initiale est nulle. Ce n'est plus le cas si la fonction a la forme plus générale :

$$y = A \sin(Bt + \alpha), \quad (131)$$

dans laquelle A , B et α sont des constantes. Il suffit d'augmenter Bt de la formule (130) de l'angle constant α pour avoir l'équation (131); ceci revient à décaler les rayons CO , $C1$, $C2$, ... de l'angle α . Dans ce cas, la phase initiale est α et l'origine de la sinusoïde n'est pas en O . Car pour que $y = 0$, il faut que :

$$Bt + \alpha = 0,$$

d'où :

$$t = -\frac{\alpha}{B}.$$

Par contre l'amplitude des deux sinusoïdes représentées par les équations (130) et (131) est la même.

La sinusoïde coupe l'axe des temps lorsque $y = 0$, c'est-à-dire pour :

$$\begin{aligned} Bt_1 + \alpha &= 0 & \text{ou} & & t_1 &= -\frac{\alpha}{B}, \\ Bt_2 + \alpha &= \pi & \text{ou} & & t_2 &= \frac{\pi - \alpha}{B}, \\ Bt_3 + \alpha &= 2\pi & \text{ou} & & t_3 &= \frac{2\pi - \alpha}{B}, \\ & \dots & & & & \end{aligned}$$

La période T est égale à :

$$T = t_3 - t_1 = \frac{2\pi - \alpha}{B} - \left(-\frac{\alpha}{B}\right),$$

d'où

$$T = \frac{2\pi}{B}. \quad (132)$$

De l'équation (132), nous tirons :

$$B = \frac{2\pi}{T};$$

B est appelé la *pulsation de la fonction harmonique*. Tirée de l'équation (131), cette quantité permet de calculer la période en utilisant l'équa-

tion (132). La période et la fréquence ne dépendent que de la pulsation et non de la phase initiale.

L'angle α qui est constant est la *différence de phase* entre les deux sinusoïdes d'équation (130) et (131).

Série de Fourier. — L'oscillation sinusoïdale est la plus simple des oscillations périodiques.

Fourier (1768-1830) a démontré qu'une fonction périodique quelconque $y = f(t)$ de fréquence n peut être considérée comme la somme de fonctions sinusoïdales de fréquence $n, 2n, 3n$, etc..., d'amplitudes et de phases initiales convenables, et cela d'une seule manière :

$$y = f(t) = A_0 + A_1 \sin(Bt + \alpha_1) + A_2 \sin(2Bt + \alpha_2) + A_3 \sin(3Bt + \alpha_3) + \dots$$

En général, il faudra un nombre infini de termes pour représenter exactement la fonction $f(t)$.

Nous dirons que la fonction périodique $y = f(t)$ est développée en série de Fourier. Le terme constant A_0 représente la valeur moyenne de la fonction $f(t)$ pendant une période ; si cette valeur moyenne est nulle, le terme A_0 doit disparaître du développement. Les termes successifs :

$$A_1 \sin(Bt + \alpha_1), \quad A_2 \sin(2Bt + \alpha_2), \quad A_3 \sin(3Bt + \alpha_3), \dots,$$

de fréquence $n, 2n, 3n, \dots$, constituent les *harmoniques* 1, 2, 3, ... de la fonction. L'harmonique 1 :

$$A_1 \sin(Bt + \alpha_1),$$

porte plus particulièrement le nom de *terme fondamental* ; sa fréquence

$n = \frac{B}{2\pi}$, qui est celle de la fonction,

est la *fréquence fondamentale*.

Dire d'une grandeur périodique quelconque qu'elle n'est pas sinusoïdale revient à dire qu'elle a des *harmoniques*, c'est-à-dire qu'elle est composée de grandeurs sinusoïdales de fréquences multiples de sa propre fréquence. Rechercher les harmoniques, c'est faire l'*analyse harmonique* de la grandeur considérée.

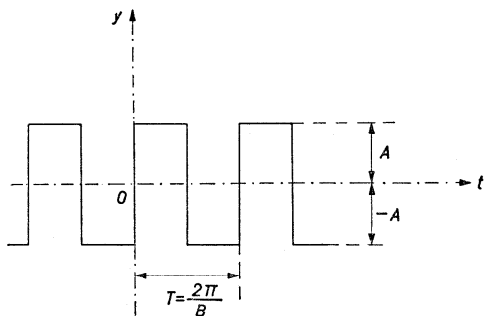


Fig. 203

Ainsi la fonction :

$$y = f(t) = \frac{4A}{\pi} \left[\sin Bt + \frac{1}{3} \sin 3Bt + \frac{1}{5} \sin 5Bt + \dots \right]$$

est une série de Fourier qui ne contient que des harmoniques impairs. Elle est représentée par la figure 203.

Représentation cinématique d'une fonction sinusoïdale du temps. — Nous pouvons donner de la fonction :

$$y = A \sin (Bt + \alpha)$$

une représentation *cinématique* en procédant comme suit : considérons un vecteur de longueur A tournant dans le sens direct autour d'un point fixe C à la vitesse de B radians par seconde ou $n = \frac{B}{2\pi}$ tours par seconde.

Soit \overrightarrow{CM}_0 sa position à l'instant $t = 0$ et \overrightarrow{CM} sa position à l'instant quelconque t . Nous repérons la position de ce vecteur à l'instant t par l'angle θ qu'il fait avec un axe origine fixe Cx :

$$\theta = \sphericalangle x CM.$$

L'équation du mouvement angulaire uniforme est :

$$\theta = Bt + \alpha,$$

α désignant la position angulaire du vecteur tournant à l'instant $t = 0$, c'est-à-dire l'angle $x CM_0$.

Menons un axe Oy perpendiculaire à Cx , et appelons y la projection du vecteur \overrightarrow{CM} sur cet axe. Nous avons :

$$y = \overline{OP} = CM \sin \theta = A \sin (Bt + \alpha).$$

Donc la projection de notre vecteur tournant \overrightarrow{CM} sur l'axe Oy est, à chaque instant, en grandeur et en signe, la valeur de la fonction sinusoïdale :

$$y = A \sin (Bt + \alpha).$$

L'angle θ représente la phase de la fonction à l'instant t , l'angle α sa phase initiale. La vitesse angulaire du vecteur tournant, exprimée en rad/s, représente la pulsation B de la fonction ; exprimée en tours/s, sa fréquence n .

Cette manière de représenter la fonction sinusoïdale du temps par un vecteur tournant permet de se rendre facilement compte de l'allure de la fonction. La figure 204 montre :

1° que, pour $t = 0$:

$$y = \overline{OP}_0 = CM_0 \sin \alpha = A \sin \alpha ,$$

c'est-à-dire que la sinusoïde représentant la fonction $y = f(t)$ doit couper l'axe des y en P_0 ;

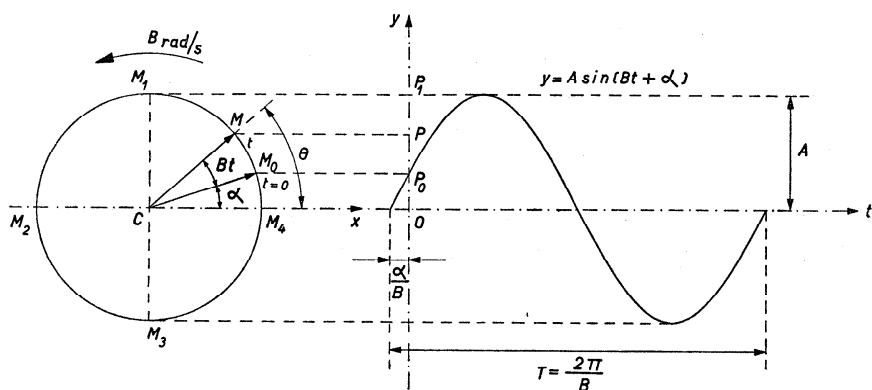


Fig. 204

2° que la valeur maximum de y est atteinte lorsque le vecteur a la position \overrightarrow{CM}_1 ; ce maximum vaut $+A$;

3° que y est nul quand le vecteur est en \overrightarrow{CM}_4 ou \overrightarrow{CM}_2 ;

4° que la valeur minimum de y correspond à la position \overrightarrow{CM}_3 du vecteur ; ce minimum vaut $-A$.

La figure 204 permet de constater que, si $\alpha = 0$, la sinusoïde coupe l'axe des y en O , et si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, en P_1 .

Si le cercle de centre C et de rayon A est un disque mobile autour de C et si le point M est un point lumineux de la périphérie du disque, nous verrons, en regardant le disque par la tranche, le point M exécuter des oscillations rectilignes sinusoïdales.

Représentation vectorielle d'une fonction sinusoïdale du temps. — Nous pouvons convenir de représenter graphiquement la fonction sinusoïdale :

$$y = A \sin(Bt + \alpha)$$

par le vecteur fixe $\overrightarrow{CM_0}$ de longueur A et faisant un angle α avec l'axe origine Ox (fig. 204). Nous écrirons :

$$\overrightarrow{CM_0} = \vec{A} = A \sin(Bt + \alpha).$$

Le vecteur $\overrightarrow{CM_0} = \vec{A}$, qui n'est autre que la position du vecteur tournant \overrightarrow{CM} de la représentation cinématique à l'instant $t = 0$, définit entièrement la fonction sinusoïdale y . En effet, si nous désirons connaître la valeur de la fonction à l'instant t , il nous suffira par la pensée de faire tourner le vecteur représentatif $\overrightarrow{CM_0}$ autour du point C pendant t secondes dans le sens direct à la vitesse de B rad/s, ce qui l'amène dans la position \overrightarrow{CM} , puis de le projeter sur un axe Oy perpendiculaire à Cx ; la projection ainsi obtenue représentera en grandeur et en signe la valeur de la fonction sinusoïdale à l'instant t .

Somme de deux fonctions sinusoïdales de même période. — Soient deux fonctions sinusoïdales de même période :

$$y_1 = A_1 \sin(Bt + \alpha_1), \quad y_2 = A_2 \sin(Bt + \alpha_2).$$

Si la somme de ces deux fonctions est une fonction sinusoïdale de même période, elle aura la forme :

$$y = A \sin(Bt + \alpha).$$

Il faut montrer qu'il existe des valeurs A et α telles que :

$$y = y_1 + y_2$$

pour toutes les valeurs de t . Donc :

$$A \sin(Bt + \alpha) \equiv A_1 \sin(Bt + \alpha_1) + A_2 \sin(Bt + \alpha_2).$$

Pour $t = 0$, on doit avoir :

$$A \sin \alpha = A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2; \quad (a)$$

pour $t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2B}$ ou $Bt = \frac{\pi}{2}$, on a :

$$A \cos \alpha = A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2. \quad (b)$$

En divisant les équations (a) et (b) membre à membre, on trouve :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2}. \quad (133)$$

En élevant (a) et (b) au carré et en les additionnant membre à membre, on trouve, tous calculs faits :

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}. \quad (134)$$

Il est possible de représenter les deux fonctions sinusoïdales y_1 et y_2 par des vecteurs \vec{CM}_1 et \vec{CM}_2 (fig. 205) faisant avec un axe origine Cx les angles α_1 et α_2 . Les longueurs de ces vecteurs sont :

$$CM_1 = A_1, \quad CM_2 = A_2.$$

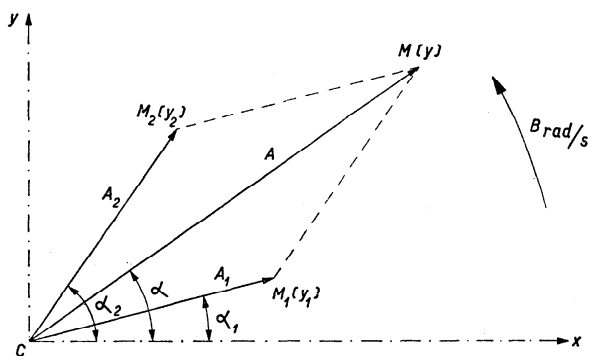


Fig. 205

Soit CM la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux vecteurs. On voit que :

$$\sphericalangle CM_1M = \pi - (\alpha_2 - \alpha_1),$$

le triangle CM_1M donne par conséquent :

$$CM = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}.$$

C'est la valeur donnée par la formule (134) ; on a donc :

$$CM = A.$$

Soit provisoirement α' l'angle MCx . En projetant le contour polygonal CM_1M sur un axe quelconque, on peut écrire :

$$\operatorname{proj.} CM = \operatorname{proj.} CM_1 + \operatorname{proj.} M_1M = \operatorname{proj.} CM_1 + \operatorname{proj.} CM_2.$$

Si l'on projette sur un axe Cy perpendiculairement à Cx , on obtient :

$$A \sin \alpha' = A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2,$$

et si l'on fait de même sur l'axe Cx :

$$A \cos \alpha' = A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2.$$

En divisant ces deux équations membre à membre, on trouve :

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2}.$$

C'est la valeur donnée par l'équation (133) ; on a donc :

$$\alpha' = \alpha.$$

On parvient ainsi à la conclusion que le vecteur \overrightarrow{CM} , somme géométrique des deux vecteurs $\overrightarrow{CM_1}$ et $\overrightarrow{CM_2}$, a pour longueur A et fait l'angle α avec l'axe origine Cx ; ce vecteur \overrightarrow{CM} représente donc la fonction sinusoïdale :

$$y = A \sin (Bt + \alpha) = y_1 + y_2.$$

On peut énoncer la règle suivante, dite règle de Fresnel (1788-1827) : *la somme de deux fonctions sinusoïdales de même période est une fonction sinusoïdale de même période dont le vecteur représentatif est la somme géométrique des vecteurs représentatifs des deux fonctions.*

Dans la représentation cinématique, le parallélogramme CM_1MM_2 de la figure 205 est supposé tourner à la vitesse angulaire de B rad/s.

La règle de Fresnel peut être généralisée à un nombre quelconque de fonctions sinusoïdales de même période. On peut donc composer et décomposer les grandeurs sinusoïdales de même période en opérant sur leurs vecteurs représentatifs comme on le fait sur les forces en mécanique. Cette méthode de calcul est particulièrement appréciée dans l'étude des courants alternatifs.

Dérivée d'une fonction sinusoïdale du temps. — Soit la fonction sinusoïdale :

$$y = A \sin (Bt + \alpha).$$

Sa dérivée est :

$$\frac{dy}{dt} = A \cdot B \cos (Bt + \alpha) = A \cdot B \sin \left(Bt + \alpha + \frac{\pi}{2} \right).$$

On voit que la fonction dérivée d'une fonction sinusoïdale est une fonction sinusoïdale de même période que la première, d'amplitude B fois plus grande et en avance

sur elle d'un angle $\frac{\pi}{2}$ ou d'un quart de période.

La fonction y et sa dérivée $\frac{dy}{dt}$ seront représentées graphiquement par deux vecteurs \vec{CM} et \vec{CN} perpendiculaires l'un à l'autre (fig. 206); ceux-ci n'ont pas la même longueur puisque $CM = A$ et $CN = A \cdot B$.

La dérivée $\frac{dy}{dt}$ mesure la variation de la grandeur y dans l'unité de temps. Si $y = f(t)$ est l'équation du mouvement d'un mobile, la dérivée $\frac{dy}{dt}$ est la vitesse linéaire ou angulaire du mobile selon que la fonction y représente une longueur ou un angle.

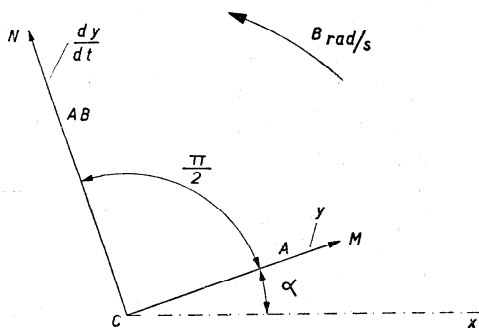


Fig. 206

Le moment d'inertie du balancier. — Dans la formule (126) :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C}},$$

$I = \sum mr^2$ représente le moment d'inertie du balancier. Dans les calculs, on suppose parfois toute la masse M du balancier concentrée en un point situé à une distance ϱ de l'axe de rotation telle que le moment d'inertie de cette masse concentrée soit le même que celui du balancier réel. On a alors :

$$M\varrho^2 = \sum mr^2 = I;$$

ϱ est appelé le *rayon de giration* du balancier.

On peut calculer le moment d'inertie d'un balancier par rapport à son axe de rotation. Pour cela, on calcule les moments d'inertie de toutes les parties dont est composé le balancier : serge, bras, vis, plateau, virole, arbre. C'est un calcul long et fastidieux ; malgré tous les soins qu'on peut y apporter, on n'arrive qu'à un résultat approximatif, car les erreurs dans les dimensions et la densité sont inévitables et il faut supposer aux pièces des formes simplifiées pour pouvoir les soumettre au calcul.

Le technicien, cependant, peut avoir à résoudre des problèmes dans lesquels le moment d'inertie joue un rôle. Il doit pouvoir calculer un moment d'inertie. Dans le chapitre VIII, il trouvera les formules qui lui permettront de déterminer les moments d'inertie des corps ayant les formes géométriques les plus usuelles.

Les horlogers disent que pour faire retarder une montre, il faut augmenter le « poids » du balancier ; ils devraient dire le « moment d'inertie ». Certes en mettant des rondelles sous les têtes des vis du balancier, on augmente à la fois le poids et le moment d'inertie. Mais si l'on avait mis la même masse supplémentaire tout près de l'axe, on aurait augmenté le poids de la même quantité, tandis que l'effet sur la marche de la montre aurait été beaucoup plus faible parce que le moment d'inertie aurait été très peu modifié.

Un autre moyen de faire retarder une montre consiste à dévisser un peu les vis réglantes ; dans cette opération on n'a pas modifié le poids du balancier, mais son moment d'inertie.

De deux balanciers, le plus léger peut avoir le moment d'inertie le plus grand. Or, à cause de la différence des amplitudes des oscillations du balancier, la marche d'une montre dans une position verticale n'est pas la même que dans la position horizontale. Il est important pour le réglage de rendre les amplitudes autant que possible égales en diminuant le frottement des pivots. Le frottement amortit les oscillations comme on le verra plus loin ; il est d'autant plus grand que le balancier est plus lourd et que les pivots sont plus gros. On a intérêt, d'autre part, à avoir des balanciers de grand moment d'inertie. On peut plus ou moins concilier ces deux exigences en utilisant des balanciers légers, mais possédant de grands moments d'inertie ; c'est une question de répartition de la masse qui, dans la montre, ne peut pas être résolue n'importe comment en raison de l'encombrement.

Détermination expérimentale du moment d'inertie d'un balancier. — Jules et Hermann Grossmann ont indiqué une méthode expérimentale pour déterminer le moment d'inertie d'un balancier. Cette méthode consiste à faire osciller, à la façon d'un pendule, le balancier dont la serge est appuyée sur un couteau (fig. 207). On détermine la période T de ce pendule en mesurant la durée d'un certain nombre d'oscillations, ce qui implique que l'amortissement des oscillations ne soit pas trop grand. On suppose aussi que les oscillations sont de faible amplitude afin de pouvoir appliquer une formule établie dans le chapitre XIV :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C}},$$

où T désigne la période d'un pendule dont les oscillations sont de faible amplitude ; I , le moment d'inertie du pendule par rapport à son axe de suspension O_1 ; C , son moment statique.

Par définition :

$$C = MgR,$$

où M représente la masse du pendule ; g , l'accélération de la pesanteur au lieu où la mesure est faite ; R , le rayon intérieur de la serge du balancier, c'est-à-dire la distance entre le centre de suspension et le centre de gravité. Mg représente le poids du balancier qui peut être très exactement déterminé par une pesée. Donc :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{MgR}}.$$

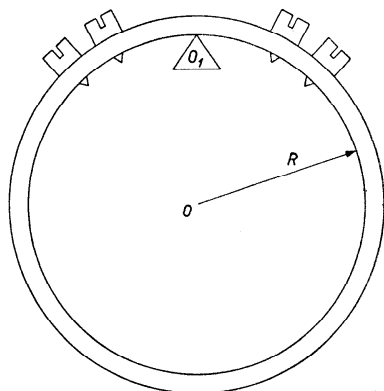


Fig. 207

Dans cette formule, T , Mg et R sont mesurés. On en tire :

$$I = \frac{T^2 MgR}{4\pi^2}.$$

Mais ce moment d'inertie se rapporte à l'axe O_1 autour duquel se font les oscillations ; pour déterminer le moment d'inertie I_o par rapport à un axe parallèle au premier, mais passant par le centre O du balancier, on utilise une formule établie dans le chapitre VIII (p. 98) :

$$I_o = I - MR^2$$

ou

$$I_o = \frac{MR}{4\pi^2} [T^2 g - 4\pi^2 R]. \quad (135)$$

La détermination précise de T est difficile ; elle ne peut être exécutée avec quelque exactitude que sur de grands balanciers et en utilisant un couteau très bien poli, de façon que l'amortissement des oscillations soit faible.

Une autre méthode a été mise au point au Laboratoire suisse de recherches horlogères par A. Jaquerod et L. Defossez.

L'appareil utilisé consiste en un bon mouvement de montre monté dans un cercle muni de trois pieds assez hauts pour permettre de voir les aiguilles et le cadran dans un miroir (pl. IX, fig. 208).

Le pivot supérieur du balancier est semblable à un pivot d'aiguille des secondes ; il traverse la pierre du coq et la dépasse assez pour qu'on puisse y ajuster le balancier dont on veut mesurer le moment d'inertie (fig. 209).

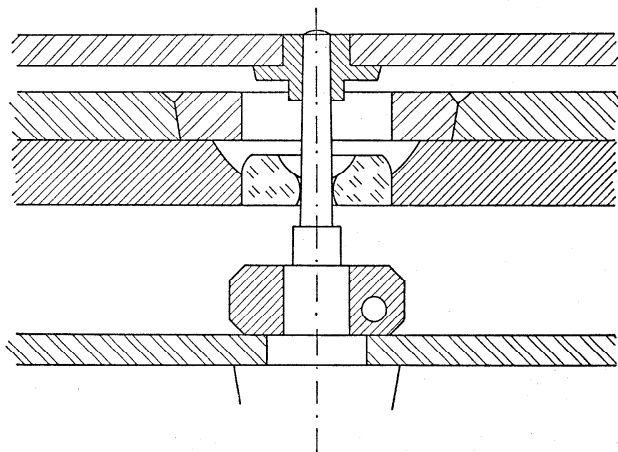


Fig. 209

Soient I et C le moment d'inertie du balancier et le moment élastique du spiral de l'appareil ; celui-ci a la période :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C}}.$$

Soit I' le moment d'inertie inconnu du balancier qui est placé sur le pivot supérieur du balancier de l'appareil. On a une nouvelle période T' telle que :

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{I + I'}{C}}.$$

De ces deux équations on tire :

$$\left(\frac{T'}{T}\right)^2 = 1 + \frac{I'}{I}$$

ou

$$I' = I \left[\left(\frac{T'}{T}\right)^2 - 1 \right]. \quad (136)$$

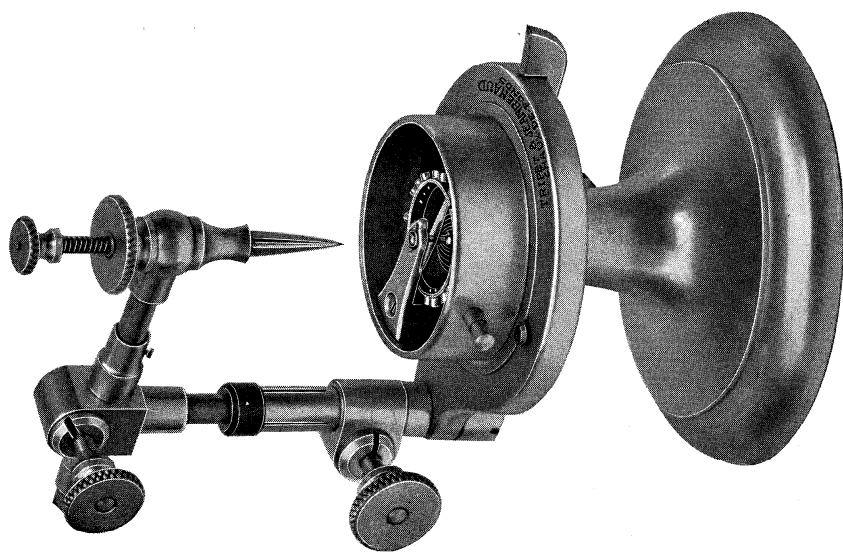


Fig. 213

PL. IX

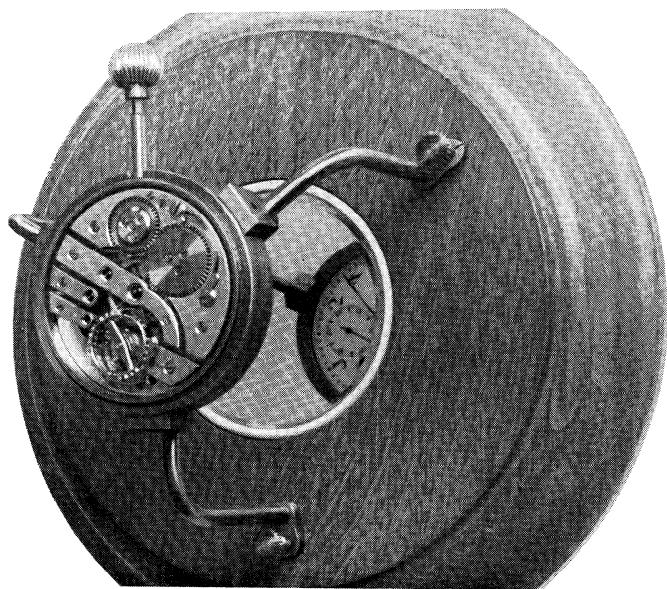


Fig. 208

C'est la formule de l'appareil. Pour l'utiliser, il faut connaître I , T et T' . Les deux dernières grandeurs sont faciles à déterminer par l'observation.

On suppose la montre bien réglée et sa période T connue. S'il y a des doutes, on détermine la marche de la montre pendant un certain temps, une heure par exemple, ce qui exige deux observations à une heure d'intervalle. On fera de même pour déterminer T' . Si en une heure la marche de la montre, dont la fréquence est 2,5, est de t secondes, la période correspondante sera égale à :

$$\frac{3600 + t}{3600 \cdot 2,5}.$$

Mais on ne peut pas mesurer le moment d'inertie I du balancier de l'appareil par une observation directe. Il est nécessaire de mettre sur l'appareil un disque, en acier par exemple, exécuté avec le plus grand soin et de dimensions bien définies. Son moment d'inertie calculé d'après la formule relative aux corps cylindriques est :

$$I = M \frac{R^2}{2}.$$

R est mesuré très exactement au moyen d'un instrument de précision et M est déterminé par pesée sur une balance très sensible. On peut ainsi calculer le moment d'inertie I_0 du disque-étalon.

La période T_0 est celle du balancier qui porte comme surcharge le disque-étalon :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I + I_0}{C}}.$$

On avait :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C}},$$

donc :

$$I = I_0 \frac{T^2}{T_0^2 - T^2}. \quad (137)$$

C'est la formule d'étalonnage de l'appareil. Le moment d'inertie I est déterminé une fois pour toutes : c'est la constante de l'appareil.

Si l'on doit se servir d'un appareil dont on ignore la constante, il faut la déterminer en utilisant un balancier dont le moment d'inertie est connu et en calculant I d'après la formule (137). Ce n'est qu'ensuite qu'on peut obtenir le moment d'inertie de n'importe quel balancier.

La méthode est précise si l'on prend soin de faire que dans la formule (136) T et T' soient assez différents l'un de l'autre. Ainsi pour mesurer les moments d'inertie de petits balanciers, on utilisera un appareil dont le mouvement a aussi un petit balancier.

Détermination du moment élastique C du spiral. — La formule (123) donne la valeur du moment élastique C d'un spiral de section rectangulaire :

$$C = \frac{Ee^3h}{12L}.$$

Dans cette formule, E représente le module d'élasticité ou module de Young du métal dont est fait le spiral ; e , h , L désignent respectivement l'épaisseur, la hauteur et la longueur de la lame du spiral. Si nous restons dans le système C.G.S., E est exprimé en dynes/cm², e , h et L en cm et C en dynes-cm/rad. Les dimensions de ces différentes grandeurs sont :

$$[E] = \text{ML}^{-1}\text{T}^{-2}, \quad [e, h, L] = \text{L}, \quad [C] = \text{ML}^2\text{T}^{-2}.$$

Si tous les facteurs contenus dans la formule (123) sont connus, il est facile de calculer C .

Nous avons fait remarquer au chapitre IV (t. I, p. 95) que le module E est une grandeur dont nous ne pouvons donner qu'une valeur approximative ; cette valeur varie encore avec la température.

L'épaisseur e et la hauteur h du spiral sont mesurables ; sa longueur L , peut être calculée avec une exactitude suffisante pour nos besoins.

Longueur d'un spiral considéré comme une spirale d'Archimède. — L'équation polaire de la spirale d'Archimède (fig. 210) est :

$$r = a\theta, \quad (138)$$

où r désigne le rayon vecteur qui fait avec l'axe Ox l'angle θ exprimé en radians, a une constante.

Le pas de la spirale est la distance de deux points de la courbe correspondant à des angles polaires qui diffèrent entre eux de 2π . On aura :

$$r_1 = a\theta_1, \quad r_2 = a(\theta_1 + 2\pi),$$

d'où :

$$p = r_2 - r_1 = a \cdot 2\pi.$$

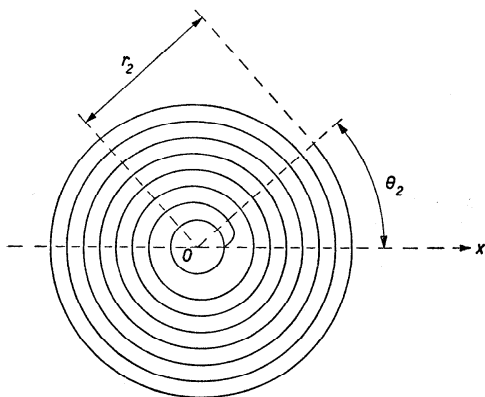


Fig. 210

Entre le pas p et la constante a , on a la relation :

$$a = \frac{p}{2\pi}.$$

La longueur d'un arc de courbe dont l'équation polaire est :

$$\theta = f(r)$$

est donnée par la formule générale :

$$L = \int_{r_1}^{r_2} \left[1 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dr} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dr.$$

Appliquée à la spirale d'Archimède, cette expression devient :

$$L = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{1 + \frac{r^2}{a^2}} dr.$$

Après intégration on obtient :

$$L = \left[\frac{r}{2} \sqrt{1 + \frac{r^2}{a^2}} + \frac{a}{2} \ln \left(\frac{r}{a} + \sqrt{1 + \frac{r^2}{a^2}} \right) \right]_{r_1}^{r_2} \quad (139)$$

ou, en remplaçant $\frac{r}{a}$ par θ :

$$L = \frac{a}{2} \left[\theta \sqrt{1 + \theta^2} + \ln (\theta + \sqrt{1 + \theta^2}) \right]_{\theta_1}^{\theta_2}. \quad (140)$$

Le nombre des spires d'un spiral de montre est généralement supérieur à 10 ; l'angle θ peut atteindre et dépasser la valeur de $20\pi = 62,8 \dots$ radians. On peut donc poser, sans commettre d'erreur insupportable :

$$\sqrt{1 + \theta^2} = \theta.$$

D'autre part, comparé à θ^2 , le terme $\ln (\theta + \sqrt{1 + \theta^2})$ est petit. En effet, pour $\theta = 20\pi$, $\theta^2 = 400\pi^2 = 3947,8 \dots$ et :

$$\ln (20\pi + \sqrt{1 + 400\pi^2}) = 4,83 \dots$$

Le rapport entre $\ln (\theta + \sqrt{1 + \theta^2})$ et θ^2 est encore plus petit, si $\theta > 20\pi$.

Avec ces simplifications, on obtient une formule approximative, mais suffisamment exacte pour calculer la longueur des spiraux de montres

dont le nombre de spires est généralement supérieur à 10. La formule approximative prend les formes suivantes :

$$L = \frac{a}{2} [\theta_2^2 - \theta_1^2] = \frac{p}{4\pi} [\theta_2^2 - \theta_1^2]$$

ou

$$L = \frac{r_2^2 - r_1^2}{2a} = \pi \frac{r_2^2 - r_1^2}{p}.$$

On peut écrire cette dernière formule de la façon suivante :

$$L = \pi \frac{(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)}{p}.$$

Soient r_m le rayon moyen et n le nombre de spires :

$$r_m = \frac{r_2 + r_1}{2}, \quad n = \frac{r_2 - r_1}{p};$$

on a :

$$L = 2\pi r_m \cdot n.$$

Ainsi la formule (141), qui est, rappelons-le, une formule approximative, revient à assimiler les spires à des circonférences de cercle.

θ_1 et θ_2 sont les angles polaires des rayons vecteurs extrêmes. Si le spiral commence au centre O , on a :

$$\theta_1 = 0, \quad r_1 = 0.$$

La formule (141) devient :

$$L = \frac{p\theta_2^2}{4\pi} = \frac{\pi r_2^2}{p},$$

tandis que la formule exacte est :

$$L = \frac{a}{2} \left[\theta_2 \sqrt{1 + \theta_2^2} + \ln (\theta_2 + \sqrt{1 + \theta_2^2}) \right]$$

ou

$$L = \frac{p}{4\pi} \left[\theta_2 \sqrt{1 + \theta_2^2} + \ln (\theta_2 + \sqrt{1 + \theta_2^2}) \right].$$

Pour se rendre compte de la valeur des formules approximatives, on peut calculer L , pour $\theta_2 = 20\pi$, tout d'abord d'après la formule (142) :

$$L = 3947,84 \frac{p}{4\pi},$$

puis d'après la formule (143) :

$$L = 3958,78 \frac{p}{4\pi}.$$

L'erreur est de 0,28 % de la longueur exacte. En réalité $\theta > 20\pi$, et l'erreur est encore plus faible.

Relation entre la marche diurne d'une montre et la période du balancier. — Pour apprécier l'exactitude d'une montre ou d'une pendule, on détermine sa *marche diurne*. On obtient celle-ci en observant l'heure de la montre à un certain moment qu'on lit sur un chronomètre ou sur une pendule bien réglée ; cette heure indiquée par la montre est son *état* au moment considéré. On note l'état de la montre après 24 heures ; la différence :

$$\text{état à 24 h} - \text{état à 0 h}$$

est la marche diurne que l'on désigne par μ . Elle est affectée du signe + ou - suivant que la montre avance ou retarde par rapport à la pendule de référence.

La qualité d'une montre dépend en grande partie de la régularité de sa marche diurne. Une montre dont la marche diurne est constante est meilleure qu'une montre dont la marche diurne varie, parce que les variations de la seconde sont généralement imprévisibles. Il importe peu pour la qualité d'une montre que la marche diurne soit égale à zéro ou non. Mais l'utilisation de cette montre est facilitée si la marche diurne est nulle.

Le régleur doit pouvoir modifier la période du balancier ; il a pour cela plusieurs moyens. Il peut augmenter ou diminuer le moment d'inertie du balancier en plaçant des rondelles de métal sous les têtes des vis du balancier ou en limant ou fraisant ces têtes de vis ; il peut aussi modifier la longueur L du spiral en déplaçant la raquette et ses goupilles entre lesquelles la lame du spiral est tenue. Ce dernier moyen peut même être employé par le possesseur de la montre.

Il est évident que la modification de la marche diurne de la montre est un multiple de la modification de la période du balancier, provoquée par un changement du moment d'inertie du balancier ou de la longueur du spiral.

Dans le calcul qui suit, on suppose que la modification ΔT de la période reste constante pendant les 24 heures ; on verra plus tard que cette hypothèse n'est réalisée que d'une façon très approximative.

Si la montre est parfaitement réglée, le balancier exécute en 24 heures ou en 86 400 secondes, N oscillations :

$$N = \frac{86\,400}{T}.$$

Quand la période est $T + \Delta T$, le nombre d'oscillations en 24 heures est N' :

$$N' = \frac{86\,400}{T + \Delta T}.$$

La différence des nombres d'oscillations divisée par la fréquence n est égale à la marche diurne :

$$\mu = \frac{1}{n} \left(\frac{86\,400}{T + \Delta T} - \frac{86\,400}{T} \right),$$

soit :

$$\mu = -\frac{1}{n} \frac{86\,400}{T(T + \Delta T)} \Delta T = -\frac{86\,400}{T + \Delta T} \frac{\Delta T}{T}, \quad (144)$$

d'où :

$$\Delta T = -\frac{\mu T}{86\,400 + \mu}. \quad (145)$$

Lorsque ΔT est très petit en comparaison de T , on peut utiliser les formules approximatives :

$$\mu = -\frac{86\,400}{T} \frac{\Delta T}{T} \quad (146)$$

et

$$\Delta T = -\frac{\mu T}{86\,400}. \quad (147)$$

Pour obtenir une variation de la marche diurne de 1 seconde, il faut modifier la période du balancier, dont la fréquence est de 2,5, de :

$$\Delta T = \frac{0,4}{86\,400} = 0,000\,004\,6 \text{ s.}$$

Relation entre la modification de la période et les modifications des facteurs qui influencent la période. — La période d'un balancier de montre est :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C}},$$

soit, en remplaçant C par $\frac{Ee^3h}{12L}$:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{12IL}{Ee^3h}}$$

ou

$$\ln T = \ln 2\pi \sqrt{12} + \frac{1}{2} \ln I + \frac{1}{2} \ln L - \frac{1}{2} \ln E - \frac{3}{2} \ln e - \frac{1}{2} \ln h.$$

En différenciant, on obtient :

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2} \frac{\Delta I}{I} + \frac{1}{2} \frac{\Delta L}{L} - \frac{1}{2} \frac{\Delta E}{E} - \frac{3}{2} \frac{\Delta e}{e} - \frac{1}{2} \frac{\Delta h}{h}$$

ou

$$\Delta T = T \left[\frac{1}{2} \frac{\Delta I}{I} + \frac{1}{2} \frac{\Delta L}{L} - \frac{1}{2} \frac{\Delta E}{E} - \frac{3}{2} \frac{\Delta e}{e} - \frac{1}{2} \frac{\Delta h}{h} \right]. \quad (148)$$

D'après (146), on a la relation :

$$\mu = -86\,400 \left[\frac{1}{2} \frac{\Delta I}{I} + \frac{1}{2} \frac{\Delta L}{L} - \frac{1}{2} \frac{\Delta E}{E} - \frac{3}{2} \frac{\Delta e}{e} - \frac{1}{2} \frac{\Delta h}{h} \right]. \quad (149)$$

Dans cette formule, μ désigne la marche diurne c'est-à-dire la variation de l'état de la montre en 24 heures.

Pour modifier la marche μ de la quantité $\Delta\mu$, il suffira d'appliquer la formule (149) où μ aura été remplacé par $\Delta\mu$; en effet, $\Delta\mu$ serait la marche si μ était nul.

Caleul de la modification de la longueur du spiral provoquant une variation donnée de la marche de la montre. — Ne modifions que la longueur L du spiral et posons :

$$\Delta I = \Delta E = \Delta e = \Delta h = 0.$$

L'équation (149) devient :

$$\mu = -86\,400 \cdot \frac{1}{2} \frac{\Delta L}{L},$$

d'où nous tirons :

$$\Delta L = - \frac{\mu L}{43\,200}. \quad (150)$$

Cette formule montre que l'effet de l'allongement ou du raccourcissement du spiral est indépendant de la période, mais qu'il est inversement proportionnel à la longueur du spiral. Une modification ΔL de la longueur a d'autant plus d'effet que le spiral est plus court.

Calculons ΔL pour deux spiraux de longueurs différentes. Posons à cet effet $\mu = 1 \text{ mn} = 60 \text{ s}$, abstraction faite du signe. Pour $L = 300 \text{ mm}$:

$$\Delta L = \frac{60 \cdot 300}{43\,200} = 0,416 \text{ mm}.$$

Pour $L = 100 \text{ mm}$:

$$\Delta L = \frac{60 \cdot 100}{43\,200} = 0,139 \text{ mm}.$$

Influence des modifications des autres facteurs agissant sur la période. —

Pour obtenir une variation $\Delta\mu$ de la marche diurne d'une montre, on peut aussi agir sur le moment d'inertie du balancier. Si l'on pose dans (149) :

$$\Delta L = \Delta E = \Delta e = \Delta h = 0 ,$$

on a :

$$\Delta I = - \frac{\Delta\mu \cdot I}{43\,200} . \quad (151)$$

Par un raisonnement analogue, on établira les formules :

$$\Delta E = \frac{\Delta\mu \cdot E}{43\,200} , \quad (151\,a)$$

$$\Delta h = \frac{\Delta\mu \cdot h}{43\,200} , \quad (151\,b)$$

$$\Delta e = \frac{\Delta\mu \cdot e}{129\,600} . \quad (151\,c)$$

Les modifications de e sont trois fois plus efficaces que celles des autres facteurs.

Détermination expérimentale du moment élastique du spiral. — Pour mesurer le moment élastique du spiral, nous pouvons utiliser une méthode dynamique ou une méthode statique.

Méthode dynamique. — Reprenons l'appareil décrit pour déterminer le moment d'inertie d'un balancier. Le balancier permanent de cet appareil a le moment d'inertie I que nous savons mesurer.

Appelons C le moment élastique du spiral de l'appareil ; il est facilement calculable dès qu'est connue la période T des oscillations du balancier de moment d'inertie I accouplé à ce spiral :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C}} ,$$

d'où :

$$C = \frac{4\pi^2 I}{T^2} .$$

Le spiral à mesurer, monté sur une virole, est fixé sur le pivot du balancier ; son extrémité extérieure est attachée à un piton solidaire de l'appareil.

Mesurons la nouvelle période T_1 et appelons C_1 le moment inconnu du spiral à mesurer. Nous avons :

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C + C_1}},$$

d'où :

$$C + C_1 = \frac{4\pi^2 I}{T_1^2},$$

$$C_1 = \frac{4\pi^2 I}{T_1^2} - C = \frac{4\pi^2 I}{T_1^2} - \frac{4\pi^2 I}{T^2},$$

soit :

$$C_1 = 4\pi^2 I \left(\frac{1}{T_1^2} - \frac{1}{T^2} \right). \quad (152)$$

Méthode statique. — L'appareil, appelé « spiralmètre », construit par G.-A. Berner, se compose d'un arbre très mobile entre des coussinets; cet arbre porte un spiral de référence A (fig. 211) dont on connaît le moment élastique C_0 correspondant au point fixe B . A mi-hauteur de l'arbre, un disque fixe D porte une division en degrés, tandis que l'aiguille G solidaire de l'arbre se déplace devant ce disque gradué. Le spiral E dont on veut mesurer le moment élastique est placé sur l'extrémité légèrement conique de l'arbre; le point F détermine la longueur du spiral.

Si l'on fait tourner le spiral E de $+90^\circ$, puis de -90° , l'aiguille G est entraînée de l'angle α_1 puis de l'angle α_2 . Soit :

$$\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2},$$

où α désigne l'angle pour lequel l'équilibre s'établit.

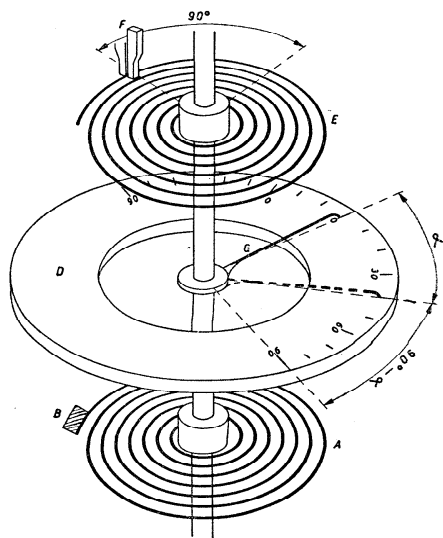


Fig. 211

Tandis que le spiral A est armé d'un angle α , le spiral E est armé de $\frac{\pi}{2} - \alpha$. L'équation d'équilibre est :

$$C_0 \alpha = C \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right),$$

d'où :

$$C = C_0 \frac{\alpha}{\frac{\pi}{2} - \alpha}. \quad (153)$$

Dans cette formule les angles sont exprimés en radians. Si l'on veut obtenir le résultat en degrés, on pose :

$$\alpha \text{ radians} = \beta \text{ degrés},$$

c'est-à-dire :

$$\alpha = \frac{\pi}{180} \beta.$$

On obtient une nouvelle formule :

$$C = C_0 \frac{\beta}{90 - \beta}, \quad (154)$$

dans laquelle l'angle β est exprimé en degrés.

Si β est grand, $90 - \beta$ devient petit et les mesures sont incertaines ; il faut choisir le spiral A de façon que son moment élastique C_0 ne soit pas trop petit par rapport à C . La courbe de la figure 212 montre l'allure de la fonction :

$$y = f(\beta) = \frac{\beta}{90 - \beta}.$$

La seconde méthode est beaucoup plus rapide, mais moins précise que la première. L'incertitude provient des résistances (frottements) qui rendent difficiles une mesure exacte de l'angle β . Ces résistances sont d'autant plus néfastes que le moment à mesurer est plus faible.

Dans la pratique, il s'agit de résoudre deux problèmes différents.

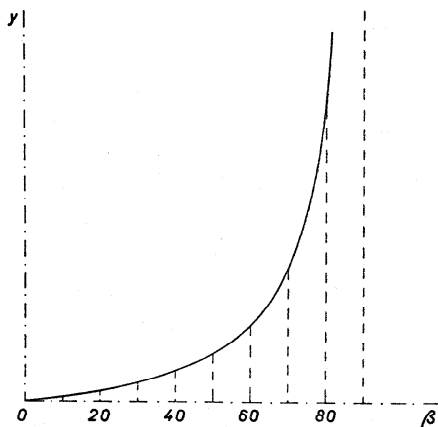


Fig. 212

Dans l'un, on se propose d'obtenir le moment élastique en fonction de la longueur ou plutôt du diamètre bien défini d'un spiral. Pour le résoudre on peut, si l'on a un appareil assez sensible, utiliser la méthode statique.

L'autre problème consiste à voir si un spiral convient à un balancier donné pour obtenir une certaine période T . Théoriquement, tout spiral assez long convient puisqu'il suffit de le raccourcir pour modifier à volonté son moment élastique. En réalité, le diamètre du spiral est une fonction de celui du balancier : un spiral trop petit n'est pas beau et la moindre retouche de raquette a une grande influence ; un spiral trop grand flotte et risque de toucher le bras du balancier, une roue du rouage ou les goupilles de la raquette. On admet généralement que le diamètre du spiral doit être à peu près égal au rayon extérieur du balancier mesuré sur les vis.

Pour voir si un spiral convient à un balancier donné, on place le balancier-spiral sur une machine à régler qui est composée d'un bâti portant, sur une table, une boîte cylindrique fermée par une plaque de verre et qui renferme un balancier-spiral étalon dont la période est celle qu'on désire obtenir. Le spiral à examiner est tenu en un point par une pince déplaçable horizontalement et verticalement au moyen de deux crémaillères (pl. IX, fig. 213) ; on peut ainsi déplacer le balancier-spiral à essayer jusqu'à ce que le pivot inférieur touche la plaque de verre exactement au-dessus du pivot supérieur du balancier-spiral étalon. On peut alors superposer avec précision les bras des deux balanciers. Un levier permet de mettre les deux balanciers en mouvement. Si les périodes sont égales, ils oscillent synchroniquement : ils restent en concordance de phase. Si non, il faut modifier la longueur du spiral à essayer jusqu'à ce que les balanciers oscillent en concordance pendant un certain temps. Le point où la pince tient le spiral quand la concordance est établie, est le « point de réglage » ou « point de comptage » qui doit, dans la montre, se trouver entre les goupilles de la raquette. On coupe le spiral en laissant, après le point de réglage, la longueur nécessaire pour attacher le spiral au piton. Si, à ce moment, le diamètre du spiral est à peu près égal au rayon extérieur du balancier, on peut considérer que le spiral est bon. S'il est trop petit, on refera l'essai avec un spiral plus fort, c'est-à-dire un spiral dont les dimensions e et h de la lame seront plus grandes. Si le spiral est trop grand, c'est un spiral plus faible qu'il faut essayer.

La machine à régler est utilisée par les poseuses de spiraux ; elle est aussi employée dans les fabriques de spiraux pour déterminer le numéro du spiral. On a une série de balanciers de référence. Le spiral de longueur fixée d'avance qui donne à l'un de ces balanciers une période déterminée (généralement 0,4 s) doit porter le numéro correspondant à ce balancier et à cette grandeur du spiral.

L'opération du « comptage » au moyen de la machine à régler est longue et délicate ; elle exige beaucoup d'habileté et d'attention, car il s'agit, somme toute, d'un premier réglage de la montre.

La manipulation est difficile parce qu'il faut non seulement constater la concordance, mais encore apprécier lequel des deux balanciers a la plus courte période. Or, le mouvement d'oscillation n'est entretenu ni pour le balancier de référence ni pour le balancier-spiral examiné.

La tendance moderne est de remplacer la machine à régler par un appareil permettant de travailler plus rapidement et avec moins de peine. Dans ces nouveaux appareils, le mouvement oscillatoire du spiral à examiner est entretenu ; le balancier-spiral étalon est remplacé par un oscillateur à quartz ou à diapason. La concordance entre les vibrations du spiral d'essai et de l'oscillateur de référence se lit sans peine au moyen d'un stroboscope.

La numérotation des spiraux. — Il n'y a pas bien longtemps, les spiraux étaient numérotés de façon arbitraire, les uns portant un numéro, les autres en ayant deux. Pour un certain genre de spiraux, les numéros allaient en augmentant avec le moment élastique du spiral ; pour d'autres genres, plus le spiral était fort, plus le numéro était petit.

Au Congrès international de chronométrie tenu à Paris en 1900, Ch.-E. Guillaume proposa de donner au spiral un numéro N_s égal à la racine carrée de son moment élastique :

$$N_s = \sqrt{C}.$$

Pour le balancier, on choisirait un numéro N_b tel que :

$$N_b = \pi \sqrt{I},$$

C et I étant exprimés en unités C.G.S. La période serait :

$$T = 2 \frac{N_b}{N_s}.$$

On sait que la valeur de C dépend de la longueur du spiral. Si le numéro du spiral ne dépend que de son moment élastique on peut, en modifiant la longueur du spiral, modifier également le numéro. D'autre part des spiraux différents peuvent être amenés à avoir le même moment élastique, c'est-à-dire le même numéro.

Pour rendre la proposition de Guillaume pratique, A. Donat a élaboré un système rationnel de numérotation qui est de plus en plus utilisé.

Puisque le moment élastique d'un spiral est fonction de sa longueur L , on choisit, pour comparer les moments de différents spiraux, une longueur ou plutôt un diamètre de référence.

La longueur d'un spiral est donnée par (141) :

$$L = \pi \frac{r_2^2 - r_1^2}{p},$$

ou, en fonction des diamètres d_1 et d_2 , par :

$$L = \frac{\pi n (d_1 + d_2)}{2}. \quad (155)$$

Cette formule est approximative ; elle exprime la longueur du spiral comme s'il était constitué par n spires circulaires de diamètre égal au diamètre moyen $\frac{d_1 + d_2}{2}$. On peut aussi exprimer L en fonction du pas p et des diamètres ; on a :

$$L = \pi \frac{d_2^2 - d_1^2}{4p}.$$

Pour un autre spiral de diamètres d'_1 et d'_2 et dont la lame a les mêmes dimensions e et h ainsi que le même module E , on a :

$$L' = \pi \frac{d_2'^2 - d_1'^2}{4p},$$

par suite :

$$\frac{L}{L'} = \frac{d_2^2 - d_1^2}{d_2'^2 - d_1'^2}. \quad (156)$$

Les moments de ces spiraux pour les longueurs L et L' sont :

$$C = \frac{Ee^3h}{12L}, \quad C' = \frac{Ee^3h}{12L'},$$

d'où :

$$\frac{C}{C'} = \frac{L'}{L} = \frac{d_2'^2 - d_1'^2}{d_2^2 - d_1^2}. \quad (157)$$

Si l'origine du spiral est au centre, on peut poser :

$$d_1 = d'_1 = 0,$$

et la formule (157) devient :

$$\frac{C}{C'} = \left(\frac{d_2'}{d_2} \right)^2. \quad (158)$$

Les valeurs de d_1 et d'_1 sont généralement petites; on ne commet pas une grande erreur en utilisant la formule (158) dans tous les cas.

Soit, par exemple :

$$d_1 = 0,3 d_2, \quad d'_1 = 0,3 d'_2.$$

La formule (157) donne :

$$\frac{C}{C'} = \frac{d_2'^2 - 0,09 d_2'^2}{d_2^2 - 0,09 d_2^2}.$$

Quand il s'agit de comparer les moments du même spiral à deux états différents, on ne peut pas dire que le rapport $\frac{d_1}{d_2}$ reste constant, puisqu'on ne modifie généralement que le diamètre extérieur. Dans ce cas, on pourrait avoir :

$$d_1 = 0,25 d_2, \quad d'_1 = 0,33 d'_2.$$

Le rapport des moments élastiques serait alors :

$$\frac{C}{C'} = \frac{d_2'^2 - 0,109 d_2'^2}{d_2^2 - 0,0625 d_2^2} = 0,95 \left(\frac{d'_2}{d_2} \right)^2.$$

En appliquant la formule (158), on commet dans ce cas, une erreur de 5%; il faut toutefois relever que les rapports admis entre les diamètres sont des extrêmes.

L'équation (158) donne :

$$C d_2^2 = C' d_2'^2.$$

On peut poser :

$$C d_2^2 = C' d_2'^2 = K; \quad (159)$$

K est appelé la *caractéristique* du spiral; c'est le produit du moment élastique par le carré du diamètre quand l'origine du spiral est au centre. On peut aussi dire que, dans le système C.G.S., la caractéristique d'un spiral est égale à la valeur du moment élastique de ce spiral quand le diamètre est égal à 1 cm; c'est aussi la valeur du couple du spiral pour un diamètre égal à 1 cm et un angle d'armage de 1 rad.

La caractéristique K a pour dimensions ML^4T^{-2} ; elle s'exprime, dans le système C.G.S., en dynes-cm³/rad.

Comme numéro du spiral, on prendra la valeur de sa caractéristique :

$$N_s = K.$$

Pour un spiral qui ne commence pas au centre, on aura :

$$C(d_2^2 - d_1^2) = C'(d_2'^2 - d_1'^2) = K.$$

Si, pour un balancier donné, il faut un spiral dont le moment élastique soit égal à 75 dynes-cm/rad lorsque le diamètre extérieur est 0,92 cm et le diamètre intérieur 0,23 cm, on trouve la caractéristique :

$$K = 75(0,92^2 - 0,23^2) = 59,5.$$

Il faut employer un spiral dont le numéro est 59,5. Or l'auteur de ce système de numérotation a établi une table des numéros. Le n° 59,5 n'existe pas dans cette table ; on choisit le numéro le plus voisin, c'est-à-dire 60.

Pour calculer le numéro de ce spiral on négligera le diamètre intérieur :

$$N_s = K = Cd_2^2 = 75 \cdot 0,92^2 = 63,48.$$

Cette valeur est manifestement trop grande ; on choisira le numéro immédiatement au-dessous de 63,48, c'est-à-dire 60.

Le diamètre d_2 correspondant au n° 60 est :

$$K = C(d_2^2 - d_1^2)$$

ou

$$d_2 = \sqrt{d_1^2 + \frac{K}{C}} = \sqrt{0,23^2 + \frac{60}{75}} = 0,9235 \text{ cm}.$$

Généralement, on ne connaît pas le moment élastique du spiral que l'on veut accoupler à un balancier ; on sait seulement que la période doit être égale à T . Or :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C}}.$$

C'est donc le rapport $\frac{I}{C}$ qui est connu.

Pour trouver le numéro du spiral à utiliser, on prend un spiral quelconque de numéro connu N'_s se rapprochant de celui que l'on cherche. Sur la machine à régler, on détermine le diamètre extérieur d'_2 qui donne la période T quand le diamètre intérieur est égal à d'_1 :

$$N'_s = K' = C'(d'^2_2 - d'^2_1).$$

On s'arrange de façon que :

$$d'_1 = d_1.$$

Puisque pour les deux spiraux, associés au même balancier, on obtient la même période, il faut que :

$$C = C',$$

d'où :

$$\frac{K}{K'} = \frac{d_2^2 - d_1^2}{d_2'^2 - d_1'^2}$$

ou

$$K = K' \frac{d_2^2 - d_1^2}{d_2'^2 - d_1'^2}. \quad (160)$$

Pour $d_1 = d_1' = 0$, on trouve la formule simplifiée :

$$K = K' \left(\frac{d_2}{d_2'} \right)^2. \quad (161)$$

A supposer, par exemple, que pour un certain balancier, on désire un diamètre extérieur du spiral de 9 mm ; avec un spiral n° 25, on obtient un diamètre extérieur égal à 8 mm ; le numéro cherché sera :

$$K = 25 \left(\frac{0,9}{0,8} \right)^2 = 31,64.$$

En appliquant la formule (160) et en supposant $d_1 = d_1' = 0,2$ cm, on aurait trouvé :

$$K = 25 \frac{0,9^2 - 0,2^2}{0,8^2 - 0,2^2} = 32,08.$$

Que l'on calcule d'une manière ou de l'autre, c'est le spiral n° 32 qui convient.

La numérotation Donat ne s'applique qu'aux spiraux plats.

La marche instantanée d'une montre. — La marche diurne μ d'une montre est la différence des états de la montre à 24 heures d'intervalle. Sa détermination exige deux observations et une durée d'un jour. C'est une opération lente que l'on fait encore dans les observatoires chronométriques et dans les Bureaux officiels de contrôle de la marche des montres.

Une excellente marche diurne ($\mu \sim 0$) n'est pas incompatible avec une marche irrégulière. Pendant la journée, la période de l'oscillateur n'est pas constante ; à un moment donné, elle peut être plus longue ou plus courte que la période moyenne correspondant à une marche diurne nulle. Il peut se produire des compensations et l'on peut imaginer une montre qui pendant les 12 premières heures avancerait de 10 s, puis pendant les 12 heures suivantes retarderait de la même quantité ; la marche diurne serait nulle, puisque après 24 heures la montre aurait le même état qu'au commencement.

Il devient de jour en jour plus important de se rendre compte de la régularité de la marche. Pour cela, il faudrait connaître la variation de la période au long du jour. Or, cette variation est extrêmement petite, partant difficilement mesurable.

En effet, si la marche diurne μ est égale à 1 mn = 60 s — ce qui est énorme pour une bonne montre — la période moyenne varie, d'après (147), de :

$$\Delta T = \frac{\mu T}{86\,400} = \frac{60 \cdot 0,4}{86\,400} = 0,000\,28\text{ s}$$

pour une montre dont le balancier a une fréquence de 2,5, c'est-à-dire qui fait 18 000 alternances à l'heure.

On ne peut pas mesurer ΔT par une observation qui ne durerait que T secondes ; il existe cependant des méthodes permettant de déterminer ΔT de façon assez précise par des observations qui durent un certain temps (quelques minutes) toujours beaucoup plus court que les 24 heures exigées par la détermination habituelle de la marche diurne.

Après avoir mesuré ΔT qui est la valeur moyenne de la variation de la période pendant la durée de l'observation — pendant 5 mn par exemple — on peut calculer la marche diurne d'après (146) :

$$\mu = - \frac{86\,400\,\Delta T}{T}.$$

μ est la marche diurne qu'on obtiendrait si, tout au long des 24 heures, ΔT restait constant. Cette marche est appelée la *marche momentanée de la montre pendant la durée de l'observation* ; on la désigne généralement par μ_m ; c'est une marche diurne virtuelle qui serait la marche diurne réelle si ΔT était constant pendant tout le jour considéré.

La marche momentanée d'une montre tout au long du jour pendant lequel la montre n'est pas remontée et reste dans les mêmes conditions de position et de température permet de déterminer le *défait d'isochronisme*.

En portant la marche momentanée en fonction du temps écoulé depuis le dernier remontage, on obtient une courbe qui peut avoir l'allure de OA dans la figure 214.

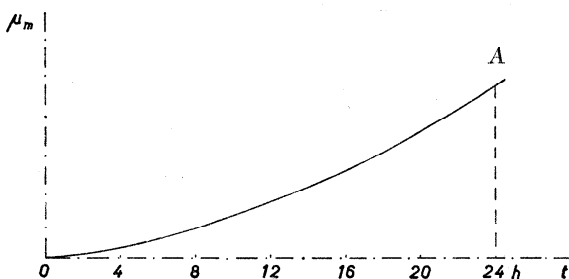


Fig. 214

Une montre parfaite aurait à tout moment :

$$\mu_m = 0;$$

pour cette montre, la courbe OA se confondrait avec l'axe Ot .

La connaissance du défaut d'isochronisme d'une montre est importante quand il s'agit de faire des observations précises au cours d'une journée ; elle permet d'évaluer une qualité très importante de la montre. Cette connaissance deviendra de plus en plus indispensable dans la chronométrie de précision.

Elle n'est pas sans valeur dans l'horlogerie courante. Le fabricant ou le rhabilleur qui livrent une montre à un client savent que la marche de cette montre variera avec le temps. Ils s'arrangent de façon que la marche ait tendance à s'améliorer avec le temps. Le défaut d'isochronisme indique si la montre avance ou retarde lorsque l'amplitude du balancier diminue. Or, les variations de la marche d'une montre avec le temps proviennent surtout de la diminution de l'amplitude des oscillations du balancier provoquée par l'épaississement de l'huile et par la fatigue du ressort moteur. Si le fabricant ou le rhabilleur constatent que la montre avance « aux petits arcs » comme disent les horlogers, ils régleront la montre sur le retard. Ainsi, avec le temps, le retard diminuera ; il pourra se changer en avance qui finira peut-être par devenir trop forte, mais le régleur aura retardé le moment où l'avance devient intolérable.

La méthode des coïncidences. — La méthode des coïncidences permet la comparaison de deux grandeurs — longueurs, angles, durées, etc. — de façon plus précise que les mesures directes.

Elle est connue de chacun qui l'applique dans le vernier. Soit deux longueurs AB et CD peu différentes l'une de l'autre (fig. 215) dont nous voulons établir le rapport. Considérons deux droites parallèles et voisines et portons sur l'une des longueurs égales à AB , sur l'autre des longueurs égales à CD , à partir de deux points E et F pris vis-à-vis l'un de l'autre. Nous obtenons sur la

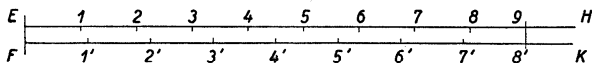


Fig. 215

droite EH les points 1, 2, 3, ... et sur la droite FK les points 1', 2', 3', ... Les points 1 et 1', 2 et 2', 3 et 3', ... ne sont pas vis-à-vis l'un de l'autre ; la distance qui sépare deux points correspondants augmente constamment et finalement deux points non correspondants

— dans la figure 215 les points 9 et 8' — sont vis-à-vis l'un de l'autre. Nous voyons que :

$$\overline{E9} = \overline{F8'},$$

donc :

$$9\overline{AB} = 8\overline{CD}$$

et

$$\overline{CD} = \frac{9}{8}\overline{AB}.$$

Dans le cas que nous avons envisagé, la coïncidence a été possible parce que l'excédent de \overline{CD} sur \overline{AB} est contenu un nombre entier de fois dans \overline{AB} .

Si (fig. 216) nous avons voulu déterminer quelle fraction de \overline{AB} représente le segment \overline{AC} , nous nous serions servis d'un vernier, c'est-

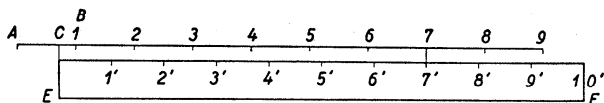


Fig. 216

à-dire d'une règle EF portant 10 divisions, dont la longueur est égale à 9 fois \overline{AB} . Une division de la règle vaut $\frac{9}{10}\overline{AB}$. Nous aurions obtenu la relation :

$$\overline{AC} = \frac{7}{10}\overline{AB},$$

puisque ce sont les traits 7 et 7' qui coïncident.

Si \overline{AB} vaut 1 mm, le vernier permet de mesurer à 0,1 mm près. Il fournit une mesure à 0,01 mm près si 100 divisions de la règle ont la même longueur que 99 fois \overline{AB} . Mais il n'est pas possible d'augmenter la précision des mesures à l'infini, car les traits des deux règles ont une certaine largeur de sorte que, si la différence de longueur entre les unités portées sur les règles est très faible, plusieurs traits semblent être, deux à deux, en coïncidence.

Application de la méthode des coïncidences à l'horlogerie. — Pour déterminer le rapport des durées — très voisines l'une de l'autre — des battements (alternances) de deux horloges, par exemple, nous observons les coïncidences des battements.

Appelons t_1 et t_2 les durées d'alternance des deux horloges ; les coïncidences ont lieu après m alternances de la première horloge. L'autre a fait dans le même temps $m + 1$ ou $m - 1$ alternances et nous avons :

$$mt_1 = (m \pm 1)t_2$$

ou

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{m \pm 1}{m} = 1 \pm \frac{1}{m}, \quad (162)$$

équation qui peut aussi s'écrire :

$$\pm m = \frac{t_2}{t_1 - t_2}. \quad (163)$$

Si l'horloge n° 1 est une horloge à secondes de temps moyen, bien réglée :

$$t_1 = 1,$$

et si les coïncidences ont lieu toutes les m secondes, nous avons :

$$t_2 = \frac{m}{m \pm 1}.$$

Supposons que la seconde horloge avance par rapport à la première, c'est-à-dire que $t_2 < t_1$. L'incertitude au sujet du double signe disparaît ; nous avons :

$$t_2 = t_1 \frac{m}{m + 1}$$

et, pour $t_1 = 1$ s :

$$t_2 = \frac{m}{m + 1}.$$

D'après (163), les coïncidences sont d'autant plus fréquentes que les grandeurs à mesurer diffèrent plus l'une de l'autre et, pour $t_1 = t_2$, $m = \infty$.

Quand deux phénomènes périodiques ont la même période, s'ils sont en coïncidence, ils y seront constamment ; s'ils n'y sont pas, ils n'y seront jamais.

Même si t_1 et t_2 sont différents, il n'est pas dit que les coïncidences se produisent nécessairement. Pour que les coïncidences se produisent, il faut que m soit un nombre entier ; or, d'après (163), m est entier quand t_2 est un multiple entier de $t_1 - t_2$.

En pratique cependant, lorsque les périodes diffèrent peu l'une de l'autre, les coïncidences ont toujours lieu, car l'œil ou l'oreille de l'observateur ne sont pas assez sensibles pour percevoir séparément deux phénomènes très voisins l'un de l'autre.

Le nombre m n'est pas toujours facile à déterminer. En réalité, il ne s'agit pas de compter les battements, mais de mesurer le temps Δ qui s'écoule entre deux coïncidences :

$$\Delta = t_1 m = t_2 (m \pm 1) .$$

Si $t_2 < t_1$:

$$\Delta = t_1 m = t_2 (m + 1) .$$

Avant de commencer les observations, il faut voir si la seconde horloge avance sur la première, c'est-à-dire si $t_2 < t_1$. Cette opération se fait rapidement par l'observation directe.

Si les durées d'alternance t_1 et t_2 sont très rapprochées l'une de l'autre, les pendules paraîtront être en coïncidence pendant un certain nombre de battements. Il y aura une incertitude quant à la valeur de Δ (ou de m). Pour augmenter la précision, déterminons la durée Δ entre deux coïncidences successives en observant le temps qui sépare la première coïncidence de la $(p + 1)^{\text{ème}}$. Prenons la formule :

$$t_2 = t_1 \frac{m}{m + 1} .$$

Si, en mesurant m , nous nous trompons d'une unité en moins, nous obtiendrons la valeur :

$$t'_2 = t_1 \frac{m - 1}{(m - 1) + 1} = t_1 \frac{m - 1}{m} ;$$

Nous aurons commis une erreur de :

$$t'_2 - t_2 = t_1 \left[\frac{m - 1}{m} - \frac{m}{m + 1} \right] = t_1 \frac{-1}{m(m + 1)} . \quad (164)$$

L'erreur est d'autant plus petite que m est plus grand ; elle diminue à peu près inversement au carré de m . Pour $m = 10$:

$$\frac{1}{m(m + 1)} = \frac{1}{110} ,$$

pour $m = 100$:

$$\frac{1}{m(m + 1)} = \frac{1}{10\,100} ,$$

pour $m = 1000$:

$$\frac{1}{m(m + 1)} = \frac{1}{1\,001\,000} .$$

Observons la durée qui sépare la première coïncidence de la $(p + 1)^{\text{ème}}$. Pendant ce temps, la première horloge a fait pm alternances et la seconde en a fait $p(m + 1)$, d'où :

$$pmt_1 = p(m + 1)t_2,$$

ce qui donne, comme précédemment :

$$t_2 = t_1 \frac{m}{m + 1}.$$

Si, à la $(p + 1)^{\text{ème}}$ coïncidence, nous nous trompons d'une unité en moins dans la valeur de m , nous obtiendrons une nouvelle valeur de t_2 qui sera :

$$t'_2 = t_1 \frac{pm - 1}{p(m + 1) - 1}.$$

L'erreur vaudra

$$t'_2 - t_2 = t_1 \frac{-1}{(m + 1)[p(m + 1) - 1]}. \quad (165)$$

En comparant les formules (164) et (165), nous voyons que la valeur de l'erreur donnée par (165) est plus petite que celle qui découle de (164), car :

$$p(m + 1) - 1 \geq m.$$

L'erreur commise par une mauvaise appréciation de la $(p + 1)^{\text{ème}}$ coïncidence est plus faible que celle qui résulte de la même mauvaise appréciation de la deuxième coïncidence.

La marche diurne d'une montre ou d'une horloge en fonction de l'intervalle entre deux coïncidences successives. — En 24 heures, une montre bien réglée exécute :

$$N_0 = 86\,400\,n$$

alternances, si n désigne le nombre d'alternances que doit faire le balancier de la montre pour que l'aiguille des secondes avance d'une seconde. Si la montre n'est pas bien réglée, elle fera N_1 alternances en 24 heures. La marche diurne μ est le temps que devrait employer le balancier pour faire $N_1 - N_0$ alternances :

$$\mu = \frac{N_1 - N_0}{n}$$

secondes de temps moyen. Nous supposons que l'une des deux horloges est exactement réglée sur le temps moyen.

Désignons par n_1, t_1, μ_1 le nombre d'alternances par seconde, la durée d'alternance et la marche diurne de l'horloge bien réglée, par n_2, t_2, μ_2 les grandeurs correspondantes de la deuxième horloge.

Il se produit une coïncidence toutes les Δ secondes de temps moyen ; pendant ce temps, la seconde horloge (ou montre) a fait une alternance en plus ou en moins. Pendant 24 heures, il se produit :

$$\frac{86\,400}{\Delta}$$

coïncidences. C'est autant d'alternances que la seconde horloge a fait en trop ou en trop peu. Pour avoir la marche μ_2 de la deuxième horloge (puisque la première est bien réglée), il suffit de multiplier le nombre des coïncidences par t_2 . Donc :

$$\mu_2 = \frac{86\,400}{\Delta} t_2 = \frac{86\,400}{\Delta n_2} = \frac{86\,400}{m+1}. \quad (166)$$

La durée Δ doit être lue sur le chronomètre ou l'horloge bien réglée.

Précision de la méthode. — Avec quelle précision faut-il mesurer Δ de façon que μ_2 soit exacte à ε secondes près ?

Différentions l'équation (166) :

$$d\mu_2 = - \frac{86\,400}{(m+1)^2} dm$$

ou

$$dm = - \frac{d\mu_2(m+1)^2}{86\,400} = - \frac{\varepsilon(m+1)^2}{86\,400}.$$

Faisons abstraction du signe puisqu'il s'agit de valeurs absolues. L'erreur dm qui engendre une erreur ε de la marche diurne est proportionnelle au carré du nombre de battements plus un, entre deux coïncidences successives.

Pour avoir la marche diurne à 0,1 s près, il faut que m soit déterminé à 0,0264 unité près si $m = 150$; il faut mesurer Δ sur 38 coïncidences au moins.

Lorsque nous comparons la marche d'une montre qui fait n alternances pendant que son aiguille des secondes avance d'une seconde à une horloge (ou à un chronomètre) très bien réglée sur le temps moyen,

nous déterminons l'intervalle Δ qui sépare deux coïncidences successives. En un jour, la montre aura battu :

$$\frac{86\,400}{\Delta} \text{ alternances}$$

en trop ou en trop peu. Mais, pour effectuer ce nombre d'alternances, il faut un nombre de secondes égal à la marche diurne de la montre. Donc :

$$\mu = \frac{86\,400}{\Delta} \frac{1}{n}, \quad (167)$$

d'où :

$$d\mu = - \frac{86\,400}{n} \frac{d\Delta}{\Delta^2}.$$

En posant $d\mu = \varepsilon$, il viendra :

$$d\Delta = - \frac{\varepsilon n \Delta^2}{86\,400}.$$

Si $\varepsilon = 0,1 \text{ s}$, $n = 5$, et en admettant que les coïncidences aient lieu toutes les minutes :

$$d\Delta = \frac{0,1 \cdot 5 \cdot 60^2}{86\,400} = 0,021 \text{ s}.$$

Puisque $d\Delta$ est proportionnel à Δ^2 , il importe que Δ soit assez grand, mais ne dépasse pas une certaine limite à partir de laquelle la méthode serait peu pratique. Nous verrons plus loin le moyen d'y parvenir.

Le réglage des montres par la méthode des coïncidences. — La formule (167) indique que, si la marche diurne de la montre est petite, l'intervalle Δ entre deux coïncidences successives est grand dès que l'on utilise une horloge ou un chronomètre bien réglé comme instrument de comparaison. Pour $\mu = 10 \text{ s}$ et $n = 5$:

$$\Delta = 1728 \text{ s} = 28 \text{ m } 48 \text{ s},$$

pour $\mu = 20 \text{ s}$ et $n = 5$:

$$\Delta = 864 \text{ s} = 14 \text{ m } 24 \text{ s}.$$

Ces grands intervalles rendent la méthode inapplicable dans les fabriques ou dans les ateliers.

On peut remédier à cet inconvénient en dérégplant l'horloge (ou le chronomètre) de référence de façon assez sensible pour que les coïncidences soient assez rapprochées quand la marche diurne est égale à zéro.

On déréglera par exemple le chronomètre de référence de façon que sa marche soit un retard de x secondes ; il fera :

$$\frac{86\,400 - x}{n_1}$$

alternances en 86 400 s de temps moyen. Si l'intervalle entre deux coïncidences successives est Δ secondes du chronomètre dérégulé, la marche de la montre par rapport à ce chronomètre sera :

$$\frac{86\,400 - x}{n_2 \Delta} = \mu_2 - \mu_1$$

ou

$$\mu_2 = \frac{86\,400 - x}{n_2 \Delta} + \mu_1 = \frac{86\,400 - x}{n_2 \Delta} - x, \quad (168)$$

puisque $x = -\mu_1$, car il s'agit d'un retard.

Rien n'empêche de choisir x de façon que, pour une montre bien réglée ($\mu_2 = 0$), l'intervalle Δ ne soit pas trop grand. En admettant les conditions :

$$\Delta = 60 \text{ s}, \quad n_2 = 5, \quad \mu_2 = 0,$$

on tire de (168) :

$$0 = \frac{86\,400 - x}{60 \cdot 5} - x,$$

soit :

$$x = 287,04 \text{ s} = 4 \text{ m } 47,04 \text{ s}$$

de temps moyen. C'est le retard que doit avoir le chronomètre de référence en 24 heures pour que les coïncidences aient lieu toutes les minutes si la montre dont on détermine la marche diurne est très bien réglée.

La formule (168) permet de calculer la marche μ_2 de la montre lorsque les coïncidences se font toutes les Δ secondes puisque l'on connaît x . Ainsi pour $\Delta = 62 \text{ s}$, on trouve :

$$\mu_2 = \frac{86\,400 - 287,04}{62 \cdot 5} - 287,04 = -9,26 \text{ s}$$

de temps moyen. Dans notre cas particulier, la formule qui donne μ_2 en fonction de Δ devient :

$$\mu_2 = f(\Delta) = \frac{17\,222,59}{\Delta} - 287,04.$$

On peut calculer une fois pour toutes les valeurs de μ_2 correspondant à différentes valeurs de Δ ; on établira la table suivante :

Δ	μ_2
56 s	+ 20,5 s
57	+ 15,11
58	+ 9,90
59	+ 4,86
60	+ 0
61	- 4,70
62	- 9,26
63	- 13,67
64	- 17,94

Comme on peut déterminer Δ à une fraction de seconde près, on aura besoin d'interpoler. Une courbe représentant μ_2 en fonction de Δ peut rendre service en bien des cas (fig. 217).

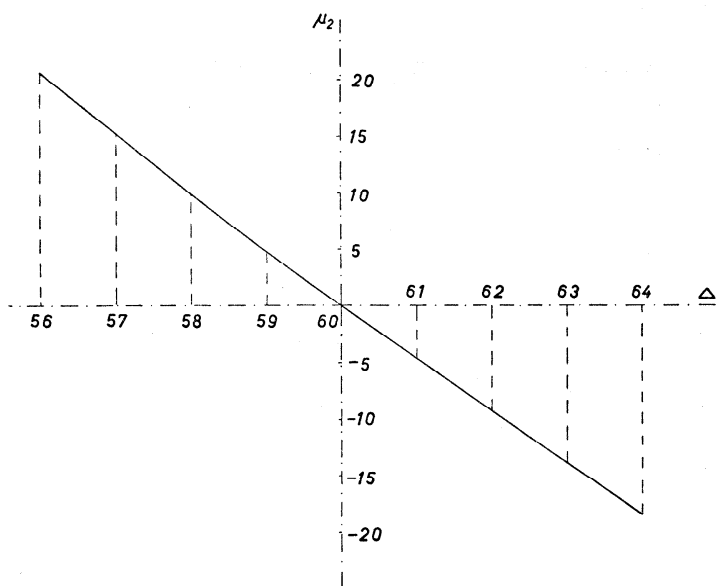


Fig. 217

Réalisation des coïncidences acoustiques. — Les deux montres à comparer sont placées sur une table; elles sont recouvertes chacune par un

entonnoir de verre dont les tubes sont reliés par des tuyaux en caoutchouc à un Y en verre dont la 3^e branche va à l'oreille de l'observateur par un tuyau en caoutchouc. L'un des tuyaux aboutissant à l'un des entonnoirs est muni d'une pince à vis permettant de l'étrangler plus ou moins de façon à égaliser l'intensité des sons des deux montres.

On observe les coïncidences des battements et on détermine l'intervalle Δ entre deux coïncidences successives, puis on calcule l'intervalle entre la 1^{re} et la 11^e coïncidence; on obtient ainsi 10Δ . On peut augmenter la précision en calculant 50Δ ou davantage.

Au commencement du réglage, l'observation d'un intervalle Δ suffit pour indiquer l'ordre de grandeur de μ_2 et son signe, ce qui permet de faire une première retouche. Au fur et à mesure que la marche se rapproche de zéro, il faut connaître Δ avec plus de précision.

Réalisation des coïncidences optiques. — Proposons-nous de déterminer la marche d'un pendule à seconde. Il s'agit de mesurer l'intervalle entre deux coïncidences successives du pendule à étudier avec un pendule à seconde bien réglé. Plaçons les pendules l'un devant l'autre et observons-les à travers une lunette dont le fil vertical du réticule coïncide avec la position de l'axe des deux pendules au repos. Mettons les pendules en mouvement et observons les moments où les deux axes se confondent avec le fil du réticule, c'est-à-dire les moments où les deux pendules passent en même temps par la position d'équilibre. Nous déterminerons Δ avec une précision d'autant plus grande que nous observerons un plus grand nombre d'intervalles.

Appliquons la formule (167) dans laquelle nous posons $n = 1$. Nous avons :

$$\mu = \frac{86\,400}{\Delta}.$$

Pour $\Delta = 100$ s, la marche diurne μ sera :

$$\mu = 864 \text{ s} = 14 \text{ m } 24 \text{ s}.$$

Le pendule fait $86\,400 - 864 = 85\,536$ alternances par jour, s'il retarde sur le pendule de référence. La durée d'alternance est :

$$t = \frac{86\,400}{85\,536} = 1,0101 \text{ s}$$

et la période :

$$T = 2t = 2,0202 \text{ s}.$$

Pour appliquer cette méthode à une montre, nous éclairerons le balancier et observerons les éclairs jetés par les vis fixées à la serge à chaque

alternance, c'est-à-dire à chaque cinquième de seconde pour une montre bien réglée qui fait 18 000 alternances à l'heure. Cet éclair se produit à l'instant où le balancier, arrivé au bout de sa course, est arrêté. Eclairons le balancier au moyen d'une étincelle qui se produit exactement chaque seconde. A certains moments, l'éclat du balancier sera net ; il en est ainsi quand le balancier sera en fin de course. Puis l'image deviendra floue et, au bout d'un temps Δ , elle sera de nouveau nette.

La marche diurne de la montre est donnée par (167) :

$$\mu = \frac{86\,400}{n\Delta}.$$

Le signe de μ est établi par une observation sommaire qui indique si la montre avance ou retarde par rapport à la marche donnée par les éclairs lumineux.

Nous avons expliqué comment diminuer le temps d'observation en dérégulant la succession des éclairs qui, au lieu d'être au nombre de 86 400 en 24 heures, pourraient être, par exemple, 86 400 — 287,04.

Les éclairs peuvent être produits par un contact fermé à chaque passage du pendule d'une horloge bien réglée.

L'avantage de cette méthode optique est de permettre la comparaison de la marche de la montre avec celle d'une horloge très précise : la marche d'une telle horloge est plus régulière que celle d'un chronomètre, si bien réglé soit-il.

Les machines à déterminer la marche momentanée des montres. — On peut, aujourd'hui, déterminer la marche momentanée d'une montre au moyen d'un appareil (pl. X, fig. 218) composé d'un étalon de temps, constitué généralement par un cristal de quartz, d'un dispositif enregistreur ou simplement indicateur et d'un microphone destiné à recueillir les bruits de la montre (fig. 219).

Ceux-ci sont transformés, à travers le microphone, en impulsions électriques qui vont à l'enregistreur où, amplifiées, elles actionnent un étrier qui les imprime sur une bande de papier.

La bande de papier traverse la machine à une vitesse très constante. L'étrier frappe sur un ruban encreur qui se trouve entre l'étrier d'une part et la bande de papier d'autre part ; cette dernière passe à proximité d'un tambour animé d'un mouvement de rotation très rapide (plusieurs tours à la seconde) et très régulier (pl. X, fig. 219 a). Ce tambour est muni d'un certain nombre d'arêtes hélicoïdales, dont la pente joue un rôle important ; sa vitesse de rotation est constante, car le moteur synchrone qui engendre la rotation est contrôlé par l'oscillateur à quartz.

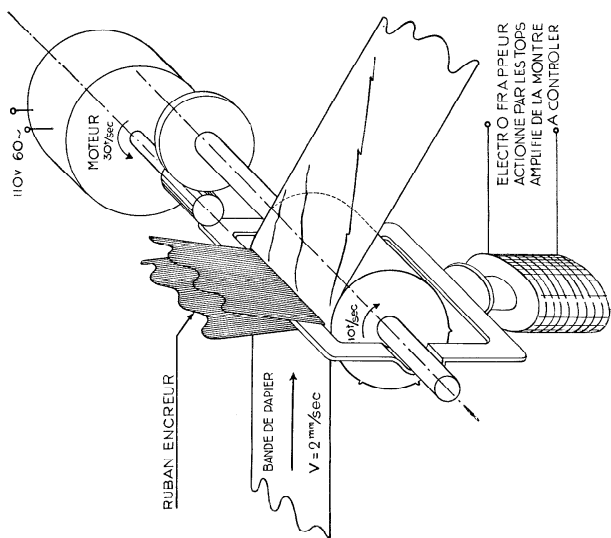


Fig. 219 a

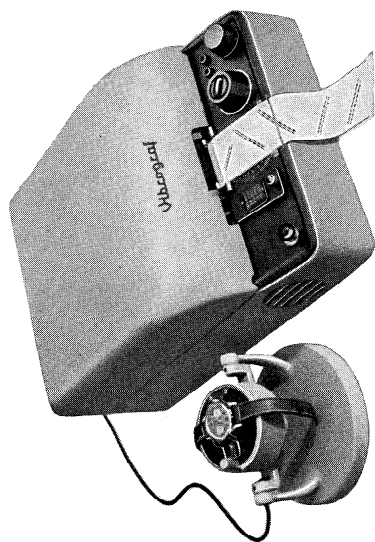


Fig. 218

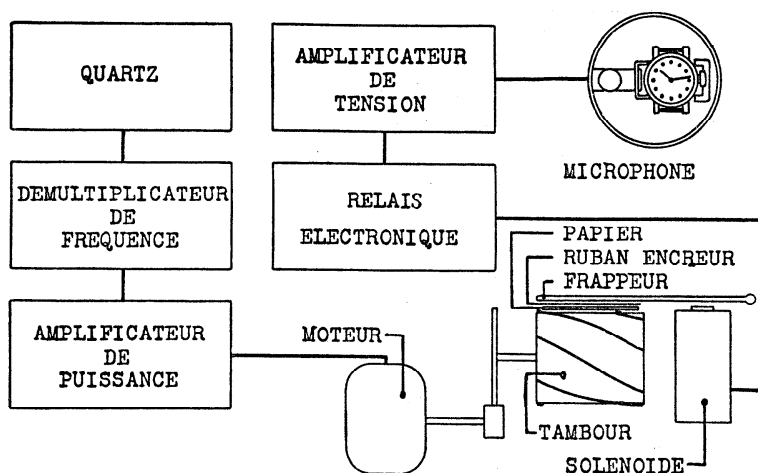


Fig. 219

L'étrier se meut de haut en bas à chaque tic-tac, c'est-à-dire à chaque alternance ; chaque fois il presse le ruban encreur et la bande de papier qui se déroule devant lui contre le tambour en rotation. Le papier rencontre une des arêtes du tambour et le point de rencontre est imprimé sur le papier grâce au ruban encreur. Toutes les alternances de la montre sont enregistrées en une série de points formant une ligne discontinue (fig. 220 a, b, c et d), qui serait une droite si les tops de la montre se suivaient à intervalles constants.

Supposons que le tambour exécute 10 tours à la seconde : pendant

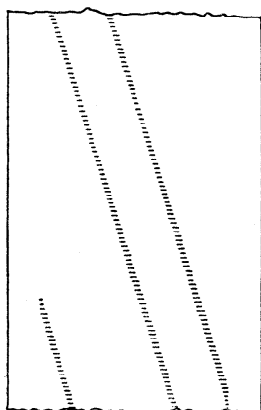


Fig. 220 a

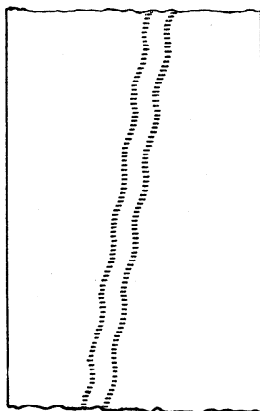


Fig. 220 b

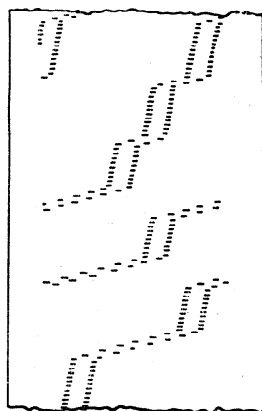


Fig. 220 c

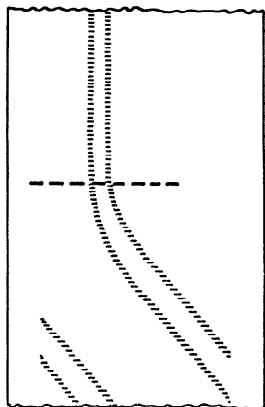


Fig. 220 d

une alternance de durée $t = 0,2$ s, le tambour fait 2 tours.

Si la montre est bien réglée, les coups de l'étrier se produisent toujours exactement après 2 tours du tambour; l'impression sera toujours provoquée par le contact du papier avec le même point d'une des arêtes du tambour. Mais pendant que le tambour fait deux tours, le papier avance d'une certaine quantité de sorte que, sur le papier, les points ne se superposent pas: ils forment une droite parallèle au bord de la bande.

Mais si la durée d'alternance, au lieu d'être égale à t , vaut $t + \varepsilon$ (la montre retarde), entre deux coups successifs de l'étrier, le tambour aura fait un peu plus de deux tours. Au 2^e coup, le papier pressé par l'étrier ne rencontrera pas le même point de l'arête qu'au 1^{er}: les points formeront — si la durée d'alternance est constante — une droite oblique par rapport au bord du papier; l'inclinaison de cette droite dépend de la valeur ε , donc de la marche momentanée de la montre.

Soit (fig. 221) AB la ligne inscrite sur la bande de papier. Tirons BC perpendiculaire à AC et posons $AC = z$, $BC = h$. Nous avons:

$$h = z \operatorname{tg} \beta;$$

z est proportionnel au temps écoulé entre la frappe en A et la frappe en B . Supposons que ce temps est 1 seconde. Alors:

$$z = v,$$

si v désigne la vitesse de déroulement de la bande. Donc:

$$h = v \operatorname{tg} \beta.$$

D'autre part, les points formant la droite AB sont les points d'une hélice du tambour de rayon r . Le développement de l'hélice est une droite oblique par rapport à la droite qui correspond au bord du tambour. L'hélice est caractérisée par l'angle α de la droite ou par son pas p (fig. 222); les deux grandeurs α et p sont reliées par l'équation:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{p}{2\pi r}.$$

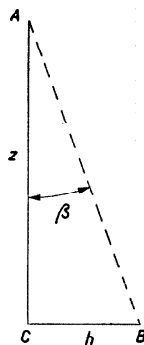


Fig. 221

Le tambour fait n tours par seconde.
La montre bien réglée fait N alternances à la seconde; chaque alternance dure t secondes, d'où :

$$Nt = 1.$$

La montre non réglée a une durée d'alternance égale à $t + \varepsilon$; pour faire N alternances, il lui faut $N(t + \varepsilon)$ secondes; pendant ce temps le tambour a fait :

$$nN(t + \varepsilon) = nNt + nN\varepsilon = n + nN\varepsilon$$

tours, c'est-à-dire $nN\varepsilon$ tours de plus que le nombre normal n .

Quand le tambour fait un tour, un point de l'hélice semble se déplacer de la longueur p le long de la génératrice; quand il fait $nN\varepsilon$ tours, le déplacement latéral du point est :

$$pnN\varepsilon.$$

Mais ce déplacement est la grandeur h (fig. 221) :

$$h = pnN\varepsilon,$$

d'où :

$$\varepsilon = \frac{h}{pnN} = \frac{v \operatorname{tg} \beta}{pnN}.$$

La marche diurne μ est égale à (147) :

$$\mu = -86\,400 \frac{\Delta T}{T} = -86\,400 \varepsilon N$$

ou

$$\mu = -86\,400 \frac{v \operatorname{tg} \beta}{pn}. \quad (169)$$

L'expression $\frac{v}{pn}$ est une constante de l'appareil. Nous pouvons choisir les facteurs de façon à faciliter les calculs à faire au moyen de la formule (169). Ainsi, dans le vibrograf, nous trouvons les facteurs :

$$v = \frac{125}{60} \text{ mm/s}, \quad p = 180 \text{ mm}, \quad n = 10 \text{ tours/s},$$

d'où :

$$86\,400 \frac{v}{pn} = 100.$$

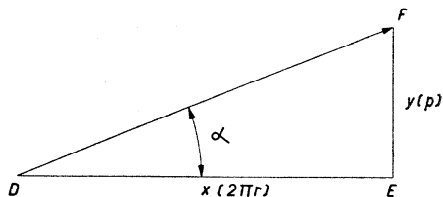


Fig. 222

La formule (169) devient dans ce cas :

$$\mu = -100 \operatorname{tg} \beta.$$

Le signe μ est le contraire de celui de $\operatorname{tg} \beta$. Le sens de l'inclinaison de la droite enregistrée indique si la montre avance ou retarde. Une inclinaison de 45° de la droite du diagramme correspond à une marche diurne de $100 \text{ s} = 1 \text{ m } 40 \text{ s}$.

Une erreur dans la lecture de l'angle β entraîne une erreur de la tangente qui est multipliée par 100. Pour augmenter la précision, il est possible de diminuer la vitesse de déroulement du papier ou d'augmenter le pas et la vitesse de rotation du tambour.

Il faut tenir compte du fait que $\operatorname{tg} \beta$ n'est pas proportionnelle à β ; à partir de 45° la tangente augmente rapidement; si $\beta > 45^\circ$, une erreur de β entraîne une plus grande erreur dans la valeur $\operatorname{tg} \beta$ que si $\beta < 45^\circ$.

La précision de l'appareil dépend en grande partie de la constance de v et de n . Ces vitesses sont contrôlées par les vibrations d'un cristal de quartz dont la fréquence est constante, pourvu que la température et la différence de potentiel entre les deux faces du cristal ne changent pas.

Vérification de l'isochronisme. — La connaissance du défaut d'isochronisme d'une montre révèle une propriété très importante de la montre. Cette connaissance rend les interpolations possibles, c'est-à-dire qu'elle permet de connaître la correction à apporter à l'état de la montre à un instant quelconque du jour; elle permet aussi au fabricant et au régleur de se rendre compte de l'évolution probable de la marche en fonction du temps.

On peut espérer que les observatoires chronométriques compléteront bientôt les observations qu'ils font subir aux chronomètres par des épreuves ayant pour but de déceler les défauts d'isochronisme. A cet effet, on peut utiliser des appareils analogues à ceux qui viennent d'être décrits, mais construits en vue d'obtenir une grande précision au moyen d'une observation de courte durée.

Les régleurs observent déjà le défaut d'isochronisme du chronomètre qu'ils sont en train de régler; ils parlent d'un « isochronisme de $\pm x$ secondes », ce qui signifie qu'entre les grandes et les petites amplitudes des oscillations du balancier, la marche diurne varie de $\pm x$ secondes. Mais on omet généralement de dire comment on a déterminé cette valeur de x , de sorte que, d'un régleur à l'autre, les estimations du défaut d'isochronisme ne sont pas comparables.

Quand les observatoires vérifient l'isochronisme des chronomètres, ils définissent les épreuves et les calculs utilisés pour exprimer par un nombre le défaut d'isochronisme.

Le procédé scientifique consiste à établir une courbe qui représente la marche diurne en fonction du temps écoulé depuis le remontage ou mieux encore en fonction de l'amplitude moyenne des oscillations du balancier.

Le mouvement oscillatoire réel du balancier-spiral. — Reprenons l'étude du mouvement du balancier-spiral. Celui-ci est sollicité par le moment de force du spiral qui, d'après la loi de Hooke, est proportionnel à l'élongation. Le balancier doit alors exécuter des oscillations sinusoïdales caractérisées par deux propriétés remarquables : l'isochronisme et la constance de l'amplitude. Le balancier-spiral pourrait mesurer le temps avec la plus grande précision et sans avoir besoin d'une force extérieure pour entretenir son mouvement.

Si nous écartons un balancier-spiral dont l'arbre tourne librement dans des coussinets, puis que nous l'abandonnions à lui-même, il oscille de part et d'autre d'une position d'équilibre, mais l'amplitude de ses oscillations diminue peu à peu si bien qu'au bout d'un certain temps, le balancier s'arrête.

Nous ne sommes pas dans les conditions qui donnent naissance au mouvement harmonique car, à côté de la force de rappel du spiral proportionnelle à l'élongation, d'autres forces contrarient le mouvement. Ces résistances sont le frottement des pivots dans les coussinets, le frottement intérieur du spiral et la résistance de l'air ; la plus importante de ces forces est la première.

Il n'est pas facile de se rendre compte de l'influence du frottement sur le mouvement du balancier-spiral parce que les lois du frottement sont encore imparfaitement connues. Nous ne pouvons aborder le problème qu'en faisant des hypothèses simplificatrices.

Le mouvement du balancier-spiral dans le cas d'un frottement constant. — Nous supposons que le frottement est une force constante et indépendante de la vitesse pour un balancier-spiral donné dont on connaît les dimensions, l'état des surfaces des pivots et des coussinets ainsi que les propriétés de l'huile de graissage.

Le mouvement du balancier est déterminé par deux forces : la force de rappel du spiral, proportionnelle à l'élongation et la force constante du frottement.

Considérons la demi-alternance « ascendante », c'est-à-dire celle pendant laquelle l'élongation passe de 0 à $+\varphi_0$. Pendant ce temps, le frottement dont le moment est μ agit dans le même sens que le spiral : les deux forces tendent à arrêter le balancier.

L'équation du mouvement du balancier est :

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -C - \mu,$$

où I désigne le moment d'inertie du balancier, C le moment élastique du spiral, φ l'élongation et t le temps. Une première intégration donne :

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -\frac{C}{I}\varphi^2 - \frac{2\mu}{I}\varphi + K.$$

La constante d'intégration K doit être telle que la vitesse angulaire $\frac{d\varphi}{dt}$ soit nulle pour $\varphi = \varphi_0$; φ_0 désigne l'amplitude, exprimée, comme φ , en radians.

Nous avons finalement :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{C}{I}} \sqrt{\varphi_0^2 + \frac{2\mu}{C}\varphi_0 - \frac{2\mu}{C}\varphi - \varphi^2}$$

ou

$$dt = \sqrt{\frac{I}{C}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi_0^2 + \frac{2\mu}{C}\varphi_0 - \frac{2\mu}{C}\varphi - \varphi^2}}.$$

Pour simplifier, posons :

$$\varphi_0^2 + \frac{2\mu}{C}\varphi_0 = \alpha, \quad \frac{2\mu}{C} = \beta.$$

L'expression de dt prend la forme :

$$dt = \sqrt{\frac{I}{C}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha - \beta\varphi - \varphi^2}}.$$

Son intégrale est :

$$t = \sqrt{\frac{I}{C}} \arcsin \frac{\varphi + \frac{\beta}{2}}{\sqrt{\alpha + \frac{\beta^2}{4}}} + \text{constante}.$$

Mais $\frac{\beta}{2} = \frac{\mu}{C}$, donc :

$$\sqrt{a + \frac{\beta^2}{4}} = \sqrt{\varphi_0^2 + \frac{2\mu}{C}\varphi_0 + \frac{\mu^2}{C^2}} = \varphi_0 + \frac{\mu}{C}$$

et, par conséquent :

$$t = \sqrt{\frac{I}{C}} \arcsin \frac{\varphi + \frac{\mu}{C}}{\varphi_0 + \frac{\mu}{C}} + \text{constante}.$$

Décidons de compter le temps, comme les élongations, à partir de la position d'équilibre, c'est-à-dire de choisir la constante de façon que pour $\varphi = 0$, $t = 0$; nous aurons :

$$\text{constante} = -\sqrt{\frac{I}{C}} \arcsin \frac{\frac{\mu}{C}}{\varphi_0 + \frac{\mu}{C}},$$

d'où :

$$t = \sqrt{\frac{I}{C}} \left[\arcsin \frac{\varphi + \frac{\mu}{C}}{\varphi_0 + \frac{\mu}{C}} - \arcsin \frac{\frac{\mu}{C}}{\varphi_0 + \frac{\mu}{C}} \right].$$

Appelons t_0 le temps correspondant à $\varphi = \varphi_0$; c'est le temps employé par le balancier pour exécuter la demi-alternance ascendante :

$$t_0 = \sqrt{\frac{I}{C}} \left[\arcsin \frac{\varphi_0 + \frac{\mu}{C}}{\varphi_0 + \frac{\mu}{C}} - \arcsin \frac{\frac{\mu}{C}}{\varphi_0 + \frac{\mu}{C}} \right]$$

ou

$$t_0 = \sqrt{\frac{I}{C}} \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\frac{\mu}{C}}{\varphi_0 + \frac{\mu}{C}} \right]. \quad (170)$$

Lorsque nous ne tenions pas compte du frottement, la durée de la demi-alternance était :

$$\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{I}{C}}.$$

Le frottement a diminué la durée de la demi-alternance ascendante de :

$$\Delta t = \sqrt{\frac{I}{C}} \arcsin \frac{\frac{\mu}{C}}{\varphi_0 + \frac{\mu}{C}}. \quad (171)$$

Nous voyons que, pour $\mu = 0$, $\Delta t = 0$.

Envisageons maintenant la demi-alternance « descendante », pendant laquelle l'élongation passe de φ_0 à 0. Pendant ce temps, le frottement agit en sens contraire du spiral. L'équation du mouvement est :

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -C\varphi + \mu.$$

En changeant le signe de μ dans la formule (170), nous obtenons la durée de la demi-alternance descendante. Mais nous devons encore tenir compte de l'amortissement pendant cette demi-alternance. Le frottement réduit la vitesse angulaire du balancier qui arrivera au point mort avec une vitesse angulaire inférieure à celle qu'il possédait au passage précédent et qui ne lui permettra d'atteindre dans la prochaine demi-alternance ascendante qu'une amplitude $\varphi_1 < \varphi_0$. La durée de la demi-alternance doit être calculée en admettant que maintenant l'amplitude est égale à φ_1 . Soit t_1 cette durée :

$$t_1 = \sqrt{\frac{I}{C}} \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{-\frac{\mu}{C}}{\varphi_1 - \frac{\mu}{C}} \right]$$

ou

$$t_1 = \sqrt{\frac{I}{C}} \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{\frac{\mu}{C}}{\varphi_1 - \frac{\mu}{C}} \right]. \quad (172)$$

La durée de la demi-alternance descendante est plus longue que celle de la demi-alternance sans frottement ; elle est augmentée de :

$$\Delta t = \arcsin \frac{\frac{\mu}{C}}{\varphi_1 - \frac{\mu}{C}}. \quad (173)$$

Il y a donc compensation puisque la durée d'une demi-alternance est allongée, tandis que celle de l'autre est raccourcie. La compensation est parfaite si les valeurs données par les équations (171) et (173) sont égales.

Nous avons écarté le balancier d'un angle φ_1 , puis l'avons lâché; il exécute d'abord la demi-alternance descendante avec l'amplitude φ_1 , puis la demi-alternance ascendante avec une amplitude $-\varphi_0$ dont la valeur absolue est plus faible que φ_1 . Si :

$$\varphi_0 + \frac{\mu}{C} = \varphi_1 - \frac{\mu}{C},$$

la compensation est parfaite et la durée de l'alternance complète n'est pas altérée.

Au commencement et à la fin de l'alternance, l'énergie cinétique du balancier est nulle; il faut que la somme des travaux des forces en action soit aussi nulle d'après le théorème des forces vives. Pendant la demi-alternance ascendante, le travail du spiral est :

$$-\frac{C\varphi_0^2}{2},$$

pendant la demi-alternance descendante, il vaut :

$$\frac{C\varphi_1^2}{2}.$$

Le travail du frottement pendant l'alternance complète est :

$$-\mu(\varphi_0 + \varphi_1).$$

Donc :

$$\frac{C\varphi_1^2}{2} - \frac{C\varphi_0^2}{2} - \mu(\varphi_0 + \varphi_1) = 0,$$

soit :

$$\frac{C}{2}(\varphi_1^2 - \varphi_0^2) - \mu(\varphi_0 + \varphi_1) = 0$$

ou

$$\varphi_1 - \varphi_0 = \frac{2\mu}{C},$$

relation que nous pouvons écrire :

$$\varphi_1 - \frac{\mu}{C} = \varphi_0 + \frac{\mu}{C}.$$

Le frottement constant n'altère donc pas la période; il modifie seulement l'amplitude qui diminue constamment.

Nous avons vu au chapitre VI (t. I, p. 248) que le frottement est loin d'être constant, de sorte que les déductions que nous venons de tirer ne correspondent pas à la réalité. Elles sont cependant intéressantes parce qu'elles révèlent que, contrairement à l'opinion courante, un frottement constant, si fort soit-il, n'altère pas la période du balancier. Cela ne signifie pas que la marche de la montre n'est pas influencée par le frottement, car celui-ci provoque un amortissement, une diminution de l'amplitude qui serait sans effet si les oscillations étaient isochrones. Or elles ne le sont pas, ainsi que nous le montrerons plus tard; dans les montres, bien des facteurs détruiraient l'isochronisme, même si celui-ci existait dans le balancier-spiral libre. En conséquence, il faut diminuer le frottement autant que possible.

Nous avons déterminé la vitesse angulaire ω du balancier pour une elongation égale à φ :

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{C}{I}} \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2 + \frac{2\mu}{C}(\varphi_0 - \varphi)}$$

ou

$$\omega^2 = \frac{C}{I} \left[\varphi_0^2 - \varphi^2 + \frac{2\mu}{C}(\varphi_0 - \varphi) \right].$$

Comme $\frac{2\mu}{C} = \varphi_1 - \varphi_0$, le facteur entre crochets peut s'écrire sous la forme :

$$\varphi_0^2 - \varphi^2 + (\varphi_1 - \varphi_0)(\varphi_0 - \varphi) = (\varphi_1 + \varphi)(\varphi_0 - \varphi).$$

Nous avons donc :

$$\omega^2 = \sqrt{\frac{C}{I}}(\varphi_1 + \varphi) \cdot \sqrt{\frac{C}{I}}(\varphi_0 - \varphi).$$

Pour représenter graphiquement cette équation, faisons (fig. 223) :

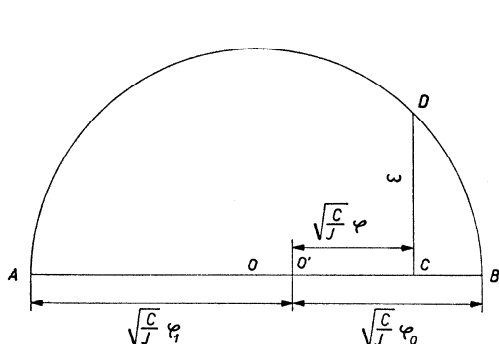


Fig. 223

$$\overline{AB} = \sqrt{\frac{C}{I}}\varphi_1 + \sqrt{\frac{C}{I}}\varphi_0$$

et décrivons une demi-circunférence de diamètre AB ; son centre est en O . Portons :

$$\overline{O'C} = \sqrt{\frac{C}{I}}\varphi,$$

le point O' étant à la distance

$\sqrt{\frac{C}{I}}\varphi_1$ du point A . Donc :

$$\overline{AC} = \sqrt{\frac{C}{I}} (\varphi_1 + \varphi), \quad \overline{CB} = \sqrt{\frac{C}{I}} (\varphi_0 - \varphi).$$

La perpendiculaire \overline{CD} représente la vitesse angulaire ω . Et $\overline{OO'}$ est proportionnel à l'amortissement, puisque :

$$\overline{OO'} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C}{I}} (\varphi_1 - \varphi_0).$$

Cette représentation graphique de la vitesse angulaire ω peut être appliquée dans le cas du mouvement harmonique. En effet, nous avons trouvé (124) :

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{I}} \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2},$$

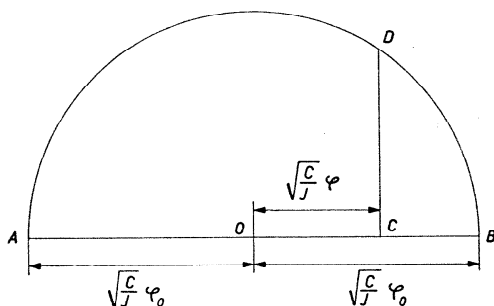


Fig. 224

d'où nous tirons :

$$\omega^2 = \frac{C}{I} (\varphi_0^2 - \varphi^2) = \sqrt{\frac{C}{I}} (\varphi_0 + \varphi) \cdot \sqrt{\frac{C}{I}} (\varphi_0 - \varphi).$$

La figure 224 est semblable à la figure 223 ; il est clair que, dans cette dernière figure, CD représente aussi la vitesse angulaire. Les points O et O' de la figure 223 sont confondus dans la figure 224 puisqu'il n'y a pas d'amortissement.

Le mouvement du balancier-spiral dans le cas d'un frottement proportionnel à la vitesse angulaire du balancier. — Le couple du spiral reste proportionnel à l'élongation. Si le moment du frottement est proportionnel à la vitesse angulaire du balancier, il peut être exprimé par :

$$f \frac{d\varphi}{dt},$$

le coefficient de proportionnalité f étant une constante.

L'équation différentielle du mouvement pour la demi-alternance ascendante sera :

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} + f \frac{d\varphi}{dt} + C\varphi = 0$$

ou

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{f}{I} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{C}{I} \varphi = 0. \quad (174)$$

Posons $\frac{f}{I} = a$ et $\frac{C}{I} = b$. L'équation (174) devient :

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + a \frac{d\varphi}{dt} + b\varphi = 0. \quad (175)$$

Une solution de cette équation est :

$$\varphi = e^{rt}.$$

Vérifions-le en calculant $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ et en constatant que ces valeurs satisfont l'équation différentielle (175). Nous avons :

$$\frac{d\varphi}{dt} = re^{rt}, \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = r^2e^{rt}.$$

Introduisons ces valeurs dans l'équation (175), Nous trouvons :

$$r^2 + ar + b = 0. \quad (176)$$

La solution $\varphi = e^{rt}$ est exacte si r satisfait à l'équation (176), c'est-à-dire si :

$$r = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

ou

$$r = -\frac{f}{2I} \pm \sqrt{\frac{f^2 - 4IC}{4I^2}}.$$

Les valeurs de r sont réelles si $f^2 \geq 4IC$. Or, dans le cas qui nous occupe, $f^2 < 4IC$, de sorte que les racines sont imaginaires :

$$r = -\frac{f}{2I} \pm i \sqrt{\frac{4IC - f^2}{4I^2}},$$

où $i = \sqrt{-1}$. Dans ce cas, la solution générale de l'équation (174) a la forme :

$$\varphi = e^{-\alpha t}(A \cos \beta t + B \sin \beta t),$$

expression dans laquelle :

$$\alpha = \frac{f}{2I}, \quad \beta = \sqrt{\frac{4IC - f^2}{4I^2}}.$$

A et B sont des constantes d'intégration que nous déterminerons en supposant que, pour $t = 0$:

$$\varphi = 0$$

et que, pour $\varphi = \varphi_0$:

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0.$$

Nous obtenons alors la relation :

$$\varphi = \varphi_0 e^{-\frac{f}{2I}t} \sin \sqrt{\frac{4IC - f^2}{4I^2}} t. \quad (177)$$

Ici aussi nous vérifierons l'exactitude de cette solution en calculant $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ et en introduisant les valeurs obtenues dans l'équation (174).

Reprenons les lettres α et β , nous avons :

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 e^{-\alpha t} \sin \beta t, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \varphi_0 [e^{-\alpha t} \beta \cos \beta t - \alpha e^{-\alpha t} \sin \beta t] = \varphi_0 e^{-\alpha t} (\beta \cos \beta t - \alpha \sin \beta t), \\ \frac{d^2\varphi}{dt^2} &= \varphi_0 [e^{-\alpha t} (-\beta^2 \sin \beta t - \alpha \beta \cos \beta t) - \alpha e^{-\alpha t} (\beta \cos \beta t - \alpha \sin \beta t)] \\ &= \varphi_0 e^{-\alpha t} [(\alpha^2 - \beta^2) \sin \beta t - 2\alpha \beta \cos \beta t]. \end{aligned}$$

Ces valeurs satisfont l'équation (174).

D'après l'équation (177), nous voyons que $\varphi = 0$ chaque fois que :

$$\sin \sqrt{\frac{4IC - f^2}{4I^2}} t = 0,$$

c'est-à-dire que :

$$\sqrt{\frac{4IC - f^2}{4I^2}} t = n\pi,$$

n étant nul ou un nombre entier positif. Ainsi, pour :

$$\begin{aligned} n &= 0, & t_0 &= 0, \\ n &= 1, & t_1 &= \pi \sqrt{\frac{4I^2}{4IC - f^2}}, \\ n &= 2, & t_2 &= 2\pi \sqrt{\frac{4I^2}{4IC - f^2}} = 2t_1, \\ n &= 3, & t_3 &= 3\pi \sqrt{\frac{4I^2}{4IC - f^2}} = 3t_1, \\ n &= 4, & t_4 &= 4t_1, \\ &\dots \end{aligned}$$

La période est égale à $t_2 - t_0$; elle est aussi égale à $t_3 - t_1$ ou à $t_4 - t_2$, etc..., car :

$$t_2 - t_0 = t_3 - t_1 = t_4 - t_2 = \dots$$

Donc, malgré l'amortissement, la période du mouvement du balancier reste constante. Soit T' cette période :

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{4I^2}{4IC - f^2}}. \quad (178)$$

Si, dans cette équation, nous faisons $f = 0$, nous obtenons la formule (126) :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C}}.$$

Un raisonnement analogue montre que la durée de l'alternance est toujours la même; elle est égale à :

$$t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \dots,$$

c'est-à-dire à :

$$\frac{T'}{2} = \pi \sqrt{\frac{4I^2}{4IC - f^2}}.$$

La période du balancier est altérée par un frottement proportionnel à la vitesse angulaire du balancier; elle est modifiée de la façon suivante :

$$T' = T \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{f^2}{4IC}}}.$$

Cherchons à nous rendre compte de l'effet du frottement. Nous avons :

$$\begin{aligned} T' &= T \left(1 - \frac{f^2}{4IC}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= T \left[1 + \frac{1}{2} \frac{f^2}{4IC} + \frac{3}{8} \left(\frac{f^2}{4IC}\right)^2 + \frac{5}{16} \left(\frac{f^2}{4IC}\right)^3 + \dots\right]. \end{aligned}$$

$\frac{f^2}{4IC}$ étant très petit, nous pouvons ne conserver que les deux premiers termes du développement. Dans ces conditions, nous aurons donc :

$$T' = T \left(1 + \frac{f^2}{8IC}\right). \quad (178 \text{ a})$$

Reprenons l'expression :

$$\frac{T'}{T} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{f^2}{4IC}}}$$

et posons :

$$\frac{T'}{T} = y, \quad \frac{f^2}{4IC} = x^2;$$

nous aurons :

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Cette fonction est représentée par la courbe AB (fig. 225) qui montre que le rapport $\frac{T'}{T}$ augmente rapidement dès que f , qui est proportionnel à x , dépasse une certaine valeur.

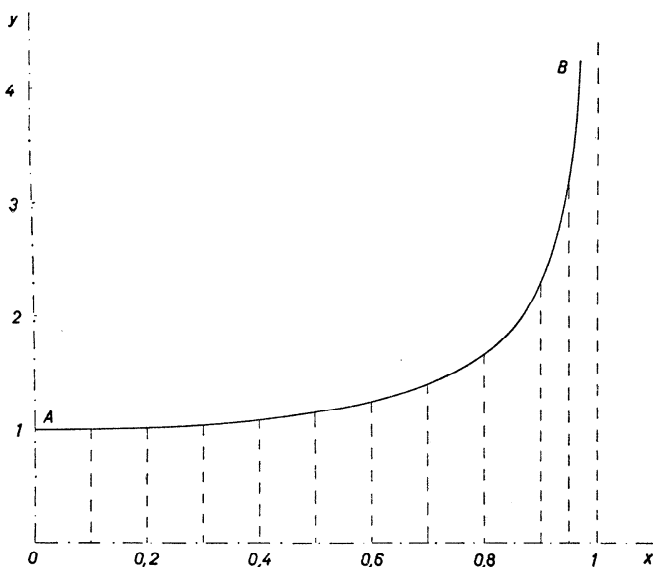


Fig. 225

L'influence d'un frottement proportionnel à la vitesse angulaire du balancier sur la période du balancier-spiral est faible quand le frottement est très petit; cette influence augmente très rapidement dès que le frottement dépasse une certaine valeur.

L'inconvénient d'un frottement important ne réside pas dans le fait que celui-ci modifie la période, mais dans le fait que, suivant les variations de son intensité, il influence diversement cette période.

Cherchons à calculer la durée de la demi-alternance ascendante. Lorsque le balancier arrive au bout de sa course, sa vitesse angulaire est nulle ; nous avons :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varphi_0 e^{-\alpha t} (\beta \cos \beta t - \alpha \sin \beta t) = 0.$$

Donc :

$$\beta \cos \beta t - \alpha \sin \beta t = 0, \quad \operatorname{tg} \beta t = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\sqrt{\frac{4IC - f^2}{4I^2}}}{\frac{f}{2I}}.$$

Mais $\sqrt{\frac{4IC - f^2}{4I^2}} = \frac{2\pi}{T'}$ et, par conséquent :

$$\operatorname{tg} \beta t = \frac{4\pi I}{T'f}.$$

Comme la fraction qui figure au second membre est très grande ($T'f$ très petit), βt est près de $\frac{\pi}{2}$. Posons donc :

$$\beta t = \frac{\pi}{2} - \varepsilon,$$

ε étant très petit. Nous avons successivement :

$$\operatorname{tg} \beta t = \frac{1}{\operatorname{tg} \varepsilon},$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \varepsilon = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta t} = \frac{T'f}{4\pi I},$$

$$\beta t = \frac{\pi}{2} - \frac{T'f}{4\pi I},$$

d'où :

$$t = \frac{\pi}{2\beta} - \frac{T'f}{4\pi I\beta}$$

et, en introduisant la valeur $\beta = \frac{2\pi}{T'}$:

$$t = \frac{T'}{4} \left(1 - \frac{fT'}{2\pi^2 I} \right). \quad (179)$$

La durée de la demi-alternance ascendante serait égale à $\frac{T'}{4}$ si elle était la même que celle de la demi-alternance descendante. Mais il n'en est rien, puisqu'elle est diminuée de :

$$\frac{T'}{4} \frac{fT'}{2\pi^2 I}.$$

Toutes les alternances étant de même durée, il faut que la demi-alternance descendante ait une durée égale à :

$$\frac{T'}{4} \left(1 + \frac{fT'}{2\pi^2 I} \right).$$

Diminution de l'amplitude provoquée par un frottement proportionnel à la vitesse angulaire. Le décrétement logarithmique. — Comparons deux élongations maxima positives et consécutives; appelons-les Φ_1 et Φ_2 et disons qu'elles correspondent aux temps t_1 et t_2 :

$$\Phi_1 = \varphi_0 e^{-\frac{f}{2I}t_1} \sin \sqrt{\frac{4IC - f^2}{4I^2}} t_1$$

ou

$$\Phi_1 = \varphi_0 e^{-\alpha t_1} \sin \beta t_1.$$

Nous avons aussi :

$$\Phi_2 = \varphi_0 e^{-\alpha t_2} \sin \beta t_2.$$

Les temps t_1 et t_2 sont séparés par une période T' , de sorte que :

$$t_2 = t_1 + T' = t_1 + \frac{2\pi}{\beta}, \quad \beta t_2 = \beta t_1 + 2\pi,$$

d'où :

$$\sin \beta t_2 = \sin \beta t_1.$$

Nous en déduisons :

$$\frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{e^{-\alpha t_1}}{e^{-\alpha t_2}}.$$

Prenons les logarithmes naturels des deux membres :

$$\ln \Phi_1 - \ln \Phi_2 = -at_1 - (-at_2) = a(t_2 - t_1) = aT',$$

soit :

$$\ln \Phi_1 - \ln \Phi_2 = aT'. \quad (180)$$

La différence entre les logarithmes naturels de deux amplitudes de même signe et consécutives s'appelle le *décroissement logarithmique*.

Il est possible d'évaluer le décroissement δ d'une autre manière. Nous avons :

$$\delta = \ln \Phi_1 - \ln \Phi_2 = \ln \frac{\Phi_1}{\Phi_2},$$

d'où :

$$\frac{\Phi_1}{\Phi_2} = e^\delta.$$

Développons e^δ en série :

$$e^\delta = 1 + \frac{\delta}{1} + \frac{\delta^2}{1.2} + \frac{\delta^3}{1.2.3} + \dots$$

Mais Φ_1 diffère peu de Φ_2 , de sorte que $\ln \frac{\Phi_1}{\Phi_2}$ est très près de zéro. Nous pouvons donc négliger les puissances supérieures de δ et poser :

$$e^\delta = 1 + \delta = \frac{\Phi_1}{\Phi_2},$$

d'où :

$$\delta = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\Phi_2}. \quad (181)$$

Lorsque le frottement est proportionnel à la vitesse angulaire du balancier, le décroissement logarithmique est constant ; il est égal à :

$$aT' = \frac{fT'}{2I} = \delta. \quad (181 a)$$

Si, dans un mouvement oscillatoire amorti, le décroissement logarithmique est constant (indépendant de l'amplitude), la somme des forces amortissantes est proportionnelle à la vitesse angulaire du corps oscillant.

La perturbation relative de la période due à l'amortissement. — Reprenons les formules (178 a) et (181 a) :

$$\frac{T'}{T} = 1 + \frac{f^2}{8IC}, \quad \frac{f}{2I} = \frac{\delta}{T'}$$

et introduisons dans la première la valeur de $\frac{f}{2I}$; nous obtenons :

$$\frac{T'}{T} = 1 + \frac{\delta^2 I}{T'^2 2C},$$

mais :

$$\frac{I}{C} = \frac{T^2}{4\pi^2},$$

donc :

$$\frac{T'}{T} = 1 + \frac{\delta^2 T^2}{8\pi^2 T'^2}.$$

La fraction du second membre étant très petite, nous pouvons poser $T = T'$, d'où :

$$\frac{T'}{T} = 1 + \frac{\delta^2}{8\pi^2},$$

soit :

$$\frac{T'}{T} - 1 = \frac{T' - T}{T} = \frac{\delta^2}{8\pi^2}$$

et

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\delta^2}{8\pi^2}. \quad (181 \text{ b})$$

Si le décrétement logarithmique est constant, la marche de la montre due à l'amortissement est exprimée par :

$$\mu = 86\,400 \frac{\delta^2}{8\pi^2}.$$

La fraction $\frac{\delta^2}{8\pi^2}$ est, en réalité, très petite : admettons pour le décrétement la valeur considérable $\delta = 0,1$:

$$\frac{\delta^2}{8\pi^2} \cong 0,000\,12.$$

Dans l'exemple que nous citerons plus loin, nous avons pour les amplitudes normales du balancier $\delta = 0,007$, de sorte que la fraction devient :

$$\frac{\delta^2}{8\pi^2} \cong 0,000\ 09.$$

Détermination expérimentale du décrétement logarithmique. — Si les oscillations sont rapides, il est difficile de mesurer deux élongations maxima consécutives; on observe alors deux élongations maxima de même signe séparées par un nombre m de périodes, c'est-à-dire les élongations Φ_1 et Φ_{m+1} correspondant aux temps t_1 et t_{m+1} . On a :

$$\Phi_1 = \varphi_0 e^{-\alpha t_1} \sin \beta t_1, \quad \Phi_{m+1} = \varphi_0 e^{-\alpha t_{m+1}} \sin \beta t_{m+1}.$$

Mais :

$$t_{m+1} = t_1 + mT' = t_1 + m \frac{2\pi}{\beta}$$

ou

$$\beta t_{m+1} = \beta t_1 + m \cdot 2\pi.$$

Donc :

$$\sin \beta t_{m+1} = \sin \beta t_1$$

et, par conséquent :

$$\frac{\Phi_1}{\Phi_{m+1}} = \frac{e^{-\alpha t_1}}{e^{-\alpha t_{m+1}}},$$

soit :

$$\ln \Phi_1 - \ln \Phi_{m+1} = -\alpha t_1 - (-\alpha t_{m+1}) = \alpha(t_{m+1} - t_1) = \alpha mT',$$

$$\ln \Phi_1 - \ln \Phi_{m+1} = m \cdot \alpha T' = m\delta,$$

d'où :

$$\delta = \frac{\ln \Phi_1 - \ln \Phi_{m+1}}{m}. \quad (182)$$

Dans le cas où il s'agit de contrôler si la résistance amortissante est proportionnelle à la vitesse angulaire du balancier, on peut remplacer les logarithmes naturels par les logarithmes vulgaires, car :

$$\ln \Phi = \frac{1}{M} \log \Phi,$$

où $\frac{1}{M} = 2,302\ 585\dots$, donc :

$$\delta = \frac{1}{M} (\log \Phi_1 - \log \Phi_2).$$

Si $\log \Phi_1 - \log \Phi_2$ est constant, les forces d'amortissement sont proportionnelles à la vitesse angulaire. Mais pour avoir la valeur exacte du décrement, il faut encore multiplier cette différence par $\frac{1}{M}$.

Représentation graphique du mouvement oscillatoire, amorti par un frottement proportionnel à la vitesse angulaire. — Reprenons l'équation (177) sous la forme :

$$\varphi = \varphi_0 e^{-\alpha t} \sin \beta t,$$

dans laquelle :

$$\alpha = \frac{f}{2I}, \quad \beta = \sqrt{\frac{4IC - f^2}{4I^2}}.$$

Soit Φ_0 la première élongation maximum ; pour elle :

$$e^{-\alpha t} \sin \beta t = 1,$$

d'où :

$$- \alpha t + \ln \sin \beta t = 0$$

ou

$$\ln \sin \beta t = \alpha t.$$

Pour $\varphi = 0$:

$$\sin \beta t = 0,$$

d'où :

$$\beta t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots, n\pi, \dots$$

Les temps correspondant aux élongations nulles sont :

$$t = 0, \frac{\pi}{\beta}, \frac{2\pi}{\beta}, \frac{3\pi}{\beta}, \dots, \frac{n\pi}{\beta}, \dots$$

Nous avons calculé le temps t' où la vitesse angulaire est nulle, c'est-à-dire où l'élongation est maximum, et avons trouvé (179) :

$$t' = \frac{T'}{4} \left(1 - \frac{fT'}{2\pi^2 I} \right).$$

Les vitesses angulaires sont nulles aux temps :

$$t = t', \quad t' + \frac{\pi}{\beta}, \quad t' + \frac{2\pi}{\beta}, \quad t' + \frac{3\pi}{\beta}, \dots$$

En prenant des valeurs intermédiaires, nous pouvons calculer d'autres valeurs de φ en fonction du temps ; ces valeurs peuvent être représentées par une courbe comme celle de la figure 226.

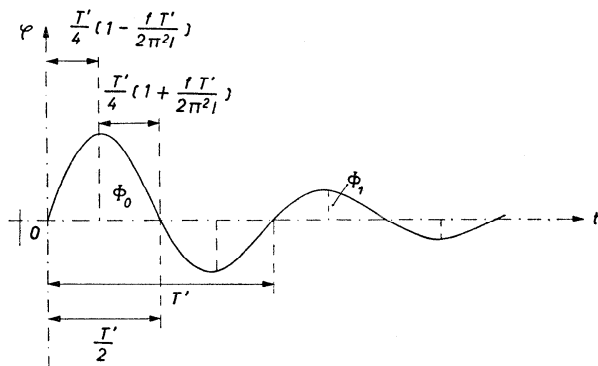


Fig. 226

Examen d'un cas réel. — Pour nous rendre compte aussi bien de l'ordre de grandeur de l'amortissement provoqué par une ou plusieurs résistances que des perturbations apportées au mouvement oscillatoire sinusoïdal, observons les amplitudes d'un balancier-spiral de montre monté dans un mouvement dont a été enlevé l'échappement. Le mouvement du balancier est amorti par les frottements, par le frottement intérieur du spiral et par la résistance de l'air.

Armons le spiral d'un angle φ_0 et lâchons le balancier. Déterminons l'amplitude du balancier toutes les n secondes par une observation au microscope ou par un procédé photographique. Créons une zone brillante sur la serge du balancier en polissant spécialement la tête d'une des vis ou en remplaçant une vis par une goupille bien brillante en acier. Pendant l'oscillation, la zone brillante est à peine discernable, mais elle le devient au moment où le balancier s'arrête pour reprendre son mouvement dans le sens opposé. A ce moment, il est possible d'observer la partie brillante ou de la photographier.

Voici le résultat d'une série d'observations faites à l'Ecole d'horlogerie de La Chaux-de-Fonds : l'amplitude a été mesurée au moyen de photographies, toutes les 5 secondes ; la période du balancier était $T = 0,4$ s ; son moment d'inertie $I = 0,2058$ g-cm² ; le moment élastique du spiral $C = 50,78$ dynes-cm/rad. Appelons t le temps écoulé depuis le début de l'expérience dont les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

Point n°	t	φ_0	$\Delta\varphi_0$	δ
	en secondes	en degrés	en degrés	
1	0	311,0	2,2	0,007 41
2	5	283,5	1,88	0,006 92
3	10	260,0	1,88	0,007 58
4	15	236,5	1,68	0,007 44
5	20	215,5	1,44	0,006 98
6	25	197,5	1,48	0,007 87
7	30	179,0	1,36	0,007 98
8	35	162,0	1,2	0,007 96
9	40	147,0	1,12	0,008 01
10	45	133,0	0,96	0,007 56
11	50	121,0	0,96	0,008 29
12	55	109,0	0,84	0,008 10
13	60	98,5	0,80	0,008 56
14	65	88,5	0,76	0,009 08
15	70	79,0	0,64	0,008 54
16	75	71,0	0,72	0,010 84
17	80	62,0	0,52	0,008 86
18	85	55,5	0,60	0,011 61
19	90	48,0	0,48	0,010 68
20	95	42,0	0,48	0,012 33
21	100	36,0	0,40	0,011 96
22	105	31,0	0,40	0,014 07
23	110	26,0	0,36	0,015 20
24	115	21,5	0,36	0,018 78
25	120	17,0	0,36	0,024 60
26	125	12,5	0,296	0,028 07
27	130	8,8	0,344	0,053 65
28	135	4,5		

En reportant les valeurs de t et φ_0 dans un système de coordonnées rectangulaires, nous obtenons la courbe de la figure 227 qui représente l'amortissement du mouvement du balancier. La diminution de l'amplitude n'est pas proportionnelle au temps.

Calculons la diminution $\Delta\varphi_0$ de l'amplitude pendant une oscillation ; pour cela supposons qu'entre deux points consécutifs la diminution

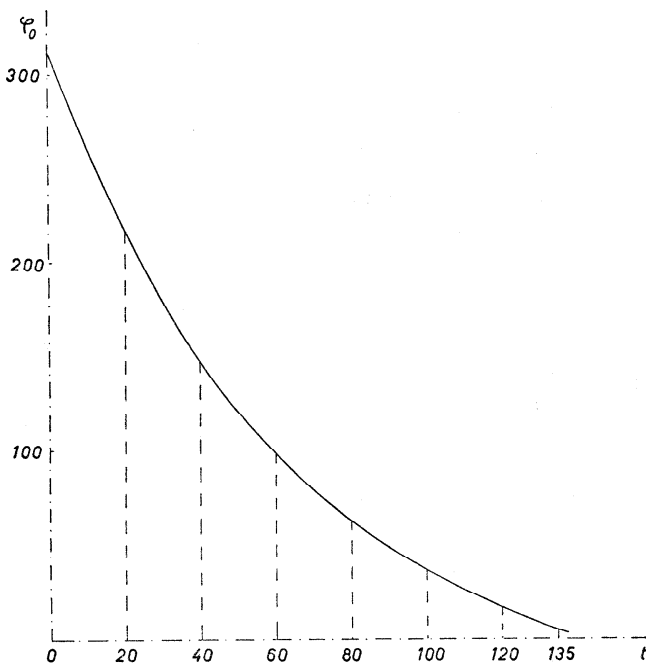


Fig. 227

de l'amplitude est proportionnelle au temps, ce qui revient à considérer la portion de courbe située entre ces points comme rectiligne. Ainsi au point n° 5, $\varphi_0 = 215^{\circ},5$; au point n° 6, $\varphi_0 = 197^{\circ},5$. Entre ces deux observations, il s'est écoulé 5 s ou 12,5 périodes, donc :

$$\Delta\varphi_0 = \frac{215,5 - 197,5}{12,5} = 1^{\circ},44.$$

Les valeurs de $\Delta\varphi_0$ pour chaque intervalle sont reportées dans le tableau.

En appliquant la formule (182), nous calculons le décrement logarithmique moyen δ . Pour le premier intervalle :

$$\delta = \frac{\ln 311 - \ln 283,5}{12,5} = 0,007\,405\,6.$$

Pour ce calcul, nous pouvons exprimer les angles en degrés, car :

$$\ln \alpha - \ln \beta = \ln \frac{\alpha}{\beta},$$

et le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ est le même que les angles α et β soient exprimés en radians ou en degrés.

Le tableau contient les valeurs de δ qui ne sont pas les mêmes pour chaque intervalle : la somme des résistances (frottement des pivots, frottement intérieur du spiral, résistance de l'air) n'est pas proportionnelle à la vitesse.

Il est facile de se convaincre sans le calculer que le décrement δ n'est pas constant. Il suffit de représenter φ_0 en fonction de t , en faisant usage d'une échelle millimétrique en abscisses et d'une échelle logarithmique (base 10) en ordonnées. Si la courbe d'équation :

$$\log \varphi_0 = \psi(t)$$

ainsi obtenue est une droite, le décrement δ est constant.

La courbe de la figure 227 représente aussi la vitesse angulaire maximum du balancier puisque, d'après (128) :

$$\Omega = \varphi_0 \sqrt{\frac{C}{I}}.$$

En supposant qu'entre deux points consécutifs la courbe (fig. 227) peut être considérée comme un segment de droite, nous avons admis que, dans cet intervalle de temps, les résistances provoquent un amortissement proportionnel au temps.

La courbe $\log \varphi_0 = \psi(t)$ diffère peu d'une droite ; entre deux points consécutifs nous pouvons considérer le décrement comme constant ; alors les résistances sont exprimées par :

$$f \frac{d\varphi}{dt}.$$

Nous avons trouvé (180) :

$$\delta = \ln \Phi_1 - \ln \Phi_2 = \alpha T'.$$

Comme $\alpha = \frac{f}{2I}$, il viendra :

$$\delta = \frac{f}{2I} T',$$

d'où :

$$f = \frac{2I\delta}{T'}.$$

Si les résistances sont petites, nous pouvons, en première approximation, poser $T' = T$ et, par conséquent :

$$f = \frac{2I\delta}{T}.$$

Ainsi, pour la valeur trouvée plus haut :

$$\delta = 0,007\,405\,6$$

et pour $T = 0,4$ s et $I = 0,2058$ g-cm², nous avons :

$$f = 0,007\,62 \text{ C.G.S.}$$

Les dimensions de f sont celles d'un couple divisé par une vitesse angulaire : dynes-cm divisé par rad/s ; nous avons donc :

$$[f] = \text{ML}^2\text{T}^{-1}.$$

Dans le système C.G.S., f peut s'exprimer en g-cm²/s.

L'équation du mouvement de ce balancier-spiral serait :

$$0,2058 \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 0,007\,62 \frac{d\varphi}{dt} + 50,78\varphi = 0,$$

en adoptant le système C.G.S. et si le décrement δ avait la valeur constante 0,007 405 6.

Perte d'énergie du balancier à chaque oscillation. — Calculons l'énergie cinétique du balancier dont nous connaissons la vitesse angulaire maximum Ω :

$$\Omega = \varphi_0 \sqrt{\frac{C}{I}}.$$

L'énergie cinétique vaut :

$$W = \frac{1}{2} I \Omega^2.$$

Considérons une oscillation dont l'amplitude est φ_0 ; l'énergie cinétique W_0 vaut :

$$W_0 = \frac{1}{2} I \Omega_0^2 = \frac{1}{2} I \left(\varphi_0 \sqrt{\frac{C}{I}} \right)^2 = \frac{1}{2} C \varphi_0^2.$$

A l'oscillation suivante, l'amplitude sera φ_1 et l'énergie cinétique W_1 :

$$W_1 = \frac{1}{2} C \varphi_1^2.$$

La perte d'énergie pendant l'oscillation est :

$$\Delta W_0 = \frac{1}{2} C (\varphi_0^2 - \varphi_1^2).$$

Mais $\varphi_1 = \varphi_0 - \Delta\varphi_0$, de sorte que :

$$\varphi_0^2 - \varphi_1^2 = 2\varphi_0\Delta\varphi_0 - \Delta\varphi_0^2.$$

Comme $\Delta\varphi_0$ est petit par rapport à φ_0 , nous pouvons écrire :

$$\varphi_0^2 - \varphi_1^2 = 2\varphi_0\Delta\varphi_0,$$

d'où :

$$\Delta W_0 = C\varphi_0\Delta\varphi_0. \quad (183)$$

La perte d'énergie par alternance est :

$$\Delta W_a = \frac{1}{2} C\varphi_0\Delta\varphi_0. \quad (184)$$

L'entretien des oscillations. — Dans les montres et dans les horloges, les oscillations du balancier et du pendule sont des oscillations amorties. Leur amplitude diminuerait constamment et tendrait vers zéro, si elles n'étaient pas entretenues, c'est-à-dire si l'on ne rendait pas à l'oscillateur l'énergie absorbée par les résistances.

Le mouvement peut être entretenu de différentes manières, soit en modifiant à un moment propice la position d'équilibre, en déplaçant le centre de gravité du pendule par exemple, ou au moyen d'impulsions électromagnétiques ou mécaniques.

Dans les montres, le mouvement du balancier est généralement entretenu par des impulsions mécaniques, des chocs augmentant la vitesse angulaire du balancier.

Influence d'une percussion sur la période du balancier-spiral. — Admettons qu'à un certain moment, où l'élongation du balancier est φ , la vitesse angulaire ω devienne brusquement $\omega + d\omega$. Nous supposons que le mouvement du balancier est harmonique.

Nous savons (129) que :

$$\varphi = \varphi_0 \sin \sqrt{\frac{C}{I}} t.$$

La vitesse angulaire est :

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \varphi_0 \sqrt{\frac{C}{I}} \cos \sqrt{\frac{C}{I}} t.$$

De ces deux formules, nous tirons :

$$\operatorname{tg} \sqrt{\frac{C}{I}} t = \frac{\varphi}{\omega} \sqrt{\frac{C}{I}},$$

d'où :

$$t = \sqrt{\frac{I}{C}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{\omega} \sqrt{\frac{C}{I}}. \quad (185)$$

Si la vitesse angulaire passe de ω à $\omega + d\omega$, la formule devient :

$$t = \sqrt{\frac{I}{C}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{\omega + d\omega} \sqrt{\frac{C}{I}}.$$

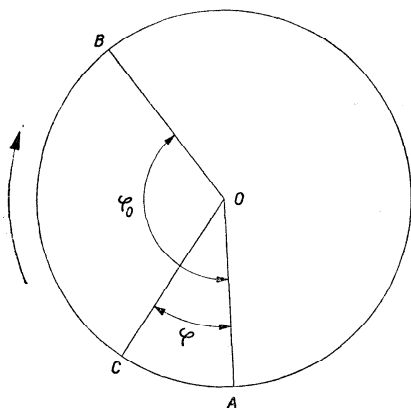


Fig. 228

Dans la figure 228, OA représente la position d'équilibre du bras du balancier. Tandis que ce dernier parcourt l'angle AOB , au moment où il passe en OC , il reçoit un choc qui augmente sa vitesse angulaire de $d\omega$.

Le balancier parcourt l'angle AOC dans le temps t_1 et le reste de la demi-alternance, c'est-à-dire l'angle COB , dans le temps t_2 . La durée de la demi-alternance est la somme de ces deux temps :

$$\frac{T}{4} = t_1 + t_2.$$

La percussion ne modifie pas t_1 ; il n'en est pas de même pour t_2 :

$$t_2 = \frac{T}{4} - t_1 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{I}{C}} - t_1.$$

Mais, d'après (185) :

$$t_1 = \sqrt{\frac{I}{C}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{\omega} \sqrt{\frac{C}{I}},$$

d'où :

$$t_2 = \sqrt{\frac{I}{C}} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{\omega} \sqrt{\frac{C}{I}} \right). \quad (186)$$

La percussion fait passer la vitesse angulaire de ω à $\omega + d\omega$; c'est comme si toute la demi-alternance avait été parcourue avec une plus grande

vitesse angulaire à partir du point mort. L'angle COB sera alors parcouru en un temps $t'_2 \neq t_2$:

$$t'_2 = \sqrt{\frac{I}{C}} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{\varphi}{\omega + d\omega} \sqrt{\frac{C}{I}} \right). \quad (187)$$

La différence entre t'_2 et t_2 est la modification de la durée de la demi-alternance provoquée par une percussion en OC (élongation φ) qui fait brusquement passer la vitesse angulaire de ω à $\omega + d\omega$:

$$t'_2 - t_2 = \Delta t_2,$$

$$\Delta t_2 = \sqrt{\frac{I}{C}} \left[\arctg \frac{\varphi}{\omega} \sqrt{\frac{C}{I}} - \arctg \frac{\varphi}{\omega + d\omega} \sqrt{\frac{C}{I}} \right].$$

Développons en série :

$$\Delta t_2 = \sqrt{\frac{I}{C}} \left[\frac{\varphi}{\omega} \sqrt{\frac{C}{I}} - \frac{1}{3} \left(\frac{\varphi}{\omega} \sqrt{\frac{C}{I}} \right)^3 + \dots \right. \\ \left. - \frac{\varphi}{\omega + d\omega} \sqrt{\frac{C}{I}} + \frac{1}{3} \left(\frac{\varphi}{\omega + d\omega} \sqrt{\frac{C}{I}} \right)^3 - \dots \right].$$

Dans les montres, la période est souvent égale à 0,4 s, donc :

$$\sqrt{\frac{I}{C}} = \frac{0,4}{2\pi} = 0,063\dots$$

et

$$\sqrt{\frac{C}{I}} = \frac{1}{0,063\dots} = 15,7\dots$$

L'impulsion se fait généralement près de la position d'équilibre : φ est un petit angle qui ne dépasse guère 0,3 radian et ω est alors très grand ($\omega > 70$ rad/s pour $\varphi = 0,3$ et $\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$) ; dans ces conditions :

$$\frac{\varphi}{\omega} \sqrt{\frac{C}{I}} \cong 0,067$$

et

$$\left(\frac{\varphi}{\omega} \sqrt{\frac{C}{I}} \right)^3 \cong 3 \cdot 10^{-4}.$$

On peut, dans chaque série, négliger tous les termes sauf le premier et écrire :

$$\begin{aligned}\Delta t_2 &= \sqrt{\frac{I}{C}} \left[\frac{\varphi}{\omega} \sqrt{\frac{C}{I}} - \frac{\varphi}{\omega + d\omega} \sqrt{\frac{C}{I}} \right] \\ &= \frac{\varphi}{\omega} - \left(\frac{\varphi}{\omega + d\omega} \right) = \frac{\varphi}{\omega} \frac{d\omega}{\omega + d\omega} \cong \frac{\varphi d\omega}{\omega^2}.\end{aligned}$$

Comme l'impulsion est donnée près de la position d'équilibre, on peut admettre sans grande erreur que :

$$\omega = \Omega = \varphi_0 \sqrt{\frac{C}{I}},$$

donc :

$$\Delta t_2 = \frac{I}{C} \frac{\varphi d\omega}{\varphi_0^2}. \quad (188)$$

En d'autres termes :

1° une impulsion après la position d'équilibre, dans la demi-alternance ascendante, allonge la durée de cette demi-alternance ;

2° la perturbation de cette durée croît avec l'impulsion, l'élongation au moment de la percussion et avec la période (facteur $\frac{I}{C}$) ; elle varie en raison inverse du carré de l'amplitude.

Si l'impulsion a lieu dans la demi-alternance descendante, c'est-à-dire en OC (fig. 229), nous appellerons t_1 la durée du parcours BOC et t_2 celle du parcours COA :

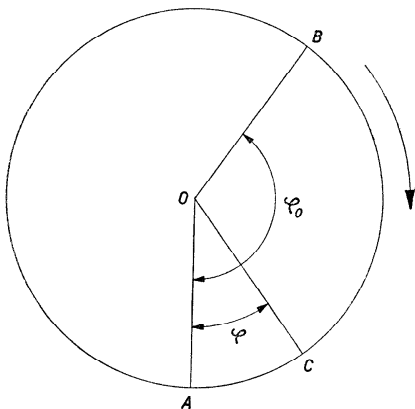


Fig. 229

$$t_1 + t_2 = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{I}{C}}.$$

En OC , la vitesse angulaire est :

$$\omega = \sqrt{\frac{I}{C}} (\varphi_0^2 - \varphi^2).$$

La durée t_1 n'est pas modifiée par la percussion. La durée t_2 est raccourcie puisque le même angle est parcouru avec une vitesse accrue. Nous avons en effet :

$$t_2 = \sqrt{\frac{I}{C}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{\omega} \sqrt{\frac{C}{I}}$$

et

$$t'_2 = \sqrt{\frac{I}{C}} \arctg \frac{\varphi}{\omega + d\omega} \sqrt{\frac{C}{I}},$$

d'où :

$$\Delta t_2 = t'_2 - t_2 = - \sqrt{\frac{I}{C}} \left[\arctg \frac{\varphi}{\omega} \sqrt{\frac{C}{I}} - \arctg \frac{\varphi}{\omega + d\omega} \sqrt{\frac{C}{I}} \right],$$

soit finalement :

$$\Delta t_2 = - \frac{I}{C} \frac{\varphi d\omega}{\varphi^2}, \quad (189)$$

ce qui est, au signe près, la formule (188).

L'effet d'une percussion pendant la demi-alternance descendante est égal et de signe contraire à celui de la même percussion donnée à la même distance angulaire de la position d'équilibre, au même balancier exécutant des oscillations de même amplitude. Mais dans le cas de la demi-alternance descendante, une impulsion diminue la durée. D'où la règle connue :

Avant le point mort, une impulsion diminue la période; après le point mort, elle augmente la période.

Si, au lieu d'une impulsion, c'est une résistance qui, en *OC*, diminue brusquement la vitesse angulaire ω , il suffira de remplacer dans les formules (188) et (189) $d\omega$ par $-d\omega$. L'effet sur la période est de signe contraire, mais de même grandeur absolue. La règle précédente peut être complétée comme suit :

Avant le point mort, une résistance augmente la période (ou produit du retard); après le point mort, elle diminue la période, c'est-à-dire fait avancer la montre.

Augmentation de l'amplitude provoquée par une percussion. — Reprenons les conditions du problème précédent. Au moment où l'élongation est φ , la vitesse angulaire passe de ω à $\omega + d\omega$ et nous sommes dans la demi-alternance ascendante; la période du balancier est T . D'après (124), nous avons :

$$\varphi_0 = \sqrt{\varphi^2 + \omega^2} \sqrt{\frac{I}{C}}.$$

Dans cette équation, nous connaissons φ , φ_0 et $\frac{I}{C}$; nous pouvons calculer ω :

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{I}} \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2} = \frac{2\pi}{T} \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}.$$

En introduisant la période dans l'expression de φ_0 , nous obtenons :

$$\varphi_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4\pi^2\varphi^2 + \omega^2 T^2}.$$

L'impulsion fait passer l'amplitude de φ_0 à φ'_0 :

$$\varphi'_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4\pi^2\varphi^2 + (\omega + d\omega)^2 T^2}.$$

$\varphi'_0 - \varphi_0$ représente l'augmentation de l'amplitude provoquée par une percussion qui, au moment du passage du balancier par l'élongation φ , augmente la vitesse angulaire de $d\omega$.

Il est possible d'établir une formule plus simple, mais qui n'est rigoureusement exacte que pour de très faibles percussions. Nous avons :

$$\varphi_0^2 - \varphi^2 = \omega^2 \frac{I}{C}$$

ou

$$\ln(\varphi_0^2 - \varphi^2) = 2 \ln \omega + \ln \frac{I}{C}.$$

En différenciant, nous obtenons :

$$\frac{2\varphi_0 \Delta\varphi_0}{\varphi_0^2 - \varphi^2} = \frac{2\Delta\omega}{\omega}$$

ou

$$\Delta\varphi_0 = \frac{\Delta\omega}{\omega} \frac{\varphi_0^2 - \varphi^2}{\varphi_0}. \quad (190)$$

Simplifions cette formule en utilisant les relations (124) et (126); nous aurons :

$$\frac{\varphi_0^2 - \varphi^2}{\omega} = \frac{\omega T^2}{4\pi^2}.$$

Or, dans les cas qui nous occupent (percussion près de la position d'équilibre) :

$$\omega \cong \Omega.$$

Si nous admettons :

$$\omega = \Omega = \varphi_0 \sqrt{\frac{C}{I}} = \varphi_0 \frac{2\pi}{T},$$

nous obtiendrons :

$$\frac{\varphi_0^2 - \varphi^2}{\omega} = \frac{\omega T^2}{4\pi^2} = \varphi_0 \frac{2\pi}{T} \frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{T\varphi_0}{2\pi}.$$

La formule (190) devient :

$$\Delta\varphi_0 = \frac{\varphi_0^2 - \varphi^2}{\omega} \frac{\Delta\omega}{\varphi_0} = \frac{T\varphi_0}{2\pi} \frac{\Delta\omega}{\varphi_0}$$

ou

$$\Delta\varphi_0 = \frac{T\Delta\omega}{2\pi}. \quad (191)$$

Pour ce calcul, il est indifférent que l'augmentation de la vitesse angulaire soit le fait d'une impulsion momentanée ou d'une impulsion d'une certaine durée, comme c'est le cas dans les échappements des montres et des horloges. Ainsi dans l'échappement à ancre, l'impulsion est donnée au balancier par la fourchette qui conduit la cheville de plateau pendant un certain temps. Il suffit de connaître la vitesse angulaire $\omega + d\omega$ et l'élongation φ du balancier au moment où la fourchette abandonne la cheville de plateau.

Des conditions que doit remplir un bon échappement. — L'échappement des montres et des horloges est le dispositif d'entretien des oscillations du balancier ou du pendule ; il donne à l'organe oscillant des impulsions périodiques qui apportent avec elles une perturbation de la période. Si cette perturbation était toujours la même, la marche de la montre resterait régulière, mais dans les formules (188) et (189), il y a des facteurs variables. Ainsi $d\omega$ est fonction de l'intensité de l'impulsion, qui varie avec la tension du ressort moteur et avec la position relative des dents des roues et des pignons du rouage. Un autre facteur variable est l'amplitude φ_0 qui dépend de l'intensité de l'impulsion, de la position de la montre, de la température, de la pression atmosphérique.

Pour diminuer l'intensité des perturbations de la période provoquées par l'échappement, il faut que celui-ci remplisse les conditions suivantes :

1° *l'impulsion doit se donner aussi près que possible de la position d'équilibre ;*

2° *puisque l'impulsion ne peut pas être instantanée (car même si un contact instantané était possible, il n'y aurait aucune transmission d'énergie), il faut chercher à répartir la durée de l'action de l'échappement en parties égales autour du moment où le balancier passe par la position d'équilibre.*

Cette règle, connue et appliquée par les horlogers, doit être à la base de la construction des échappements dans lesquels l'énergie est transmise au balancier sous la forme d'une percussion qui augmente la vitesse angulaire de celui-ci. Les calculs confirment cette règle empirique.

CHAPITRE VIII

LE CALCUL DU MOMENT D'INERTIE D'UN CORPS

Définition du moment d'inertie. — D'une façon générale, nous appelons *moment d'inertie d'un corps par rapport à un point, un axe ou un plan*, la somme I des produits obtenus en multipliant la masse m de chacun des éléments matériels dont se compose le corps par le carré de sa distance r à ce point, cet axe ou ce plan :

$$I = \sum mr^2.$$

Ce sont presque exclusivement les moments d'inertie par rapport à des axes qui sont utilisés en dynamique ; les moments d'inertie par rapport à des points ou des plans sont commodes pour certaines démonstrations.

Si le corps forme une masse *continue*, le moment d'inertie est exprimé, dans le cas général, par une intégrale triple. Décomposons le corps continu en éléments infiniment petits. La masse de l'un de ces éléments est $m = \delta dV$, dV étant le volume de l'élément et δ la masse spécifique en un point quelconque de dV . Nous avons :

$$I = \sum mr^2 = \sum \delta dV \cdot r^2 = \iiint_{(V)} \delta r^2 dV,$$

le domaine d'intégration étant le volume entier du corps.

Dans le cas particulier où le corps est *homogène*, la masse spécifique a la même valeur en tous ses points, et nous pouvons écrire :

$$I = \delta \iiint_{(V)} r^2 dV.$$

Dans de nombreux cas particuliers, il est possible, en choisissant une décomposition convenable du corps, de ramener la détermination d'un moment d'inertie au calcul d'une intégrale double ou même à celui d'une intégrale simple.

Le moment d'inertie par rapport à un axe peut s'écrire :

$$I = \sum mr^2 = M\varrho^2.$$

$M = \sum m$ est la masse totale du corps ; la quantité ϱ qui représente une longueur est le *rayon de giration du corps relatif à l'axe*. Tout se passe comme si la masse M du corps avait été concentrée en un certain point situé à la distance ϱ de l'axe. Le rayon de giration a pour valeur :

$$\varrho = \sqrt{\frac{I}{M}}.$$

Remarquons que le moment d'inertie d'un corps dépend à la fois de la masse du corps et de la façon dont cette masse est distribuée. Le moment d'inertie est d'autant plus grand que le corps contient des éléments plus lourds et surtout plus éloignés de l'axe.

Nous avons défini au chapitre VII (t. II, p. 13) le moment d'inertie du balancier par rapport à son axe de rotation. Montrons dans un autre exemple comment s'introduit cette notion de moment d'inertie. A cet effet, nous considérons un corps en rotation autour d'un axe fixe et animé à un instant donné de la vitesse angulaire ω . Proposons-nous de calculer son énergie cinétique à cet instant. Une masse élémentaire m du corps, située à la distance r de l'axe de rotation, a la vitesse $V = \omega r$ et, par conséquent, possède une énergie cinétique :

$$\frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}m\omega^2r^2.$$

L'énergie cinétique du corps en rotation sera la somme de ces énergies élémentaires :

$$W = \sum \frac{1}{2}mV^2 = \sum \frac{1}{2}m\omega^2r^2.$$

Comme la vitesse angulaire ω a la même valeur pour toutes les masses élémentaires, le facteur constant $\frac{1}{2}\omega^2$ peut être mis en évidence devant le signe \sum . Nous avons donc :

$$W = \frac{1}{2}\omega^2 \sum mr^2 = \frac{1}{2}I\omega^2.$$

Le moment d'inertie apparaît toujours dans l'étude du mouvement de rotation d'un corps autour d'un axe ; il joue dans ce mouvement le même rôle que la masse dans le mouvement de translation.

Les éléments suivants du mouvement de translation : chemin parcouru, vitesse, accélération, force, masse, sont remplacés dans le mouvement de rotation par angle parcouru, vitesse angulaire, accélération angulaire, couple, moment d'inertie.

Le moment d'inertie est une quantité essentiellement positive ; il a les dimensions du produit d'une masse par le carré d'une longueur, $[I] = ML^2$. Dans le système C.G.S., il est exprimé en g-cm². Dans le système M.Kf.S., il doit être exprimé en U.M.m² ou en kg*·m·s². En effet, si P est le poids du corps en kg*, D son diamètre de rotation en m, g l'accélération de la pesanteur, nous pouvons écrire :

$$I = M \left(\frac{D}{2} \right)^2 = \frac{P}{g} \left(\frac{D}{2} \right)^2 = \frac{PD^2}{4g}$$

et, par suite :

$$[I] = \frac{FL^2}{LT^{-2}} = FLT^2.$$

L'unité M.Kf.S. de moment d'inertie est donc bien le kg*·m·s².

Quelques théorèmes concernant les moments d'inertie. — Soit A le point où est concentrée la masse m (fig. 230). Fixons la position de ce point par rapport à un système d'axes rectangulaires Ox , Oy et Oz . Les coordonnées de A sont :

$$x = \overline{DB}, \quad y = \overline{CB}, \quad z = \overline{BA}.$$

Les distances de A aux axes Ox , Oy et Oz sont :

$$\sqrt{y^2 + z^2}, \quad \sqrt{x^2 + z^2}, \quad \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Les moments d'inertie de la masse m par rapport à ces axes sont :

$$m(y^2 + z^2), \quad m(x^2 + z^2), \quad m(x^2 + y^2).$$

Pour un corps dont la masse est répartie, le moment d'inertie est la somme des moments d'inertie des masses élémentaires m qui le constituent. On a donc, pour les moments d'inertie du corps par rapport aux trois axes Ox , Oy et Oz :

$$I_x = \sum m(y^2 + z^2), \quad (192)$$

$$I_y = \sum m(x^2 + z^2), \quad (193)$$

$$I_z = \sum m(x^2 + y^2). \quad (194)$$

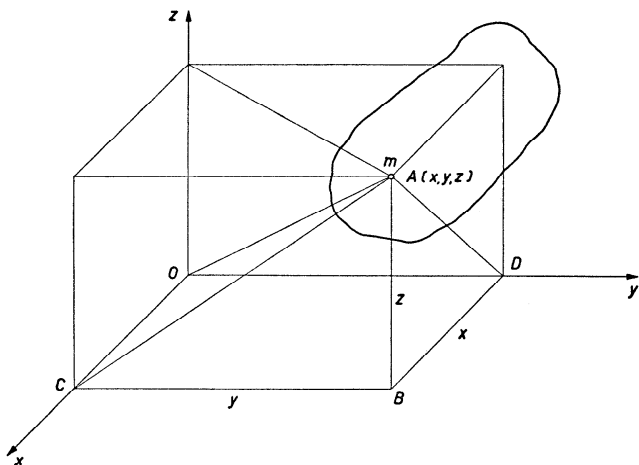


Fig. 230

La distance de A au point O est égale à :

$$OA = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Le moment d'inertie de la masse m par rapport au point O , ou *moment d'inertie polaire*, a pour valeur :

$$m(x^2 + y^2 + z^2).$$

Le moment d'inertie polaire d'un corps par rapport au point O est :

$$I_o = \sum m(x^2 + y^2 + z^2) \quad (195)$$

on voit sans peine que :

$$I_o = \frac{1}{2}(I_x + I_y + I_z). \quad (196)$$

Si les axes x, y, z tournent autour du point fixe O , tout en restant rectangulaires, la somme :

$$I_x + I_y + I_z,$$

constamment égale à $2I_o$, demeure constante. Pour une origine déterminée, l'expression $I_x + I_y + I_z$ est donc un invariant.

Par rapport aux plans (xy) , (yz) et (zx) , les moments d'inertie du corps valent :

$$I_{xy} = \sum mz^2, \quad I_{yz} = \sum mx^2, \quad I_{zx} = \sum my^2.$$

La relation :

$$I_o = I_{xy} + I_{yz} + I_{zx} \quad (197)$$

est évidente.

Les moments d'inertie d'un corps par rapport à un plan sont rarement utilisés dans la pratique, mais ils facilitent souvent le calcul des moments d'inertie par rapport à un axe, grâce aux formules suivantes, faciles à déduire :

$$I_x = I_{xz} + I_{xy}, \quad (198)$$

$$I_y = I_{yz} + I_{yx}, \quad (199)$$

$$I_z = I_{zy} + I_{zx}. \quad (200)$$

On peut traduire les formules (196) à (200) par les théorèmes suivants :

le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe est égal à la somme des moments d'inertie du corps par rapport à deux plans rectangulaires passant par cet axe ;

le moment d'inertie d'un corps par rapport à un point est égal à la somme des moments d'inertie du corps par rapport à trois plans rectangulaires passant par ce point. Il est aussi égal à la demi-somme des moments d'inertie du corps par rapport à trois axes rectangulaires passant par ce point.

Variation du moment d'inertie d'un corps par rapport à une droite qui se déplace parallèlement à elle-même. — Etudions comment varie le moment d'inertie d'un corps par rapport à une droite qui se déplace parallèlement à elle-même. A cet effet, considérons deux droites parallèles AB et CD (fig. 231), dont l'une passe par G , centre de gravité ou centre d'inertie¹ du corps.

Considérons un système d'axes rectangulaires dans lequel l'origine O est sur la droite AB qui sera l'axe des z , tandis que le plan (xz) contient le point G . L'axe des x coupe CD en E ; posons $OE = h$.

D'après (194), le moment d'inertie du corps par rapport à AB est :

$$I' = \sum m(x^2 + y^2).$$

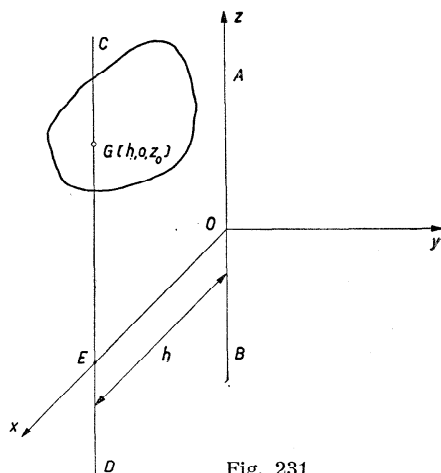


Fig. 231

¹ La locution centre d'inertie est employée pour tous les corps. La locution centre de gravité uniquement pour les corps situés à la surface de la Terre.

Le moment d'inertie du même corps par rapport à CD vaut :

$$I = \sum m[(x-h)^2 + y^2] \\ = \sum m(x^2 - 2xh + h^2 + y^2) = I' - 2h \sum mx + h^2 \sum m.$$

La masse totale du corps est égale à $M = \sum m$. L'abscisse h du centre de gravité est donnée par la formule¹ :

$$Mh = \sum mx.$$

Nous avons donc :

$$I = I' - 2Mh^2 + Mh^2 = I' - Mh^2$$

ou

$$I' = I + Mh^2. \quad (201)$$

Le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe quelconque est égal au moment d'inertie du corps par rapport à l'axe parallèle passant par le centre de gravité, augmenté du produit de la masse du corps par le carré de la distance des deux axes.

Ce théorème est fondamental, car il ramène le calcul du moment d'inertie par rapport à un axe quelconque au calcul du moment d'inertie par rapport à l'axe parallèle passant par le centre de gravité.

Donc, si nous connaissons les moments d'inertie du corps par rapport à tous les axes passant par son centre de gravité, la formule (201) permet de calculer facilement les moments d'inertie du corps par rapport à tous les axes de l'espace.

Il résulte de ce théorème que, *de tous les axes parallèles à une même direction, celui pour lequel le moment d'inertie est minimum passe par le centre de gravité.*

Moment d'inertie d'un corps par rapport à une droite quelconque passant par son centre de gravité. — Soit M (fig. 232) un point du corps considéré, de masse m et de coordonnées x, y, z par rapport à un système d'axes rectangulaires Gx, Gy et Gz passant par le centre de gravité du corps.

Le moment d'inertie de cette masse élémentaire m par rapport à une droite quelconque GN passant par le centre de gravité est :

$$m \cdot \overline{MP^2} = mr^2;$$

celui du corps est :

$$I = \sum mr^2.$$

¹ Supposons le corps décomposé en éléments matériels de masse m , de coordonnées x, y, z . Les formules suivantes :

$$M\xi = \sum mx, \quad M\eta = \sum my, \quad M\zeta = \sum mz$$

donnent les coordonnées ξ, η, ζ du centre de gravité.

qui exprime que le point $U(a, \beta, \gamma)$ est situé à la distance unité de l'origine G . Nous pouvons donc écrire :

$$1 - \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2, \quad 1 - \beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2, \quad 1 - \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

En tenant compte de ces relations, il vient :

$$I = \sum m [x^2(\beta^2 + \gamma^2) + y^2(\alpha^2 + \gamma^2) + z^2(\alpha^2 + \beta^2) - 2xy\alpha\beta - 2xz\alpha\gamma - 2yz\beta\gamma]$$

et finalement :

$$I = \sum m [\alpha^2(y^2 + z^2) + \beta^2(x^2 + z^2) + \gamma^2(x^2 + y^2) - 2xy\alpha\beta - 2xz\alpha\gamma - 2yz\beta\gamma].$$

Nous savons, d'après les formules (192), (193) et (194), que le moment d'inertie par rapport à Gx est :

$$\sum m(y^2 + z^2) = I_x = A,$$

que le moment d'inertie par rapport à Gy vaut :

$$\sum m(x^2 + z^2) = I_y = B,$$

enfin que le moment d'inertie par rapport à Gz est :

$$\sum m(x^2 + y^2) = I_z = C.$$

Posons encore :

$$\sum myz = D, \quad \sum mxz = E, \quad \sum mxy = F.$$

Nous appellerons les grandeurs D, E, F les produits d'inertie.

La formule définitive pour I devient ainsi :

$$I = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2D\beta\gamma - 2E\alpha\gamma - 2F\alpha\beta. \quad (202)$$

Cette formule donne le moment d'inertie du corps par rapport à un axe passant par le centre de gravité en fonction de la direction (α, β, γ) de cet axe. L'application de cette formule exige la connaissance préalable des trois moments d'inertie A, B, C et des trois produits d'inertie D, E, F .

Ellipsoïde central d'inertie. — Pour étudier la variation du moment d'inertie I en fonction de la direction de l'axe GN , il est commode d'utiliser la représentation géométrique suivante.

Portons sur l'axe GN (fig. 233), de part et d'autre du point G , la longueur :

$$GS = GS' = \frac{1}{\sqrt{I}}.$$

Nous définissons ainsi deux points S et S' symétriques par rapport à G . Quel est le lieu des points S et S' lorsque la direction de l'axe GN varie ?

L'équation (202) peut s'écrire :

$$1 = A \frac{\alpha^2}{I} + B \frac{\beta^2}{I} + C \frac{\gamma^2}{I} - 2D \frac{\beta\gamma}{I} - 2E \frac{\alpha\gamma}{I} - 2F \frac{\alpha\beta}{I}.$$

Cherchons le lieu du point S de coordonnées x, y, z . Nous avons :

$$x = GS \cdot a = \frac{\alpha}{\sqrt{I}},$$

d'où :

$$x^2 = \frac{\alpha^2}{I}.$$

De même :

$$y^2 = \frac{\beta^2}{I}, \quad z^2 = \frac{\gamma^2}{I}$$

et

$$yz = \frac{\beta\gamma}{I}, \quad xz = \frac{\alpha\gamma}{I}, \quad xy = \frac{\alpha\beta}{I}.$$

L'équation (202) transformée devient :

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Dyz - 2Exz - 2Fxy = 1. \quad (203)$$

Le point S de coordonnées x, y, z , se trouve donc sur la surface du second degré définie par cette équation ; il en est de même du point symétrique S' de coordonnées $-x, -y, -z$. Cette surface est un ellipsoïde de centre G . Nous l'appellerons l'*ellipsoïde central d'inertie* du corps.

Propriétés de l'ellipsoïde central d'inertie. — Un ellipsoïde admet toujours trois axes de symétrie $G\xi, G\eta, G\zeta$ (fig. 233), perpendiculaires deux à deux. S'ils sont pris comme axes de coordonnées Gx, Gy, Gz (fig. 234), l'équation de la surface ne contiendra pas de termes en yz, xz et xy ; elle affectera par conséquent sa forme la plus simple :

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1, \quad (204)$$

qui est l'équation de l'ellipsoïde rapporté à ses axes.

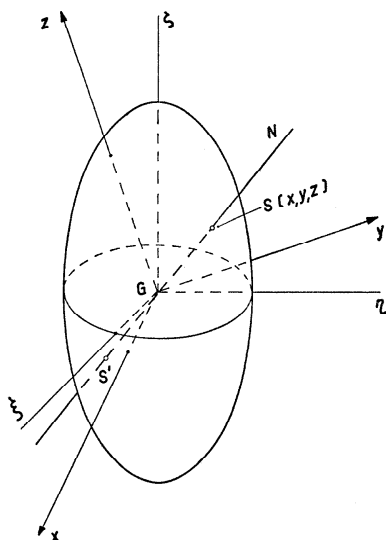


Fig. 233

En effet, si l'axe Gz de la figure 234 est un axe de symétrie de l'ellipsoïde, l'équation (203) étant satisfaite par les coordonnées x_1, y_1, z_1 d'un point S_1 de la surface, l'est encore par les coordonnées $-x_1, -y_1, z_1$ du point S'_1 symétrique de S_1 par rapport à l'axe Gz . On a donc à la fois :

$$Ax_1^2 + By_1^2 + Cz_1^2 - 2Dy_1z_1 - 2Ex_1z_1 - 2Fx_1y_1 = 1$$

et

$$Ax_1^2 + By_1^2 + Cz_1^2 + 2Dy_1z_1 + 2Ex_1z_1 - 2Fx_1y_1 = 1.$$

Comme le point $S_1(x_1, y_1, z_1)$ a été choisi de façon quelconque sur la surface, ceci n'est possible que si :

$$D = E = 0.$$

De la même façon, on montrerait que si Gx et Gy sont des axes de symétrie de l'ellipsoïde, on a nécessairement :

$$E = F = 0, \quad D = F = 0.$$

Les axes de l'ellipsoïde sont les *axes principaux d'inertie* du corps, relatifs au centre de gravité ou *axes centraux d'inertie*. Ils sont tels que les produits d'inertie correspondants sont nuls :

$$\sum myz = \sum mxz = \sum mxy = 0.$$

D'après ce qui précède, la condition pour que l'un des axes de coordonnées Gz soit axe central d'inertie est que l'équation de l'ellipsoïde ne contienne pas de termes du premier degré en z , c'est-à-dire que l'on ait :

$$\sum myz = 0, \quad \sum mxz = 0.$$

Les coefficients A, B, C qui figurent dans l'équation (204) sont les moments d'inertie du corps par rapport aux trois axes centraux d'inertie ; on les appelle *moments principaux d'inertie* du corps.

Cas particuliers.

1° Si les moments principaux d'inertie du corps relatifs à deux des axes centraux d'inertie, Gx et Gy par exemple, sont égaux :

$$A = B,$$

l'ellipsoïde est de révolution autour du troisième axe, ici Gz . Son équation devient :

$$A(x^2 + y^2) + Cz^2 = 1.$$

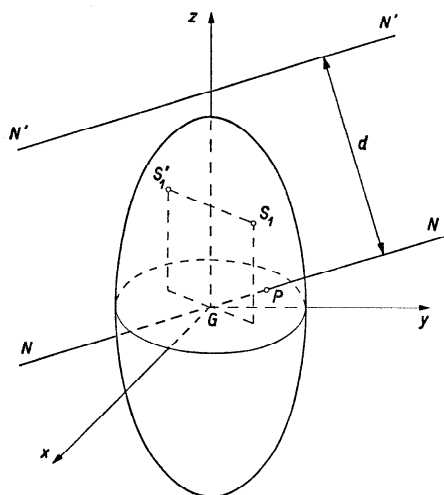


Fig. 234

Le corps admet alors une infinité d'axes centraux d'inertie, savoir l'axe de révolution Gz et tous les diamètres du plan de l'équateur.

2° Si les trois moments principaux d'inertie sont égaux :

$$A = B = C,$$

l'ellipsoïde est une sphère d'équation :

$$A(x^2 + y^2 + z^2) = 1.$$

Le rayon de cette sphère est :

$$R = \frac{1}{\sqrt{A}}.$$

Le moment d'inertie est le même par rapport à toute droite passant par G :

$$I = A.$$

Toute droite passant par le centre de gravité est axe central d'inertie.

Calcul d'un moment d'inertie. — Pour calculer le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe quelconque de l'espace, il suffit, d'après (201), de le calculer pour un axe parallèle passant par le centre de gravité.

Proposons-nous de déterminer le moment d'inertie I' d'un corps par rapport à une droite quelconque $N'N'$ située à la distance d du centre de gravité (fig. 234). La direction de cette droite est donnée par ses cosinus directeurs α, β, γ , en choisissant comme axes de coordonnées les axes centraux d'inertie du corps. Menons par le centre de gravité la droite parallèle NN . Cette droite coupe l'ellipsoïde central d'inertie en un point $P(x_0, y_0, z_0)$, ; nous avons :

$$Ax_0^2 + By_0^2 + Cz_0^2 = 1.$$

Soit I le moment d'inertie du corps par rapport à la droite NN passant par le centre de gravité. Puisque P est un point de l'ellipsoïde, nous pouvons écrire :

$$GP = \frac{1}{\sqrt{I}}.$$

Or :

$$x_0 = GP \cdot \alpha = \frac{\alpha}{\sqrt{I}}, \quad y_0 = \frac{\beta}{\sqrt{I}}, \quad z_0 = \frac{\gamma}{\sqrt{I}}.$$

En introduisant ces valeurs dans l'équation, nous trouvons :

$$I = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 \quad (205)$$

et finalement, d'après (201) :

$$I' = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + Md^2, \quad (206)$$

M étant la masse totale du corps.

Ainsi, pour calculer le moment d'inertie d'un corps par rapport à une droite quelconque, il suffit de connaître les trois moments principaux d'inertie A, B, C et la direction de la droite par rapport au système d'axes rectangulaires formé par les trois axes centraux d'inertie, direction donnée par les cosinus directeurs α, β, γ .

Propriétés des axes centraux d'inertie. — Pour un corps donné, les axes centraux d'inertie constituent des axes de rotation privilégiés jouissant, à l'exclusion de tout autre axe, des propriétés mécaniques suivantes :

Si l'axe de rotation coïncide avec un axe central d'inertie, les forces d'inertie n'ont aucune influence sur les réactions des appuis : le corps tournant est *dynamiquement équilibré*. A chaque instant, les réactions des appuis ont les mêmes valeurs que si le corps était en équilibre statique dans la même position.

Pour éviter qu'une rotation rapide du corps ne provoque des réactions dangereuses aux appuis, il est nécessaire que l'axe de rotation soit un axe central d'inertie.

Un corps ne peut tourner sans contrainte autour d'un axe fixe que si cet axe coïncide avec un des trois axes centraux d'inertie et si les forces qui lui sont directement appliquées se réduisent à un couple dont le plan est perpendiculaire à l'axe de rotation.

Si l'on communique à un corps libre, sur lequel n'agit aucune force, une rotation spontanée autour d'un des axes centraux d'inertie, ce corps continuera à tourner autour de cet axe d'un mouvement uniforme. Cette propriété a fait donner aux axes centraux d'inertie le nom d'axes spontanés de rotation.

La symétrie et la détermination des axes centraux d'inertie. — Pour calculer le moment d'inertie d'un corps par rapport à une droite quelconque, il est important de déterminer les axes centraux d'inertie. Cette détermination est simple si le corps présente une symétrie matérielle.

Un corps admet un plan π , un axe d ou un centre O de symétrie matérielle, si la région occupée par le corps admet le plan π , l'axe d ou le centre O comme plan, axe ou centre de symétrie et si, de plus, la masse spécifique en deux points symétriques est la même.

Lorsqu'un corps possède un plan π de symétrie matérielle, ce plan contient nécessairement le centre de gravité G (fig. 235). Prenons le plan de symétrie pour plan Gxy . A tout point $P(x, y, z)$ du corps, de masse m , correspond le point symétrique $P'(x, y, -z)$ de même masse. Il en résulte que :

$$\sum myz = 0, \quad \sum mxz = 0.$$

L'axe Gz perpendiculaire au plan π est donc axe central d'inertie.

Deux des axes centraux d'inertie sont dans le plan de symétrie, le troisième est perpendiculaire à ce plan.

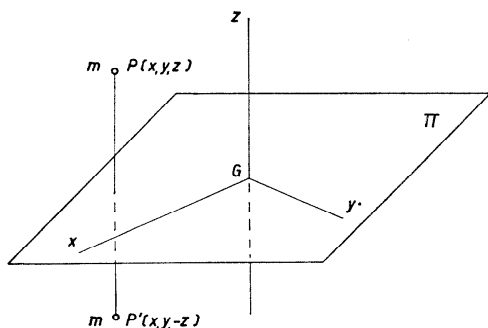


Fig. 235

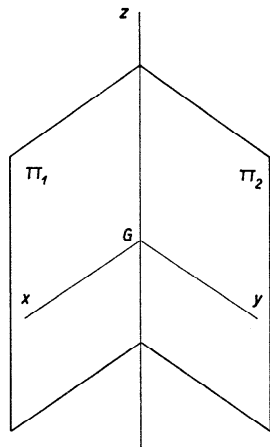


Fig. 236

Quand un corps possède deux plans π_1 et π_2 de symétrie matérielle et n'en possède que deux, ces plans sont nécessairement rectangulaires (fig. 236). Le centre de gravité G est sur la droite d'intersection des deux plans. Cette droite Gz est un axe central d'inertie, les deux autres étant les perpendiculaires à Gz dans les plans π_1 et π_2 , c'est-à-dire les droites Gx et Gy .

Quand un corps possède plus de deux plans de symétrie matérielle passant par la même droite, l'ellipsoïde central d'inertie est de révolution autour de cette droite qui est axe central d'inertie.

Si le corps a trois plans de symétrie matérielle π_1, π_2, π_3 ne passant pas par la même droite, ces plans sont rectangulaires deux à deux ; le point commun à ces trois plans est le centre de gravité G (fig. 237) ; les droites d'intersection Gx, Gy, Gz des plans sont les axes centraux d'inertie.

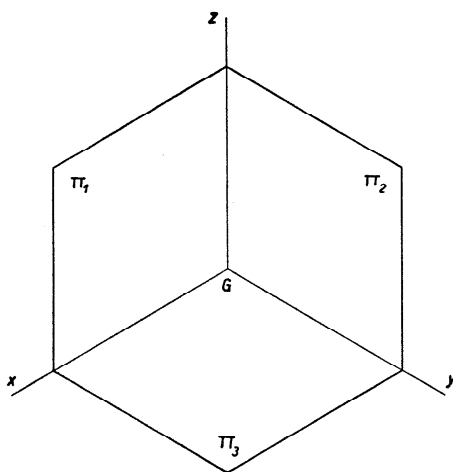


Fig. 237

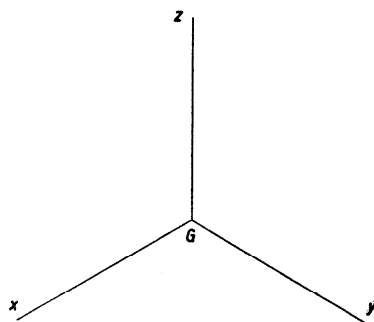


Fig. 238

Tout axe de symétrie matérielle du corps passe par le centre de gravité et est axe central d'inertie. Si le corps a trois axes de symétrie formant un trièdre trirectangle, le point commun est le centre de gravité et les axes, les axes centraux d'inertie (fig. 238).

Moments principaux d'inertie de quelques corps simples. — Dans les calculs qui suivent et qui ont pour but l'établissement des formules donnant les moments principaux d'inertie de quelques corps de formes simples, nous supposerons que nous avons affaire à des solides *homogènes*, de sorte que nous pourrions toujours poser :

$$M = V\delta,$$

M désignant la masse du corps, V son volume et δ sa masse spécifique.

Les formules obtenues seront écrites sous la forme $I = M\rho^2$, ce qui a l'avantage de faire ressortir le rayon de giration ρ .

Les trois axes centraux d'inertie seront désignés par Gx, Gy, Gz , et les moments d'inertie par rapport à ces axes ou moments principaux d'inertie par I_x, I_y, I_z .

PARALLÉLÉPIPÈDE RECTANGLE

Un parallélépipède rectangle admet trois axes de symétrie perpendiculaires deux à deux, se coupant au centre de gravité G ; ce sont les trois axes centraux d'inertie Gx , Gy , Gz (fig. 239). Soient a , b , c , les trois côtés; la masse du solide a pour valeur $M = abc\delta$.

Il est facile de calculer le moment d'inertie par rapport au plan (xy) , par exemple. A cet effet, décomposons le solide en plaques infiniment minces, parallèles au plan (xy) , d'épaisseur dz . La plaque comprise entre les plans de cotes z et $z + dz$ a une masse :

$$m = \delta \cdot abd z$$

et un moment d'inertie :

$$mz^2 = ab\delta z^2 dz,$$

par conséquent :

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \sum mz^2 = ab\delta \int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} z^2 dz \\ &= \frac{abc^3\delta}{12} = \frac{Mc^2}{12}. \end{aligned}$$

Nous trouverions de même :

$$I_{yz} = \frac{Ma^2}{12}, \quad I_{xz} = \frac{Mb^2}{12}.$$

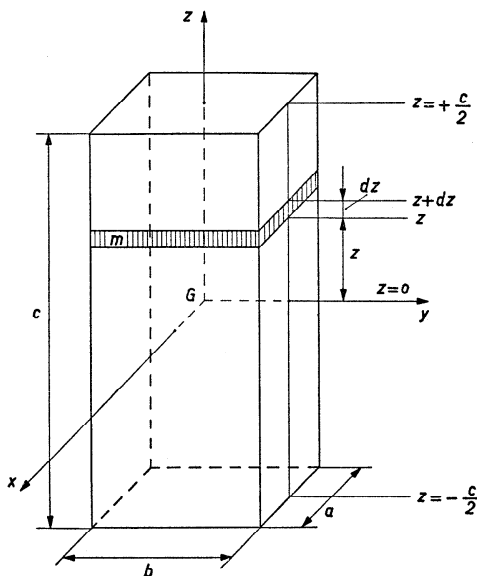


Fig. 239

Le moment principal d'inertie I_x par rapport à l'axe Gx est, d'après (198) :

$$I_x = I_{xz} + I_{xy} = \frac{Mb^2}{12} + \frac{Mc^2}{12},$$

soit :

$$I_x = M \frac{b^2 + c^2}{12}. \quad (207)$$

Nous obtiendrions de même :

$$I_y = M \frac{a^2 + c^2}{12}, \quad I_z = M \frac{a^2 + b^2}{12}. \quad (207)$$

Moment d'inertie par rapport à un axe parallèle à l'un des côtés. — Considérons un axe AB parallèle au côté c du parallélépipède (fig. 240).

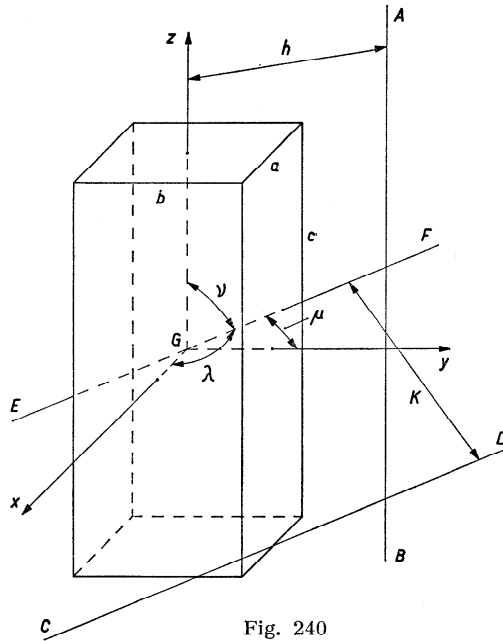


Fig. 240

Soit h la distance du centre de gravité à cet axe. D'après (201), nous avons :

$$I_{AB} = I_z + Mh^2,$$

soit :

$$I_{AB} = M \left(\frac{a^2 + b^2}{12} + h^2 \right). \quad (208)$$

Moment d'inertie par rapport à un axe quelconque. — Dans la figure 240, CD est une droite quelconque dont les cosinus directeurs α , β , γ par rapport aux axes Gx , Gy , Gz sont connus. Le moment d'inertie du parallélépipède par rapport à l'axe CD est donné par la formule (206) :

$$I_{CD} = I_x \alpha^2 + I_y \beta^2 + I_z \gamma^2 + Mk^2,$$

k désignant la distance du centre de gravité à cet axe. En tenant compte des formules (207), nous avons en définitive :

$$I_{CD} = M \left[\frac{a^2(\beta^2 + \gamma^2) + b^2(\alpha^2 + \gamma^2) + c^2(\alpha^2 + \beta^2)}{12} + k^2 \right]. \quad (209)$$

CYLINDRE DE RÉVOLUTION

L'axe de révolution Gz est axe central d'inertie. Il en est de même de tout axe passant par le centre de gravité et perpendiculaire à Gz . Pour des raisons de symétrie, nous avons :

$$I_x = I_y;$$

l'ellipsoïde central d'inertie est de révolution autour de Gz .

Soient R et h le rayon et la hauteur du cylindre ; sa masse a pour valeur $M = \pi R^2 h \delta$.

Moment d'inertie par rapport à un plan (xy) passant par le centre de gravité et perpendiculaire à l'axe Gz . — Décomposons le solide en plaques circulaires infiniment minces parallèles au plan (xy) , d'épaisseur dz (fig. 241). La plaque comprise entre les plans de cotes z et $z + dz$ a une masse :

$$m = \pi R^2 \delta dz$$

et un moment d'inertie :

$$mz^2 = \pi R^2 \delta z^2 dz.$$

Le moment d'inertie du cylindre par rapport au plan (xy) aura donc pour valeur :

$$I_{xy} = \sum mz^2 = \pi R^2 \delta \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 dz = \frac{\pi R^2 h^3 \delta}{12},$$

soit :

$$I_{xy} = M \frac{h^2}{12}. \quad (210)$$

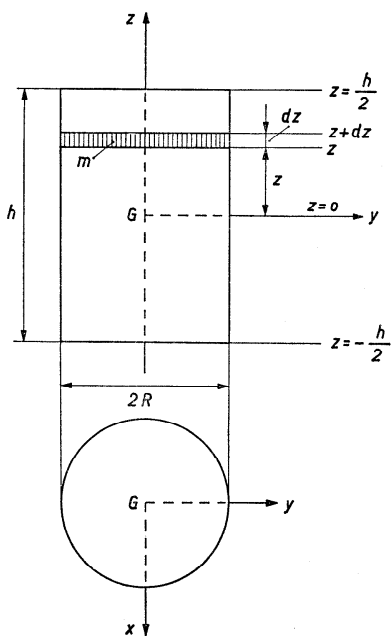


Fig. 241

Moment d'inertie par rapport à l'axe de révolution Gz . — Décomposons le solide en couches cylindriques infiniment minces, d'épaisseur dr

(fig. 242). La couche comprise entre les cylindres de rayons r et $r + dr$ a une masse :

$$m = 2\pi r dr \cdot h \cdot \delta$$

et un moment d'inertie par rapport à l'axe Gz :

$$mr^2 = 2\pi h \delta r^3 dr.$$

Le moment d'inertie du cylindre par rapport à l'axe Gz sera donc :

$$I_z = \sum mr^2 = 2\pi h \delta \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi R^4 h \delta}{2},$$

soit :

$$I_z = M \frac{R^2}{2}. \quad (210a)$$

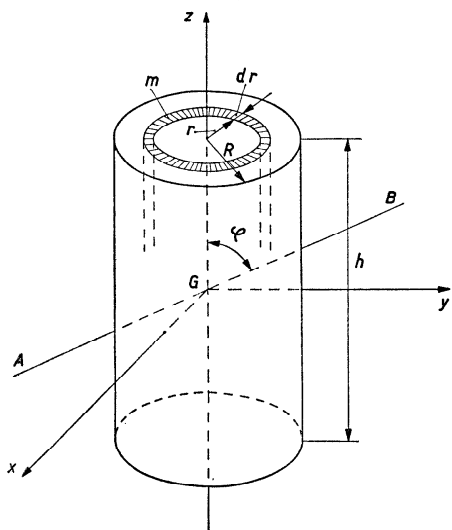


Fig. 242

Moment d'inertie par rapport à un plan quelconque passant par l'axe de révolution. — Le moment d'inertie est le même par rapport à n'importe quel plan passant par l'axe Gz . Nous aurons donc, en particulier :

$$I_{xz} = I_{yz}.$$

Mais, d'après (200) :

$$I_z = I_{xz} + I_{yz} = 2I_{xz},$$

d'où nous tirons le moment d'inertie du cylindre par rapport au plan (xz) ou (yz) :

$$I_{xz} = I_{yz} = \frac{I_z}{2} = M \frac{R^2}{4}. \quad (211)$$

Moment d'inertie par rapport à un axe passant par le centre de gravité et perpendiculaire à l'axe de révolution. — Le moment d'inertie est le même par rapport à tout axe passant par G et perpendiculaire à Gz (fig. 242).

D'après (198), (210) et (211), nous pouvons écrire :

$$I_x = I_{xy} + I_{xz} = M \frac{h^2}{12} + M \frac{R^2}{4},$$

soit :

$$I_x = M \frac{3R^2 + h^2}{12}.$$

Formulaire. — Les trois moments principaux d'inertie relatifs au centre de gravité ont pour valeurs :

$$\begin{aligned} I_x = I_y &= M \frac{3R^2 + h^2}{12}, \\ I_z &= M \frac{R^2}{2}. \end{aligned} \quad (212)$$

Moment d'inertie par rapport à un axe quelconque passant par le centre de gravité. — Soit AB une droite quelconque passant par le centre de gravité G et faisant l'angle φ avec l'axe Gz (fig. 242). Nous ne changeons pas le moment d'inertie en prenant la droite AB dans le plan (yz) ; elle fait alors avec les axes de coordonnées Gx , Gy , Gz les angles $\lambda = 90^\circ$, $\mu = 90^\circ - \varphi$, $\nu = \varphi$. Les cosinus directeurs sont donc :

$$\alpha = \cos \lambda = 0, \quad \beta = \cos \mu = \sin \varphi, \quad \gamma = \cos \nu = \cos \varphi.$$

D'après (205), le moment d'inertie par rapport à l'axe AB est :

$$\begin{aligned} I_{AB} &= I_x \alpha^2 + I_y \beta^2 + I_z \gamma^2 \\ &= M \frac{3R^2 + h^2}{12} \sin^2 \varphi + M \frac{R^2}{2} \cos^2 \varphi. \end{aligned}$$

Finalement :

$$I_{AB} = M \frac{3R^2(1 + \cos^2 \varphi) + h^2 \sin^2 \varphi}{12}. \quad (213)$$

CYLINDRE CREUX DE RÉVOLUTION

L'axe de révolution Gz est axe central d'inertie. Il en est de même de tout axe passant par le centre de gravité et perpendiculaire à Gz .

Soient R , r et h , le rayon extérieur, le rayon intérieur et la hauteur du cylindre creux (fig. 243); la masse vaut $M = \pi(R^2 - r^2)h\delta$.

Le moment d'inertie du cylindre creux par rapport à un axe quelconque est égal à la différence des moments d'inertie du cylindre supposé plein et d'un cylindre de même substance remplissant complètement le vide.

Proposons-nous de calculer I_x et appelons I'_x et I''_x les moments d'inertie des deux cylindres pleins dont le cylindre creux est la différence :

$$I_x = I'_x - I''_x.$$

D'après (212) :

$$I'_x = M' \frac{3R^2 + h^2}{12},$$

où $M' = \pi R^2 h \delta$, et

$$I''_x = M'' \frac{3r^2 + h^2}{12},$$

où $M'' = \pi r^2 h \delta$. Il viendra donc :

$$\begin{aligned} I_x &= \pi R^2 h \delta \frac{3R^2 + h^2}{12} - \pi r^2 h \delta \frac{3r^2 + h^2}{12} \\ &= \pi (R^2 - r^2) h \delta \frac{3(R^2 + r^2) + h^2}{12} \\ &= M \frac{3(R^2 + r^2) + h^2}{12}. \end{aligned}$$

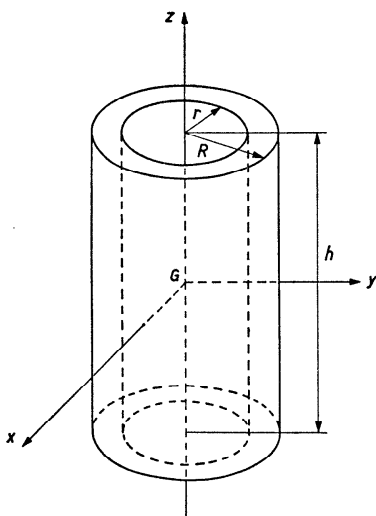


Fig. 243

Un calcul semblable nous donnerait :

$$I_z = I'_z - I''_z = M' \frac{R^2}{2} - M'' \frac{r^2}{2} = M \frac{R^2 + r^2}{2}.$$

Formulaire. — Les trois moments principaux d'inertie relatifs au centre de gravité ont pour valeurs :

$$\begin{aligned} I_x &= I_y = M \frac{3(R^2 + r^2) + h^2}{12}, \\ I_z &= M \frac{R^2 + r^2}{2}. \end{aligned} \tag{214}$$

CÔNE DE RÉVOLUTION

L'axe de révolution Gz est axe central d'inertie. Il en est de même de tout axe passant par le centre de gravité et perpendiculaire à Gz . Pour des raisons de symétrie, nous avons :

$$I_x = I_y;$$

l'ellipsoïde central d'inertie est de révolution autour de Gz .

Soient R et h , le rayon et la hauteur du cône ; la masse a pour valeur :

$$M = \frac{1}{3} \pi R^2 h \delta .$$

Moment d'inertie par rapport à l'axe de révolution Gz . — Prenons le sommet O du cône comme origine des cotes sur l'axe des z (fig. 244). Par des plans perpendiculaires à l'axe Gz , décomposons le solide en plaques infiniment minces, d'épaisseur dz . La plaque située entre les plans de cotes z et $z + dz$ peut être assimilée, à un infiniment petit d'ordre supérieur près, à un cylindre de rayon r et de hauteur dz . La masse de cette plaque est donc :

$$m = \delta \cdot \pi r^2 dz$$

et son moment d'inertie par rapport à l'axe Gz , d'après (212) :

$$dI_z = m \frac{r^2}{2} = \frac{1}{2} \pi \delta r^4 dz .$$

Mais $\frac{r}{z} = \frac{R}{h}$ et, par conséquent, $r = \frac{R}{h} z$.

Il viendra donc :

$$dI_z = \frac{1}{2} \pi \delta \left(\frac{R}{h} \right)^4 z^4 dz .$$

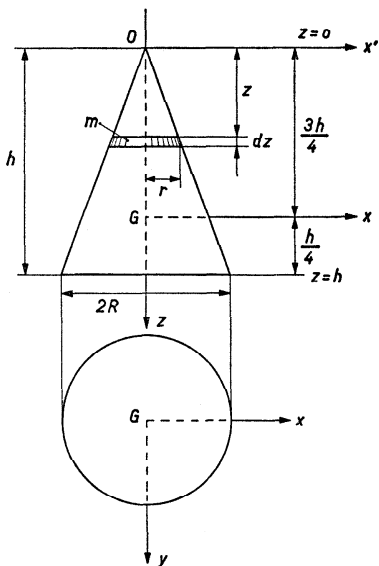


Fig. 244

Le moment d'inertie du cône par rapport à l'axe Gz aura pour valeur :

$$I_z = \sum dI_z = \frac{1}{2} \pi \delta \left(\frac{R}{h} \right)^4 \int_0^h z^4 dz = \frac{1}{10} \pi \delta R^4 h = M \cdot \frac{3R^2}{10} .$$

Moment d'inertie par rapport à un axe passant par le centre de gravité et perpendiculaire à l'axe de révolution. — Commençons par déterminer le moment d'inertie I' par rapport à l'axe Ox' parallèle à Gx et passant par le sommet du cône (fig. 244). Effectuons la même décomposition que précédemment. D'après (201) et (213), le moment d'inertie de la plaque comprise entre les plans de cotes z et $z + dz$ par rapport à l'axe Ox' a pour valeur :

$$dI' = m \frac{3r^2 + dz^2}{12} + mz^2 = \pi r^2 dz \cdot \delta \cdot \frac{3r^2 + dz^2}{12} + \pi r^2 dz \cdot \delta \cdot z^2.$$

En ne conservant que les infiniment petits du 1^{er} ordre, il viendra :

$$dI' = \pi \delta \left(\frac{r^2}{4} + z^2 \right) r^2 dz.$$

Mais $r = \frac{R}{h} z$ et, par conséquent :

$$dI' = \frac{\pi \delta R^2}{h^2} \left(\frac{R^2}{4h^2} + 1 \right) z^4 dz.$$

Le moment d'inertie du cône par rapport à l'axe Ox' sera donc :

$$\begin{aligned} I' &= \sum dI' = \frac{\pi \delta R^2}{h^2} \left(\frac{R^2}{4h^2} + 1 \right) \int_0^h z^4 dz \\ &= \frac{1}{3} \pi R^2 h \delta \cdot \frac{3}{5} \left(\frac{R^2}{4} + h^2 \right) = M \frac{3R^2 + 12h^2}{20}. \end{aligned}$$

D'après (201), nous pouvons écrire :

$$I_x = I' - M \left(\frac{3h}{4} \right)^2 = M \frac{3R^2 + 12h^2}{20} - M \frac{9h^2}{16} = M \cdot \frac{3}{20} \left(R^2 + \frac{h^2}{4} \right).$$

Formulaire. — Les trois moments principaux d'inertie relatifs au centre de gravité ont pour valeurs :

$$\begin{aligned} I_x &= I_y = M \cdot \frac{3}{20} \left(R^2 + \frac{h^2}{4} \right), \\ I_z &= M \cdot \frac{3R^2}{10}. \end{aligned} \tag{215}$$

SPHÈRE

Tout diamètre de la sphère est axe central d'inertie. L'ellipsoïde central d'inertie est une sphère, nous avons donc :

$$I_x = I_y = I_z.$$

Soit R le rayon de la sphère ; sa masse a pour valeur $M = \frac{4}{3} \pi R^3 \delta$.

Moment d'inertie par rapport au centre. —
Décomposons la sphère en couches sphériques concentriques infiniment minces, d'épaisseur dr (fig. 245). La couche comprise entre les sphères de rayons r et $r + dr$ a une masse :

$$m = \delta \cdot 4\pi r^2 dr$$

et un moment d'inertie par rapport au centre G :

$$mr^2 = 4\pi\delta r^4 dr.$$

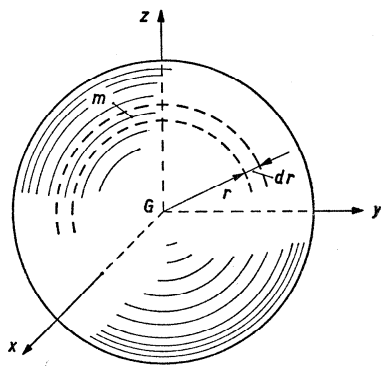


Fig. 245

Le moment d'inertie de la sphère par rapport à G est donc :

$$I_G = \sum mr^2 = 4\pi\delta \int_0^R r^4 dr = \frac{4}{5} \pi\delta R^5 = M \cdot \frac{3R^2}{5}. \quad (216 a)$$

Moment d'inertie par rapport à un diamètre. — D'après (196) nous avons :

$$\frac{1}{2}(I_x + I_y + I_z) = I_G$$

ou

$$\frac{3}{2} I_x = M \frac{3R^2}{5},$$

donc :

$$I_x = M \frac{2R^2}{5}.$$

Les trois moments principaux d'inertie relatifs au centre de gravité ont donc pour valeur :

$$I_x = I_y = I_z = M \frac{2R^2}{5}. \quad (216 b)$$

ELLIPSOÏDE DE RÉVOLUTION

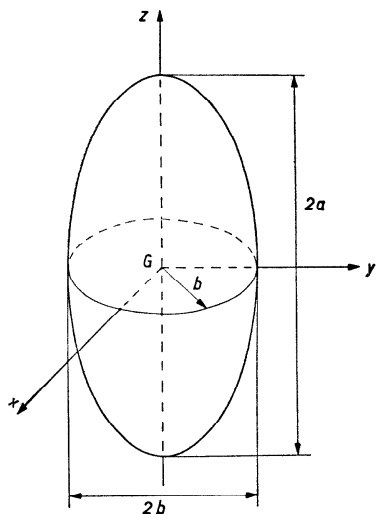


Fig. 246

La figure 246 fixe les données. La masse est :

$$M = \frac{4}{3} \pi a b^2 \delta.$$

Les trois moments principaux d'inertie relatifs au centre de gravité G ont pour valeurs :

$$I_x = I_y = M \frac{a^2 + b^2}{5}, \quad (217)$$

$$I_z = M \frac{2b^2}{5}.$$

TORE

Le théorème de Guldin permet de calculer facilement le volume du tore (fig. 247) :

$$V = 2\pi R \cdot \pi r^2.$$

Sa masse a donc pour valeur :

$$M = 2\pi^2 R r^2 \delta.$$

Les trois moments principaux d'inertie relatifs au centre de gravité sont :

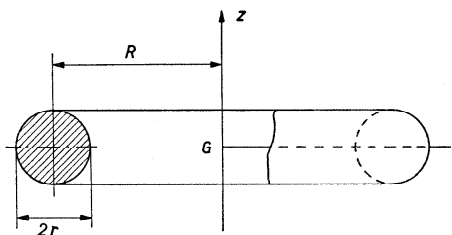


Fig. 247

$$I_x = I_y = M \left(\frac{R^2}{2} + \frac{5r^2}{8} \right), \quad I_z = M \left(R^2 + \frac{3r^2}{4} \right). \quad (218)$$

Moment d'inertie d'un solide homogène de révolution par rapport à son axe. — Soit $r = f(z)$ l'équation de la méridienne AB (fig. 248). Nous supposons le solide de révolution limité par les plans de cotes z_1 et z_2 .

Par des plans perpendiculaires à l'axe, nous décomposons le solide en plaques infiniment minces d'épaisseur dz . La plaque comprise entre les

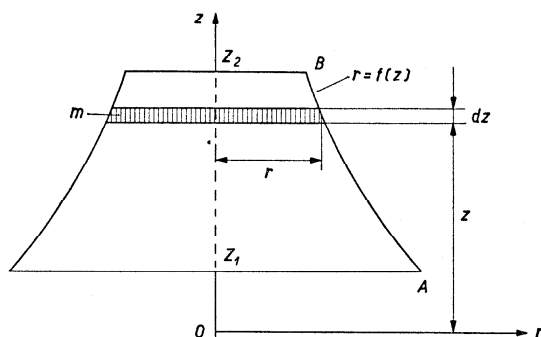


Fig. 248

plans de cotes z et $z + dz$ est assimilée à un cylindre de rayon r et de hauteur dz . La masse de cette plaque est donc :

$$m = \pi r^2 dz \delta ;$$

son moment d'inertie par rapport à l'axe Oz a pour valeur :

$$dI_z = m \frac{r^2}{2} = \frac{1}{2} \pi \delta r^4 dz .$$

Le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Oz vaut donc :

$$I_z = \sum dI_z = \frac{1}{2} \pi \delta \int_{z_1}^{z_2} r^4 dz . \quad (219)$$

Système matériel plan. — Si tous les éléments matériels qui constituent le corps sont dans un même plan π (cas d'une plaque plane dont l'épaisseur est négligeable vis-à-vis des autres dimensions), ce plan contient le centre de gravité G ; l'axe Gz normal au plan est axe central d'inertie. Les deux autres axes centraux Gx et Gy sont dans le plan π (fig. 249).

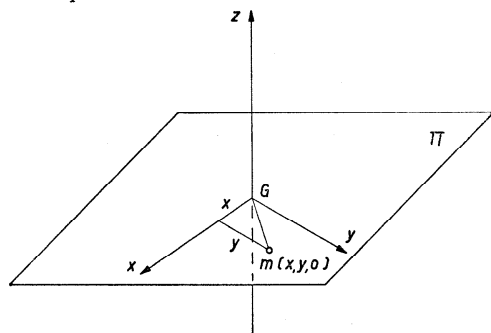


Fig. 249

La coordonnée étant toujours nulle, nous avons :

$$A = I_x = \sum my^2, \quad B = I_y = \sum mx^2,$$

$$C = I_z = \sum m(x^2 + y^2) = A + B,$$

donc :

$$I_z = I_x + I_y. \quad (220)$$

Pour un système matériel plan, le moment principal d'inertie par rapport à l'axe Gz perpendiculaire à son plan est égal à la somme des deux autres moments principaux d'inertie.

Remarquons que l'ellipsoïde central d'inertie est entièrement déterminé dès que sont connus, dans le plan d'orientation, les deux axes centraux d'inertie Gx , Gy et les moments principaux d'inertie A et B , autrement dit lorsque l'ellipse centrale d'inertie :

$$Ax^2 + By^2 = 1,$$

intersection de l'ellipsoïde et du plan π d'équation $z = 0$, est déterminée.

L'ellipse centrale d'inertie va jouer vis-à-vis des axes du plan le même rôle que l'ellipsoïde central d'inertie vis-à-vis des axes de l'espace. Con-

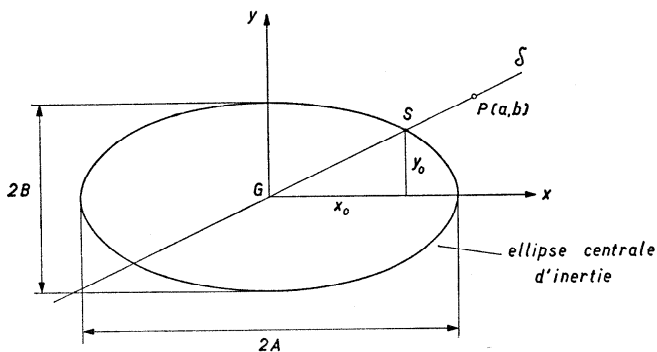


Fig. 250

sidérons un axe quelconque δ passant par le centre de gravité G et contenu dans le plan π (fig. 250).

Définissons la position de l'axe δ dans le plan en nous donnant un point $P(a, b)$ de cet axe. L'intersection $S(x_0, y_0)$ de l'axe δ avec l'ellipsoïde central d'inertie est également l'intersection de cet axe avec l'ellipse centrale d'inertie :

$$Ax^2 + By^2 = 1.$$

Le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe δ a donc pour valeur :

$$I = \frac{1}{GS^2} = \frac{1}{x_0^2 + y_0^2}.$$

Le point S appartenant à l'ellipse et à la droite δ , nous avons simultanément :

$$Ax_0^2 + By_0^2 = 1, \quad y_0 = \frac{b}{a} x_0,$$

d'où nous tirons :

$$x_0^2 = \frac{a^2}{Aa^2 + Bb^2}, \quad y_0^2 = \frac{b^2}{Aa^2 + Bb^2}$$

et, par suite :

$$\overline{GS^2} = x_0^2 + y_0^2 = \frac{a^2 + b^2}{Aa^2 + Bb^2}.$$

Nous aurons finalement :

$$I = \frac{1}{x_0^2 + y_0^2} = \frac{Aa^2 + Bb^2}{a^2 + b^2}. \quad (221)$$

Moments principaux d'inertie de quelques systèmes matériels plans. —

Considérons une plaque plane dont l'épaisseur est petite par rapport aux autres dimensions. Si σ est la densité superficielle de la matière au point A , un élément de surface dS entourant ce point peut être assimilé à une masse $m = \sigma dS$ placée en ce point. Le moment d'inertie de la plaque par rapport à un point, un axe ou un plan a pour valeur :

$$I = \sum mr^2 = \int \int_{(S)} r^2 \sigma dS. \quad (222)$$

Si la plaque est homogène, la densité σ est constante et nous pouvons écrire :

$$I = \sigma \int \int_{(S)} r^2 dS.$$

Dans certains cas particuliers, en choisissant une décomposition convenable de la plaque en éléments dS , le calcul du moment d'inertie peut être effectué au moyen d'une intégrale simple.

Proposons-nous de calculer les moments principaux d'inertie de quelques plaques homogènes simples, en utilisant les résultats acquis jusqu'ici.

PLAQUE RECTANGULAIRE

La plaque est un parallélépipède rectangle dont l'épaisseur c est petite par rapport aux autres dimensions a et b (fig. 251); il en résulte que c^2 est négligeable par rapport à a^2 et b^2 .

Les formules (207) deviennent donc :

$$I_x = M \frac{b^2}{12}, \quad I_y = M \frac{a^2}{12}, \quad I_z = M \frac{a^2 + b^2}{12}. \quad (223)$$

Nous retrouvons bien la propriété des systèmes matériels plans :

$$I_z = I_x + I_y.$$

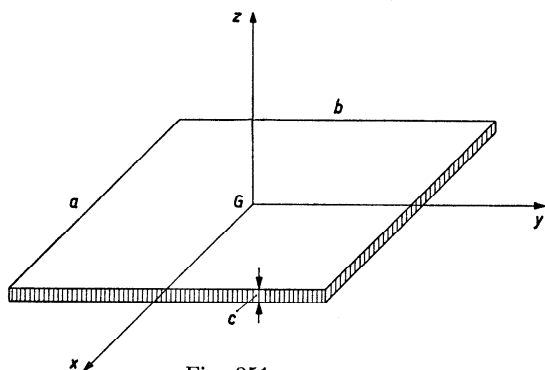


Fig. 251

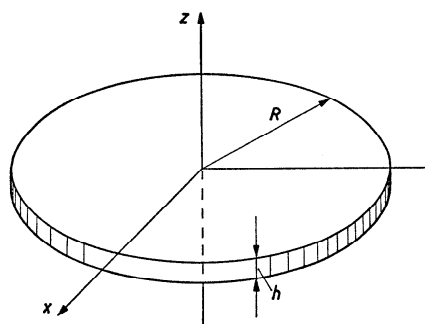


Fig. 252

DISQUE CIRCULAIRE

Le disque circulaire est un cylindre de révolution dont la hauteur h est petite par rapport à R (fig. 252); il en résulte que h^2 est négligeable par rapport à R^2 ; les formules (212) deviennent dès lors :

$$I_x = I_y = M \frac{R^2}{4}, \quad I_z = M \frac{R^2}{2}. \quad (224)$$

ANNEAU CIRCULAIRE OU CERCEAU

Si l'anneau a une section S dont les dimensions linéaires sont petites par rapport au rayon R (fig. 253) et quelle que soit la forme de cette section, nous pouvons considérer que toute la masse est située à la distance R du centre G , donc de l'axe Gz . Nous avons ainsi :

$$I_z = MR^2.$$

Les moments d'inertie par rapport aux diamètres Gx et Gy sont égaux. D'après (220) :

$$I_z = I_x + I_y = 2I_x = MR^2,$$

d'où :

$$I_x = I_y = M \frac{R^2}{2}, \quad I_z = MR^2. \quad (225)$$

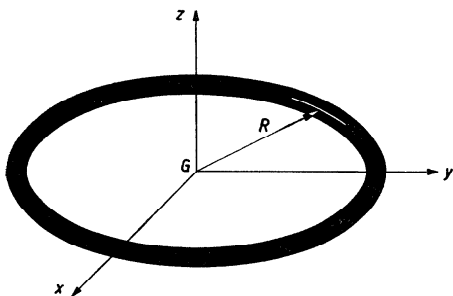


Fig. 253

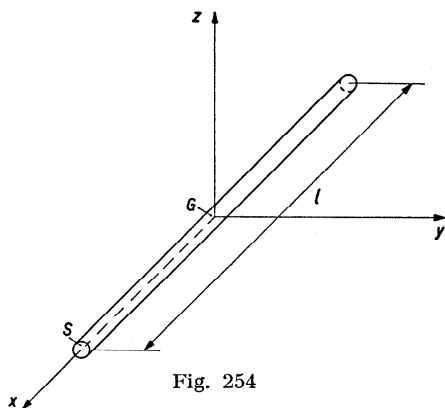


Fig. 254

BAGUETTE RECTILIGNE

Soit une baguette de longueur l et de section S , les dimensions linéaires de la section S étant négligeables par rapport à l (fig. 254). Nous pouvons assimiler la baguette à un cylindre de rayon R négligeable, et de hauteur l , ou à un parallélépipède de côtés $b = c \cong 0$ et $a = l$. Les formules (212) ou (207) deviennent pour ce cas particulier :

$$I_x = 0, \quad I_y = I_z = M \frac{l^2}{12}, \quad (226)$$

où $M = \lambda l$, λ représentant la densité linéaire (masse de l'unité de longueur).

Moment d'inertie d'une surface plane. — Dans le chapitre IV (t. I, p. 101), nous avons introduit le moment d'inertie d'une surface plane — rectangle, cercle — par rapport à un axe situé dans le plan de la surface. Il s'agissait d'une expression de la forme :

$$I = \sum r^2 dS,$$

dS étant un élément de surface.

Ce moment d'inertie *géométrique*, qui intervient en élasticité et en résistance des matériaux, a pour dimensions L^4 . Il ne doit donc pas être confondu avec notre moment d'inertie *massique* :

$$I = \sum mr^2,$$

qui intervient en dynamique et dont les dimensions sont ML^2 .

Nous pouvons toutefois, dans la détermination des moments d'inertie géométriques, appliquer les formules relatives à un système matériel plan

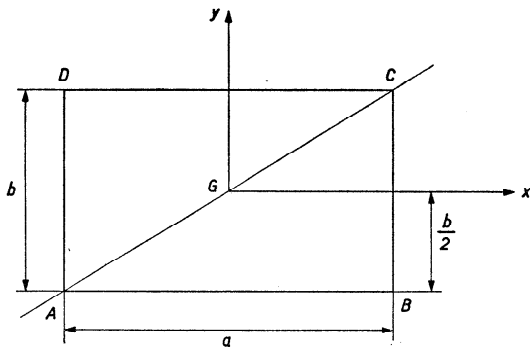


Fig. 255

en assimilant la surface à une plaque plane dont la densité superficielle σ est égale à l'unité : chaque élément qui constitue la plaque a une masse m égale à son aire dS ; la masse totale devient S . D'après (222), nous avons, pour le moment d'inertie géométrique :

$$I = \iint_{(S)} r^2 dS.$$

Prenons comme exemple un rectangle de côtés a et b (fig. 255) et calculons son moment d'inertie par rapport à différents axes.

Moment d'inertie par rapport à l'axe Gx . — Posons $M = S = ab$. D'après (223), nous avons :

$$I_x = M \frac{b^2}{12} = ab \frac{b^2}{12} = \frac{ab^3}{12}.$$

Nous trouverions de même :

$$I_y = \frac{ba^3}{12}.$$

Dans ces expressions, nous retrouvons la formule (7).

Moment d'inertie par rapport au côté AB. — D'après (201), nous avons :

$$I_{AB} = I_x + M\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{ab^3}{12} + \frac{ab^3}{4} = \frac{ab^3}{3}.$$

Moment d'inertie par rapport au centre G. — Le moment d'inertie polaire I_G n'est autre que le moment d'inertie par rapport à l'axe Gz perpendiculaire au plan du rectangle. D'après (220), nous avons :

$$I_G = I_z = I_x + I_y = \frac{ab^3}{12} + \frac{ba^3}{12} = \frac{ab}{12}(a^2 + b^2).$$

Moment d'inertie par rapport à la diagonale AC. — La position de l'axe AC est donnée par le point C de coordonnées $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}$. Nous avons, d'après (221) :

$$I_{AC} = \frac{I_x\left(\frac{a}{2}\right)^2 + I_y\left(\frac{b}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{a^3b^3}{6(a^2 + b^2)}.$$

CHAPITRE IX

LES ÉCHAPPEMENTS

Fonctions de l'échappement. — Le dispositif appelé « échappement » a pour fonction d'entretenir les oscillations du régulateur (pendule ou balancier-spiral), amorties par les frottements et la résistance de l'air. Cet entretien se fait soit par des impulsions, soit par un brusque déplacement de la position d'équilibre du régulateur ; ces interventions sont périodiques, et l'intervalle entre deux interventions successives est généralement la durée d'une alternance ou celle d'une oscillation. A chaque intervention de l'échappement, une dent de la roue « s'échappe », d'où le nom du dispositif. En général la roue d'échappement est au repos avant l'impulsion ; pendant l'impulsion elle se meut, puis elle est arrêtée immédiatement après. Le mouvement de la roue n'est pas continu, mais saccadé ; il a, comme conséquence, le mouvement saccadé de toutes les roues et de tous les pignons du rouage jusqu'au barillet et celui des roues de la minuterie et des aiguilles.

En choisissant judicieusement les nombres des dents des roues et des pignons d'après la période du régulateur et d'après l'intervalle entre deux interventions successives de l'échappement, on donne à la roue des secondes une vitesse de 1 tour par minute et à celle des minutes la vitesse de 1 tour par heure.

L'échappement remplit donc deux fonctions : 1^o il entretient les oscillations du régulateur en transmettant à celui-ci, à petites doses, l'énergie du poids ou du ressort moteur, qui arrive à l'échappement à travers le rouage ; 2^o il permet le déroulement régulier du rouage de façon que les aiguilles indiquent la durée des oscillations effectuées par le régulateur.

L'échappement fonctionne généralement ainsi : la roue d'échappement est arrêtée par une autre pièce de l'échappement. A un certain moment, cet arrêt est supprimé par le balancier ou par la pendule : c'est le *dégagement*, qui libère la roue d'échappement dont une dent est en état

de donner une *impulsion* directement ou indirectement à une pièce solidaire de l'organe régulateur. L'impulsion terminée, la roue d'échappement est de nouveau en repos jusqu'au dégagement suivant.

Classification des échappements. — Les échappements sont extrêmement nombreux; il y en a des centaines, mais en pratique, seuls quelques-uns sont utilisés.

Ils sont généralement classés d'après la durée du contact entre la roue et une pièce solidaire du régulateur.

Dans les *échappements à contact permanent* il y a toujours une dent de la roue qui appuie sur l'arbre du régulateur ou sur une pièce plus ou moins solidaire du régulateur.

L'oscillation du pendule ou du balancier peut être décomposée; envisageons, par exemple, l'alternance d'un balancier représenté, pour simplifier, par un seul bras (fig. 256); OA est la position d'équilibre; OE_1 et OE_2 , les positions extrêmes. Le balancier partant de OE_1 parcourt d'abord l'arc E_1B ; pendant ce temps la position relative de la roue et du balancier reste la même. Le dégagement commence en OB ; il sera

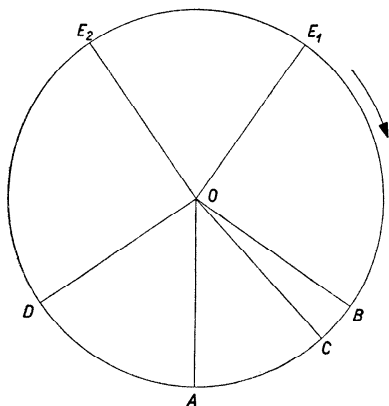


Fig. 256

terminé quand le balancier aura la position OC ; à ce moment la roue sera libérée et l'impulsion commencera (nous verrons plus tard qu'elle commence un peu après la fin du dégagement). L'impulsion durera jusqu'à ce que le balancier ait atteint la position OD nécessairement symétrique de OB par rapport à la position d'équilibre OA dans les échappements où une impulsion est donnée à chaque alternance.

Par rapport au balancier, nous conviendrons d'appeler l'angle BOC , l'*angle de dégagement*, l'angle COD , l'*angle d'impulsion*, l'angle BOD , l'*angle de levée*, et les angles E_1OB et DOE_2 , les *angles ou arcs supplémentaires*.

Les *échappements à contact périodique* ont l'avantage de laisser le balancier libre pendant qu'il décrit les angles ou arcs supplémentaires. Les oscillations du balancier sont isochrones si le balancier n'est soumis qu'à la force de rappel du spiral; les résistances détruisent plus ou moins l'isochronisme; une de ces résistances est celle de la roue d'échappement qui appuie directement ou indirectement sur le régulateur. Qu'il s'agisse

d'un pendule ou d'un balancier-spiral, il faut laisser la plus grande liberté possible au régulateur. Le contact périodique entre la roue d'échappement et l'organe réglant est préférable au contact permanent.

Enfin nous avons, pour les horloges à pendule, des échappements qui entretiennent le mouvement du pendule par un *déplacement brusque de la position d'équilibre*. Il n'y a pas de contact entre la roue et le pendule : ce dernier oscille librement.

Citons les échappements les plus connus :

1° *échappements à contact permanent*. — Pour les montres, l'échappement à roue de rencontre, l'échappement à cylindre, l'échappement duplex ; pour les horloges à pendule, l'échappement à roue de rencontre, l'échappement à ancre à recul, l'échappement de Graham et l'échappement de Brocot ;

2° *échappements à contact périodique ou échappements libres*. — Pour les appareils à balancier-spiral, l'échappement à ancre et l'échappement à détente ;

3° *échappements libres à entretien par déplacement de la position d'équilibre*. — Les échappements de Riefler et de Strasser utilisés dans les horloges à pendule.

Le repos dans les échappements. — Lorsque la roue d'échappement est arrêtée, c'est-à-dire pendant que l'organe réglant parcourt les angles supplémentaires et l'angle de dégagement, elle est appuyée — elle *repose* — contre une pièce solidaire ou en contact permanent avec le régulateur (échappement à contact permanent) ou sur une pièce indépendante de l'organe réglant (échappement à contact périodique).

En lisant que la roue est arrêtée, il faut comprendre qu'elle est arrêtée dans son mouvement normal ; cela ne signifie pas toujours qu'elle est immobile.

Dans certains cas, pendant que le régulateur décrit les angles supplémentaires et l'angle de dégagement, la roue est obligée de reculer ; ces *échappements à recul* ont une pièce avec des surfaces de repos excentriques par rapport à l'axe du régulateur : les dents de la roue d'échappement s'appuient successivement sur ces surfaces de repos. Il en est ainsi dans l'échappement à roue de rencontre et dans l'échappement à ancre à recul des pendules.

Si la surface de repos est concentrique à l'axe de la pièce à laquelle elle appartient, la roue d'échappement peut rester en contact avec cette pièce sans être obligée de reculer. Les échappements ainsi construits étaient appelés autrefois échappements à repos ; nous les désignerons plus correctement sous le nom d'*échappements à contact permanent*

sans recul. Parmi ceux-ci citons, pour les montres, les échappements à cylindre et duplex, pour les horloges à pendule, l'échappement de Graham.

La restitution de l'énergie par l'échappement. — L'échappement reçoit à travers le rouage une certaine quantité d'énergie qu'il transmet à l'organe réglant. Cette transmission ne se fait pas sans perte et il serait vain d'espérer avoir un jour un échappement qui rendrait toute l'énergie qu'il reçoit. Cet échappement parfait n'assurerait pas au balancier des impulsions d'intensité constante, puisque cette intensité ne dépend pas seulement du bon fonctionnement de l'échappement, mais aussi de la valeur absolue de l'énergie transmise. Cette dernière serait égale — si le rendement de l'échappement était de 100 % — à l'énergie reçue, mais celle-ci n'est pas constante parce que, d'une part, l'énergie fournie par un ressort dépend de l'état de tension du ressort, d'autre part les engrenages ne transmettent pas cette énergie de façon régulière. Nous avons vu au chapitre VI (t. I, p. 252) que les oscillations successives d'un balancier n'ont pas la même amplitude et que, dans le diagramme d'enregistrement des amplitudes, se marquent le passage des dents du barillet dans le pignon des minutes, des dents de la roue des minutes dans le pignon de moyenne, etc.

La variation des amplitudes des oscillations de l'organe régulateur (pendule ou balancier-spiral) est un inconvénient grave que les horlogers cherchent depuis longtemps à combattre. Ils ont fait appel à la fusée pour régulariser la force du ressort à la sortie du barillet. Mais la fusée laisse subsister les irrégularités produites par les engrenages.

Ils ont également imaginé bien des systèmes pour égaliser la force motrice qui arrive à l'échappement. Ces dispositifs appelés autrefois *remontoirs d'égalité* sont souvent désignés aujourd'hui par l'expression *échappements à force constante*. Cette dénomination n'est pas heureuse car elle laisse supposer qu'il s'agit d'échappements spéciaux dont la fonction est de régulariser la force irrégulière qu'ils reçoivent. Il vaut mieux parler de *dispositifs à force constante*.

Ces mécanismes substituent généralement à la force motrice (poids ou ressort) une force plus petite, mais agissant à la façon d'un relais, tout près de l'échappement. Cette dernière force est restaurée très souvent, parfois à chaque alternance de l'organe oscillant. Le ressort de barillet ou le poids moteur servent à maintenir dans la même intensité la force-relais qui est un poids ou un ressort-spiral agissant sur la roue des secondes ou sur la roue d'échappement; la force motrice remonte à intervalles réguliers le poids-relais à une certaine hauteur ou bien elle arme le ressort-spiral d'un certain angle.

L'échappement est actionné par la force-relais qui est toujours la même ou qui varie très peu entre deux remontages. Si l'échappement est construit de sorte que son rendement à chaque impulsion soit le même, l'organe oscillant recevra des impulsions rigoureusement constantes et l'amplitude des oscillations de l'organe réglant restera la même quel que soit le degré de tension du ressort de barillet. Les inégalités provoquées par la variation de la force motrice et par la transmission irrégulière de cette force à travers le rouage sont supprimées. Il ne restera plus que les variations d'amplitudes provoquées par des changements de position, par des chocs ou par des variations de la température ou de la pression atmosphérique.

Ces dispositifs peuvent rendre de grands services dans les cas où il s'agit de régler de façon précise la marche d'un appareil horaire à longue durée de marche, actionné par un ressort, par exemple une montre 8 jours ou une pendule 400 jours. Ils sont aussi utiles pour actionner avec la même force motrice un dispositif demandant un effort important (dispositif d'enclenchement par exemple) en même temps qu'un échappement qui ne demande qu'une force très petite.

Dispositif à force constante de Henri Jeanneret. — Voici à titre d'exemple un dispositif simple et ingénieux qui assure à l'échappement la réception d'une force d'intensité constante. Un volant *A* (fig. 257) de grande masse est chassé sur l'arbre du pignon d'échappement, tandis

que la roue d'échappement *B* est folle sur le même arbre. Un ressort spiral *S* est attaché par une de ses extrémités à la roue d'échappement, par l'autre, au volant *A* ; il relie la roue d'échappement au volant et au pignon d'échappement. Une goupille *C* plantée dans le volant passe entre les bras de la roue d'échappement : elle peut armer le ressort-relais jusqu'au moment où elle bute contre un des bras de la roue.

Le ressort moteur du mouvement entraîne le volant *A* si bien que la gou-

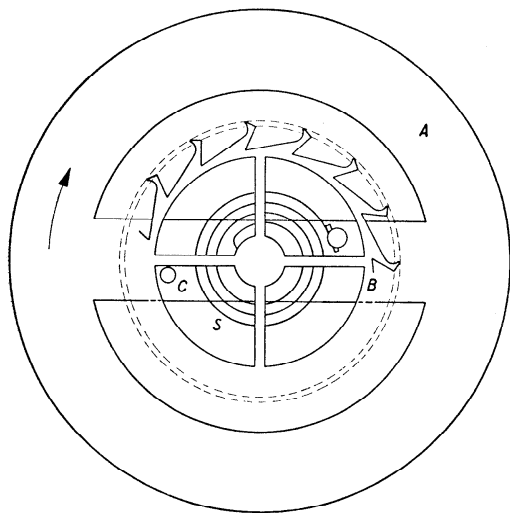


Fig. 257

pille C appuie contre un des bras de la roue d'échappement ; dans cette position le ressort spiral est suffisamment armé pour actionner la roue B et lui permettre de donner au balancier une impulsion capable d'entretenir son mouvement. En ce moment, une des dents de la roue d'échappement est appuyée contre le plan de repos d'une des palettes de l'ancre s'il s'agit d'un échappement à ancre. Bientôt le balancier libère la roue d'échappement qui se met à tourner dans le sens de la flèche en donnant une impulsion au balancier. L'inertie du volant A est si grande qu'il ne suit pas immédiatement la roue d'échappement. La roue B est donc actionnée uniquement par le ressort spiral. L'impulsion terminée, le bras de la roue d'échappement n'est plus en contact avec la goupille C ; le ressort-relais est en partie désarmé. Mais, sous l'influence du ressort de barillet, le rouage, y compris le volant A , se met à tourner jusqu'à ce que la goupille C soit arrêtée par le bras de la roue B dont une des dents est arrêtée par le plan de repos d'une palette de l'ancre. En ce moment, le ressort spiral est de nouveau armé comme il l'était avant l'impulsion.

Le moment d'inertie du volant A doit être calculé de façon à obliger le volant à mettre un certain temps pour parcourir l'angle décrit par la roue pendant une impulsion. Admettons que cet angle soit de 12° ; or, pour un balancier exécutant en une heure 9000 oscillations d'amplitude 270° , la durée de l'impulsion est de l'ordre de 0,01 s. L'arbre du pignon d'échappement est sous l'influence de la force du ressort spiral dont le couple C_1 est suffisant pour que la roue d'échappement donne des impulsions capables de maintenir l'amplitude du balancier à 270° .

Sous l'influence du couple C_1 que nous supposons constant pendant l'impulsion et en négligeant les frottements, le volant A (avec le pignon d'échappement et l'arbre) prend un mouvement uniformément accéléré. Le moment d'inertie du volant A est si grand que nous pouvons négliger celui du pignon et celui de l'arbre sans commettre une erreur appréciable.

Appelons I le moment d'inertie du volant, t le temps pendant lequel le volant parcourt un angle de θ radians, γ l'accélération angulaire (constante dans ce cas), ω la vitesse angulaire au temps t . Nous avons, d'après les lois de la mécanique :

$$\omega = \gamma t = \frac{C_1}{I} t, \quad \theta = \frac{1}{2} \gamma t^2 = \frac{1}{2} \frac{C_1}{I} t^2,$$

d'où :

$$I = \frac{C_1 t^2}{2\theta}.$$

Dans l'exemple cité plus haut, nous avons :

$$t = 0,01 \text{ s}, \quad \theta = \frac{12\pi}{180} = 0,21 \text{ rad}.$$

Admettons que, pour entretenir les oscillations du balancier, il faille appliquer à l'axe de la roue d'échappement un couple $C_1 = 981$ dynes-cm. Nous verrons plus tard comment on peut approximativement calculer la valeur de C_1 . Nous aurons :

$$I = \frac{981 \cdot 0,01^2}{2 \cdot 0,21} = 0,23 \text{ g} \cdot \text{cm}^2.$$

Appelons :

$$\begin{array}{llll} I_1 & \text{le moment d'inertie correspondant à } t = 0,01 \text{ s}, \\ I_2 & \text{»} & \text{»} & t = 0,02 \text{ s}, \\ I_3 & \text{»} & \text{»} & t = 0,03 \text{ s}, \\ \dots & & & \end{array}$$

Nous avons évidemment :

$$I_2 = 4 I_1, \quad I_3 = 9 I_1, \quad \dots$$

Si le moment d'inertie I du volant vaut :

$$I = 9 I_1 = 2,07 \text{ g} \cdot \text{cm}^2,$$

le volant A mettra 0,03 s pour parcourir l'angle de 12° . Puisque l'alternance a une durée de 0,2 s, le volant a le temps de prendre la position pour laquelle le ressort spiral est de nouveau armé comme auparavant.

L'évolution des échappements. — L'organe oscillant des premières horloges mécaniques était le *foliot*, une barre bien équilibrée mobile autour d'un axe. Dans les premières montres, le foliot était remplacé par un *balancier*, disque ou anneau circulaire équilibré, tournant autour d'un axe perpendiculaire à son plan. Ni l'un ni l'autre de ces organes oscillants n'avaient une période propre ; ils étaient conduits par une pièce de l'échappement qui ne les quittait pas.

Au XVII^e siècle, l'introduction du pendule dans les horloges et du spiral dans les montres modifia complètement les fonctions de l'échappement. Ces nouveaux régulateurs — le pendule et le balancier-spiral — ont une période propre. Écartés de leur position d'équilibre, ils y reviennent d'eux-mêmes, la dépassent avec une vitesse décroissante, s'arrêtent puis refont le même trajet en sens inverse ; sans le secours d'aucune force extérieure, ils exécutent une série d'oscillations qui vont en diminuant d'amplitude.

L'échappement n'a plus à conduire l'organe réglant ; il n'a qu'à lui rendre l'énergie que les résistances — frottements et résistance de l'air — ont absorbée ; son travail est considérablement réduit.

Dans le premier échappement, l'échappement à roue de rencontre (appelé aussi échappement à verge ou échappement à palettes), la roue a

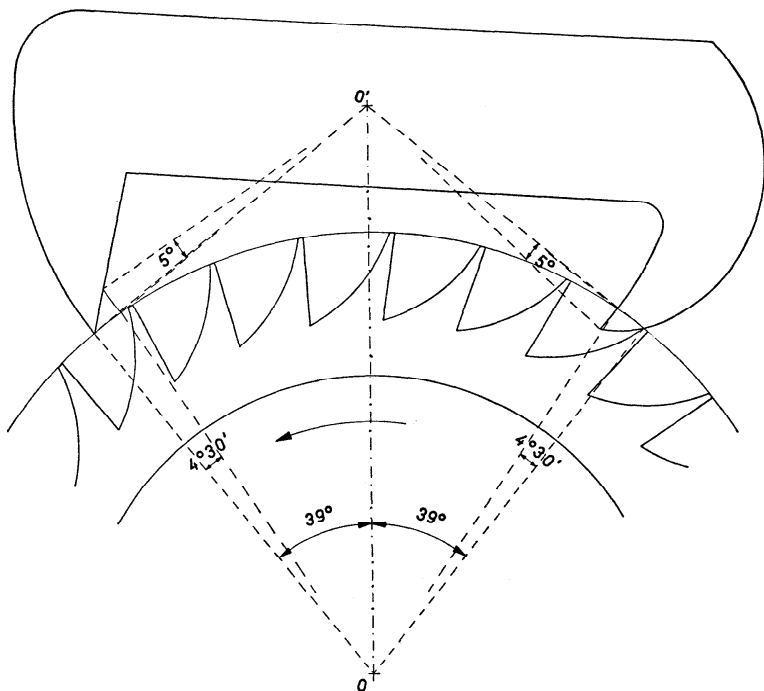


Fig. 258

des dents « de champ » ; son axe est perpendiculaire à celui de l'oscillateur, ce qui oblige à utiliser un engrenage de champ dans le rouage.

Le premier perfectionnement important de l'échappement à verge est dû à l'invention de l'échappement à ancre à recul dans lequel la roue d'échappement est plate ; la roue de champ du rouage devient inutile. En même temps les palettes furent placées dans le plan des dents de la roue (fig. 258).

Ce nouveau dispositif plus simple a l'avantage de pouvoir fonctionner dans les horloges dont le pendule exécute des oscillations de faible amplitude.

Les deux échappements à verge et à ancre à recul sont à contact permanent ; dans les deux systèmes, l'organe réglant oblige la roue d'échap-

pement à reculer pendant qu'il décrit les arcs supplémentaires ; de ce fait une partie de l'énergie cinétique du balancier ou du pendule est perdue et cette perte doit être compensée par une impulsion plus grande.

Le premier pas dans la voie qui mène à la plus grande liberté de l'organe oscillant fut l'invention, au cours du XVIII^e siècle, des *échappements sans recul* ou *échappements à repos*. Plusieurs de ces échappements — à cylindre, duplex, de Graham — sont encore employés ; c'est le cas, en particulier, de l'échappement de Graham dans beaucoup d'horloges de précision.

Le recul était supprimé, mais le contact permanent ne l'était pas. On pouvait faire mieux.

C'est encore au XVIII^e siècle que furent imaginés les échappements à contact périodique ou *échappements libres* qui permirent au balancier de parcourir les arcs supplémentaires sans être en contact avec une pièce de l'échappement. Deux de ces échappements, l'échappement à ancre et celui à détente, sont encore utilisés aujourd'hui aussi bien dans les montres courantes que dans les chronomètres de poche ou de marine. Dans les montres, l'échappement à ancre tend à supplanter tous les autres échappements.

Enfin au XIX^e siècle deux échappements dans lesquels l'entretien des oscillations se fait par un déplacement de la position d'équilibre du régulateur ont conquis la faveur des constructeurs d'horloges de précision ; ils portent les noms de leurs inventeurs Riefler et Strasser.

Le tableau suivant donne un résumé de l'évolution de l'échappement :

1^{re} étape. — Les *échappements à contact permanent à recul* : par exemple l'échappement à roue de rencontre et celui à ancre à recul ;

2^e étape. — Les *échappements à contact permanent sans recul* ou *échappements à repos* : échappements à cylindre, duplex, de Graham, de Brocot ;

3^e étape. — Les *échappements à contact périodique* ou *échappements libres* : échappements à ancre et à détente ;

4^e étape. — Les *échappements à entretien par déplacement de la position d'équilibre de l'organe réglant* : échappements de Riefler et de Strasser.

L'échappement à roue de rencontre. — Disons quelques mots de ce père des échappements utilisé pendant plus de cinq siècles.

Il se compose de la *roue de rencontre* *A* (fig. 259), d'une tige *B* tournant autour de l'axe *OO* et portant les deux *palettes* *P*₁ et *P*₂ dont les plans font entre eux un angle d'environ 90°. Sur la tige *B* est chassée une barre bien équilibrée *C*, le *foliot*, qui porte deux masses *R*₁ et *R*₂, les *régules*, dont le déplacement le long de *C* modifie le moment d'inertie du foliot et, par conséquent, la période de l'organe oscillant.

Les dents de la roue A sont perpendiculaires au plan de rotation de la roue ; elles ont une forme quelconque, mais pointue ; elles n'agissent que par leur pointe qui doit être assez dégagée pour que jamais une autre partie de la dent n'entre en contact avec une des palettes.

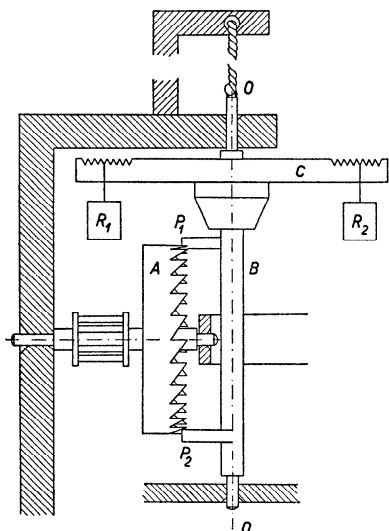


Fig. 259

Dans la figure 259, la palette P_1 est tournée en arrière, la palette P_2 en avant.

Représentons (fig. 260) l'arbre B , les palettes et une partie de la roue vues de haut ; les dents D_1 , D_2 sont à la partie antérieure de la roue et se meuvent dans le sens de la flèche 1 ; la dent D'_1 conduit la palette P_1 qu'elle abandonnera quand le point E sera en F . A cet instant, P_2 sera en OG à proximité de la dent D_2 située sur la partie antérieure de la roue A . La dent D_2 se meut dans le sens de la flèche 1 ; dès que la dent D'_1 a quitté la palette P_1 , la roue prend un mouvement accéléré et D_2 va à la rencontre de la palette P_2 . Le mou-

vement de P_2 est celui du foliot et des règles R_1 et R_2 qui ont un grand moment d'inertie ; la palette P_2 non seulement arrête D_2 , et par conséquent la roue, mais les oblige à reculer. En ce moment la roue est solli-

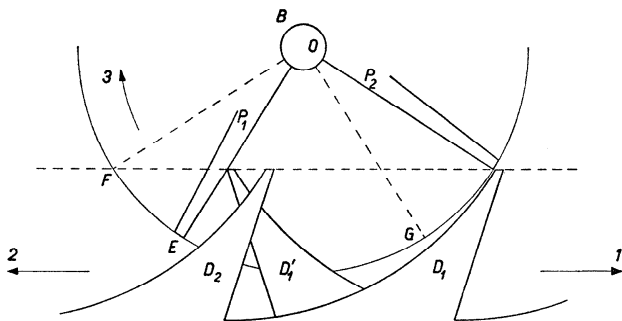


Fig. 260

citée par deux forces : l'une provient de la palette et l'oblige à reculer, l'autre résulte du couple moteur et tend à la faire tourner dans le sens normal. La vitesse et l'énergie cinétique de P_2 diminuent, mais le

couple moteur reste le même. Dès que l'équilibre est établi, la roue reprend son mouvement normal et oblige P_2 et le foliot à se mouvoir dans le sens contraire à celui de la flèche 3.

Le mouvement du foliot se compose de deux parties : pendant la première — l'impulsion — le foliot est conduit

par la roue ; pendant la seconde — l'arc supplémentaire — le foliot conduit la roue et l'oblige à reculer.

Le couple moteur doit être considérable pour conduire le foliot qui a un grand moment d'inertie. Le frottement des dents de la roue contre les palettes est très grand. Il est possible de diminuer l'effet du frottement en répartissant le recul des deux côtés de la ligne des centres.

Les dimensions des palettes et leur pénétration dans la roue déterminent l'élongation du foliot à la fin de l'impulsion.

Nous voyons (fig. 261) que :

$$\cos \varphi_0 = \frac{OH}{OF} = \frac{OP - HP}{OF};$$

en désignant par l la longueur de la palette :

$$OP = OF = l$$

et par ε la pénétration dans la trajectoire AA des pointes des dents de la roue :

$$HP = \varepsilon,$$

nous aurons :

$$\cos \varphi_0 = 1 - \frac{\varepsilon}{l}.$$

D'anciens auteurs préconisaient :

$$\varepsilon = \frac{2}{3} l,$$

ce qui donnait $\varphi_0 \cong 70^\circ$. Cette valeur serait énorme pour une horloge à pendule, mais ne l'est pas pour une horloge à foliot.

Nous avons admis la valeur de 90° pour l'angle des palettes ; dans les horloges à pendule il est souvent beaucoup plus petit ($\cong 45^\circ$).

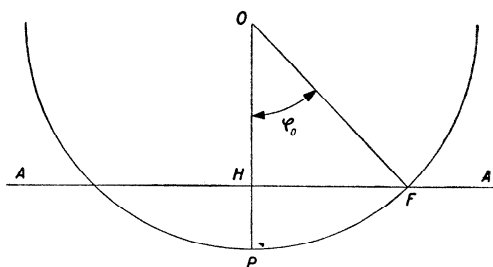


Fig. 261

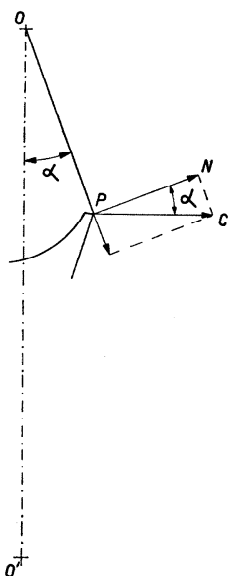


Fig. 262

Les palettes fermées donnent, à la fin de l'impulsion, une composante plus favorable de la force motrice, comme l'indique la figure 262 :

$$N = C \cos \alpha .$$

Pour une force donnée C , N augmente dès que l'angle α diminue.

La période du foliot. — La période du foliot ne peut naturellement pas être calculée avec les formules que nous avons déduites pour le balancier. La raison en est évidente puisqu'il n'y a ici aucune force qui ramène le foliot automatiquement à sa position d'équilibre. Le foliot n'a pas de période propre ; il a celle que lui donne la roue d'échappement.

Distinguons trois phases dans le mouvement du foliot pendant la durée d'une alternance : l'*impulsion* — une dent de la roue conduit une des palettes ; la *chute* — une autre dent de la roue va à la rencontre de la seconde palette ; l'*arc supplémentaire* — la deuxième palette fait reculer la roue.

Dans cet échappement, les frottements sont considérables ; or, ils sont peu accessibles au calcul. Nous ne pouvons calculer la période du foliot que d'une manière approximative et en faisant des hypothèses qui simplifient le problème. S'il ne permet pas une détermination exacte de la période, ce calcul montre l'influence de certains facteurs sur la période et fournit ainsi au praticien le moyen de faire les retouches à bon escient.

Proposons-nous de calculer en combien de temps un foliot de moment d'inertie I décrit un angle donné φ lorsqu'il est conduit par une dent de la roue d'échappement sous l'influence d'un couple C que nous supposons constant. Nous négligeons les frottements.

Appliquons le théorème des forces vives. Le travail de C vaut :

$$C\varphi .$$

L'énergie cinétique du foliot passe de 0 à $\frac{1}{2} I\omega^2$, où ω désigne la vitesse angulaire du foliot à la fin du parcours de l'angle φ . Nous avons :

$$C\varphi = \frac{1}{2} I\omega^2 .$$

Soit t_1 le temps employé par le foliot pour décrire l'angle φ ; pendant ce temps, le mouvement du foliot est uniformément accéléré ; l'accélération angulaire γ est :

$$\gamma = \frac{C}{I} .$$

Nous avons également :

$$\omega = \gamma t_1 = \frac{C}{I} t_1.$$

L'équation des forces vives devient :

$$C\varphi = \frac{1}{2} I \frac{C^2}{I^2} t_1^2,$$

d'où nous tirons :

$$t_1 = \sqrt{\frac{2I\varphi}{C}}. \quad (227)$$

La partie t_1 de la période diminue, lorsque le couple augmente, à la condition que φ reste constant.

Si la roue d'échappement est sous l'influence d'un couple constant, il n'en est pas de même du foliot sur lequel agit une force qui varie suivant l'inclinaison de la palette par rapport à la dent de la roue ; mais nous pouvons calculer avec une force moyenne que nous supposerons constante.

Faisons abstraction de la chute et de l'accélération qui en résulte pour la roue.

Pendant le recul, c'est un couple C' qui s'oppose au mouvement de la palette. C' diffère de C , parce que l'inclinaison moyenne de la palette menante n'est pas la même que celle de la palette menée. Appelons φ_0 l'angle maximum parcouru par le foliot ; $\varphi_0 - \varphi$ est l'angle de recul du foliot.

Le théorème des forces vives permet de calculer le temps t_2 qui est celui du foliot décrivant l'angle $\varphi_0 - \varphi$. Nous avons :

$$t_2 = \sqrt{\frac{2I(\varphi_0 - \varphi)}{C'}}. \quad (228)$$

La durée d'une alternance du foliot est :

$$t = t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2I\varphi}{C}} + \sqrt{\frac{2I(\varphi_0 - \varphi)}{C'}}. \quad (229)$$

Lorsque le couple agissant sur la roue d'échappement croît (à la suite d'une augmentation du poids moteur, par exemple), la période diminue, l'horloge avance.

Cette conclusion est exacte si l'augmentation du couple moteur n'altère pas l'amplitude φ_0 , car si φ_0 croît, il en est de même de t_2 .

Cependant l'augmentation de φ_0 est loin de compenser celle de C et de C' , car un couple C plus fort accroît l'amplitude du foliot, mais un couple C' plus grand la diminue.

La règle énoncée plus haut était appliquée par les horlogers qui réglèrent les horloges à foliot en déplaçant les règles et en modifiant le poids moteur.

Dans les horloges modernes où le foliot a été remplacé par le pendule, et l'échappement à roue de rencontre par des échappements sans recul, l'influence de l'augmentation du poids moteur est un allongement de la période, donc un retard de l'horloge. Dans ce cas, la période propre du pendule est prépondérante et l'influence de l'échappement est minime; or, la période du pendule augmente avec l'amplitude, donc un accroissement de la force motrice provoque du retard.

L'échappement à roue de rencontre, robuste et peu sensible à l'usure, a été utilisé pendant plusieurs siècles; il est abandonné aujourd'hui. Il a eu d'ardents défenseurs dont Ferdinand Berthoud. Rappelons que l'horloge marine qui, au XVIII^e siècle, permit à Harrison de résoudre le « problème des longitudes » et de gagner le prix du Parlement britannique avait un échappement à roue de rencontre qui présentait les particularités suivantes: les palettes en diamant étaient parallèles au lieu d'être à angle droit; les faces d'impulsion étaient arrondies en forme de cycloïde; l'organe oscillant était un balancier-spiral.

L'échappement à ancre à recul. — Une simplification notable consiste à faire la roue d'échappement plate et à mettre les palettes dans le plan de la roue.

Les surfaces de repos AB et CD (fig. 263) ne sont pas concentriques à l'axe de l'ancre. Pendant que le pendule décrit l'arc supplémentaire, l'ancre oblige la roue à reculer. Dans la figure, l'ancre embrasse $4\frac{1}{2}$ dents de la roue d'échappement qui en a 30; l'angle de repos est de 1° , l'angle de chute de 1° et l'angle d'impulsion pour le pendule de 4° . Nous verrons plus tard comment ces données peuvent être utilisées pour dessiner la roue et l'ancre.

En raison du contact permanent et du recul de la roue pendant le parcours de l'arc supplémentaire, une forte usure des dents et des palettes se produit. Cependant elle est moins considérable que dans les constructions où le régulateur est le foliot, car l'horloge à pendule n'a pas besoin d'une force motrice aussi importante que l'horloge à foliot.

Le recul est accompagné d'une résistance qui, agissant après le point mort, diminue la période; il fait avancer l'horloge. Cet effet est d'autant plus accentué que le recul est plus grand; il augmente avec l'amplitude

du pendule. Or les oscillations du pendule ne sont pas isochrones ; les grandes oscillations sont plus lentes que les petites. Ainsi l'effet du recul de la roue d'échappement compense plus ou moins l'influence des variations de l'amplitude du pendule ; il tend à réaliser l'isochronisme.

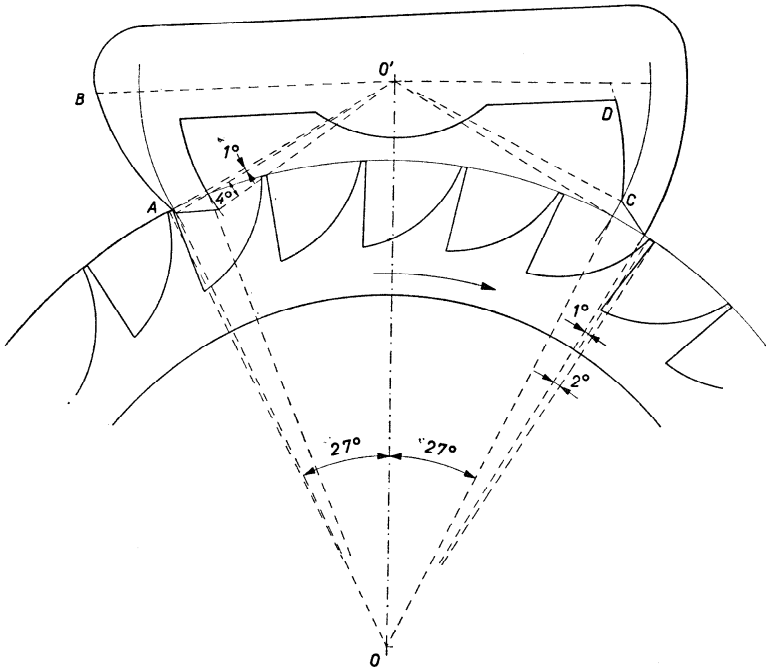


Fig. 263

Certains horlogers du XVIII^e siècle ont caressé l'espoir d'obtenir des oscillations pendulaires isochrones grâce au recul de la roue d'échappement. En modifiant la forme des surfaces de repos *AB* et *CD* (fig. 263), il est possible de réaliser une compensation de l'effet de l'amplitude par celui du recul. Ferdinand Berthoud avait imaginé un *échappement isochrone* ; c'était un échappement à recul bien calculé avec une roue de 30 dents et une ancre embrassant $3\frac{1}{2}$ dents de la roue. Berthoud fit des essais avec une horloge composée de deux arbres ; celui du tambour autour duquel s'enroulait la corde supportant le poids et celui de la roue d'échappement. Il fit les mêmes expériences avec une horloge marine. En faisant varier le poids moteur, il modifiait l'amplitude du pendule. Dans l'horloge marine le régulateur était un balancier-spiral ; là il s'agissait de voir de quelle façon le recul compensait l'effet de l'échappement.

Voici par exemple les résultats d'une série d'essais :

Echappement	Poids moteur en livres	Marche diurne en secondes
à fort recul	4	0
» »	12	+ 144
sans recul	3	+ 12
» »	9	— 72
à recul modéré	3	— 24
égal à $\frac{1}{6}$ du chemin	6	— 24
de la roue	9	— 12

L'effet du recul sur la période est fonction de l'amplitude ; il en est de même de la période, mais ces deux fonctions sont indépendantes l'une de l'autre, de sorte qu'il n'est guère possible d'obtenir une compensation parfaite pour toutes les amplitudes. Des essais permettent de découvrir la forme des surfaces de repos de l'ancre qui, pour une amplitude déterminée, donne le meilleur résultat. Mais le frottement est une force variable avec le temps ; l'usure qu'il provoque modifie le coefficient de frottement. En même temps les huiles s'épaississent, ce qui altère encore le coefficient de frottement et diminue l'amplitude du pendule. Donc, avec le temps, l'effet du recul augmente.

Ainsi le rêve des horlogers du XVIII^e siècle ne s'est pas réalisé ; l'échappement à recul, au lieu d'apporter l'isochronisme, a causé bien des ennuis aux rhabilleurs en raison de l'usure des dents de la roue et des palettes de l'ancre.

Pour remédier à cet état de choses tout en conservant l'avantage du recul — combattre l'anisochronisme du pendule — l'*échappement à demi-recul* fut imaginé, dans lequel seule une des palettes provoque le recul de la roue. Mais l'inconvénient de l'usure subsistait.

Peu à peu le recul fut réduit pour empêcher l'usure trop rapide des organes de l'échappement ; finalement les horlogers ont renoncé à chercher l'isochronisme des oscillations du pendule par le recul de la roue d'échappement, malgré les résultats obtenus par Ferdinand Berthoud.

Influence de l'échappement sur l'isochronisme de l'organe réglant. — Dans les échappements utilisés généralement dans les horloges et les

montres, l'entretien du mouvement de l'organe oscillant est assuré par une percussion. Pour ces échappements, nous avons établi (chapitre VII, p. 91) la règle suivante :

la percussion doit être brève et être donnée aussi près que possible du passage de l'oscillateur à la position d'équilibre, de façon qu'elle soit répartie également des deux côtés de cette position d'équilibre.

Ces conditions ne sont jamais remplies ; l'échappement modifie la période de l'organe réglant et la perturbation est fonction de l'amplitude. Les horlogers disent : *l'échappement provoque du retard aux petits arcs.*

L'échappement crée un défaut d'isochronisme, et ceci est grave, parce que l'effet n'est pas indépendant de l'amplitude. S'il l'était, la période serait modifiée mais resterait constante. Or, c'est la constance de la période qui est le but à atteindre ; la valeur absolue de la période importe peu puisque nous pouvons facilement la modifier.

La constance de la période, quelle que soit l'amplitude, c'est-à-dire l'isochronisme, a une très grande importance parce qu'en dépit de tous les soins, l'amplitude du pendule ou du balancier-spiral se modifie soit sous l'action du temps (usure, épaissement de l'huile, fatigue du ressort moteur), soit sous l'influence de la position ou de facteurs extérieurs (position verticale ou oblique dans les montres portées, chocs, variations de la pression atmosphérique ou de la température).

Le constructeur d'échappements à percussion doit observer la règle rappelée plus haut ; il doit tout particulièrement diminuer les résistances qui agissent pendant le dégagement, car ces résistances sont en grande partie la cause du défaut d'isochronisme provoqué par l'échappement.

Ce défaut est d'autant plus sensible que les variations de l'amplitude de l'organe réglant sont grandes. Dans les horloges à pendule, les variations d'amplitude peuvent être réduites en diminuant l'amplitude elle-même. Le pendule des horloges astronomiques exécute des oscillations dont l'amplitude est inférieure à 2°.

Dans les montres portatives exposées à des chocs fréquents, l'amplitude des oscillations du balancier-spiral ne peut pas être petite parce qu'un choc à contre-sens pourrait arrêter la montre. Ce danger peut être écarté en utilisant deux balanciers dont les sens d'oscillation sont constamment contraires ; mais cette solution s'est avérée trop compliquée ; dans les montres modernes le balancier exécute des oscillations de très grande amplitude (270° environ) ; celles-ci sont entretenues par un échappement libre qui crée un défaut d'isochronisme moindre que celui qui est provoqué par un échappement à contact permanent. Dans certains cas, l'influence de l'échappement peut être réduite en répartissant l'impulsion de façon que celle-ci compense l'effet du dégagement, mais cette répartition ne peut se faire que dans les échappements « à coup

perdu » où l'impulsion se fait à chaque oscillation et non à chaque alternance.

Entretien des oscillations par modification de la position d'équilibre de l'organe réglant. — Imaginons un spiral fixé en A à la virole (fig. 264) et au piton B ; le piton est généralement fixe; il est attaché au coq. Supposons qu'il soit solidaire d'une pièce mobile C . En déplaçant C , nous modifions la position d'équilibre et l'état de tension du spiral. Suivant le sens du mouvement de C , nous armons ou nous désarmons le spiral. Cette modification est susceptible d'entretenir les oscillations du balancier.

Lorsque nous parlerons des horloges à pendule, nous décrirons deux échappements utilisant ce mode d'entretien. Dans les montres à balancier-spiral, le problème de l'entretien des oscillations du balancier-spiral par déplacement de la position d'équilibre n'est pas encore résolu de façon satisfaisante.

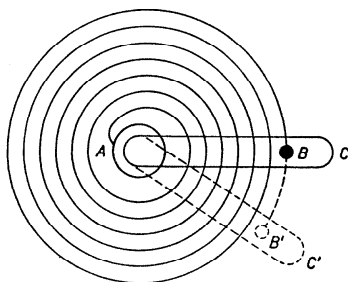


Fig. 264

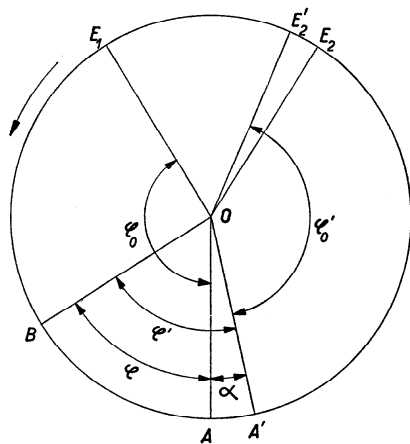


Fig. 265

Ce mode d'entretien a cependant un avantage: il laisse une plus grande liberté à l'organe réglant dont l'amplitude des oscillations n'est pas limitée par l'échappement.

Le déplacement de la position de repos peut avoir lieu à chaque oscillation ou à chaque alternance.

Étudions d'abord la modification qu'un déplacement du point mort apporte à l'amplitude de l'oscillation. OA (fig. 265) est la position normale d'équilibre de l'organe exécutant des oscillations sinusoïdales, φ_0 l'amplitude normale. Supposons, pour fixer les idées, que nous déplaçons la position d'équilibre lorsque l'oscillateur a la position caractérisée

par OB et φ et se meut suivant la flèche. Au moment où l'oscillateur passe en OB , sa vitesse angulaire est ω ; celle-ci dépend de φ . Nous avons (cf. chapitre VII) :

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{I}} \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}.$$

A ce moment, déplaçons la position d'équilibre de OA en OA' ; nous modifions l'élongation, qui devient φ' , la position extrême et l'amplitude que nous appellerons φ'_0 . A partir de la position OB , le mouvement de l'oscillateur a lieu autour de la position d'équilibre OA' .

Appelons α l'angle AOA' ; nous aurons $\varphi' = \varphi + \alpha$. Dès que la position d'équilibre est modifiée (nous supposons que ce changement se fait brusquement), la vitesse angulaire, qui n'a pas changé, a pour expression :

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{I}} \sqrt{\varphi_0'^2 - \varphi'^2},$$

d'où :

$$\sqrt{\frac{C}{I}} \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2} = \sqrt{\frac{C}{I}} \sqrt{\varphi_0'^2 - \varphi'^2},$$

soit :

$$\varphi_0^2 - \varphi^2 = \varphi_0'^2 - \varphi'^2 = \varphi_0'^2 - (\varphi + \alpha)^2.$$

Cette équation donne la valeur de la nouvelle amplitude φ'_0 :

$$\varphi'_0 = \sqrt{\varphi_0^2 + 2\varphi\alpha + \alpha^2}. \quad (230)$$

Influence du déplacement de la position d'équilibre sur la période de l'oscillateur. — Reprenons le cas représenté par la figure 265; le déplacement de la position d'équilibre se produit pendant la demi-alternance « descendante », c'est-à-dire avant le passage au point mort.

L'alternance se compose de trois angles :

l'angle E_1OB , parcouru avant le déplacement de OA ;

l'angle BOA' , parcouru à partir de OB avant la nouvelle position d'équilibre OA' ;

l'angle $A'OE'_2$ correspondant à la demi-alternance ascendante dont le point extrême est E'_2 .

Que l'organe réglant oscille autour de OA ou autour de OA' , cela n'a aucune influence sur la période; mais il en va autrement si la même oscillation se fait en partie autour de OA , en partie autour de OA' . Appelons T la période normale (qu'elle ait lieu autour de OA ou autour de OA') et T' la période perturbée par le déplacement de la position de repos.

Soient t_1 , t_2 et t_3 les temps employés par l'oscillateur pour parcourir les angles E_1OB , BOA' et $A'OE'_2$. Il est clair que :

$$t_1 + t_2 + t_3 = \frac{T'}{2}.$$

Or :

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{T}{4} - \sqrt{\frac{I}{C}} \arcsin \frac{\varphi}{\varphi_0}, \\ t_2 &= \sqrt{\frac{I}{C}} \arcsin \frac{\varphi'}{\varphi_0} = \sqrt{\frac{I}{C}} \arcsin \frac{\varphi + \alpha}{\sqrt{\varphi_0^2 + 2\varphi\alpha + \alpha^2}}, \\ t_3 &= \frac{T}{4}, \end{aligned}$$

d'où :

$$\frac{T'}{2} = \frac{T}{2} + \sqrt{\frac{I}{C}} \left(\arcsin \frac{\varphi + \alpha}{\sqrt{\varphi_0^2 + 2\varphi\alpha + \alpha^2}} - \arcsin \frac{\varphi}{\varphi_0} \right)$$

et, par conséquent :

$$T' = T + 2 \sqrt{\frac{I}{C}} \left(\arcsin \frac{\varphi + \alpha}{\sqrt{\varphi_0^2 + 2\varphi\alpha + \alpha^2}} - \arcsin \frac{\varphi}{\varphi_0} \right). \quad (231)$$

De cette formule, nous tirons :

$$T' - T = \Delta T = 2 \sqrt{\frac{I}{C}} \left(\arcsin \frac{\varphi + \alpha}{\sqrt{\varphi_0^2 + 2\varphi\alpha + \alpha^2}} - \arcsin \frac{\varphi}{\varphi_0} \right). \quad (232)$$

La valeur absolue de ΔT importe peu ; si elle était constante, elle laisserait à l'oscillateur sa propriété d'organe à mesurer le temps. Mais si les valeurs de α (déplacement) et de φ (élongation au moment du déplacement) ne subissent aucune modification, l'altération de la période dépend de l'amplitude φ_0 . Ainsi :

le déplacement brusque de la position d'équilibre de l'oscillateur crée un défaut d'isochronisme.

Calculons ΔT dans le cas où le déplacement de la position d'équilibre se ferait au moment du passage au point mort, c'est-à-dire pour $\varphi = 0$. Nous avons :

$$\Delta T = 2 \sqrt{\frac{I}{C}} \arcsin \frac{\alpha}{\sqrt{\varphi_0^2 + \alpha^2}}.$$

Si le déplacement a lieu au moment où la vitesse de l'oscillateur est nulle, nous avons, puisque $\varphi = \varphi_0$:

$$\Delta T = 2 \sqrt{\frac{I}{C}} \left(\arcsin \frac{\varphi_0 + \alpha}{\sqrt{\varphi_0^2 + 2\varphi_0\alpha + \alpha^2}} - \arcsin \frac{\varphi_0}{\varphi_0} \right)$$

ou

$$\Delta T = 0.$$

Le déplacement brusque de la position d'équilibre n'altère pas la période s'il a lieu au point extrême de l'oscillation.

Pour ce mode d'entretien des oscillations, la règle diffère de celle que nous avons trouvée pour les échappements à percussion ; elle devient : *lorsque les oscillations d'un organe oscillant sont entretenues en déplaçant le point d'équilibre, ce déplacement doit avoir lieu le plus près possible d'un point extrême.*

Le spiral peut aussi être armé pendant la demi-alternance « ascendante », c'est-à-dire après le point mort ; pour cela il faut déplacer la position d'équilibre dans l'autre sens (fig. 266).

Soit ω la vitesse angulaire au point B (élongation φ). Nous avons :

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{I}} \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2} = \sqrt{\frac{C}{I}} \sqrt{\varphi_0'^2 - \varphi'^2}.$$

Mais $\varphi' = \varphi + \alpha$, donc :

$$\varphi_0^2 - \varphi^2 = \varphi_0'^2 - (\varphi + \alpha)^2$$

ou

$$\varphi_0' = \sqrt{\varphi_0^2 + 2\varphi\alpha + \alpha^2}.$$

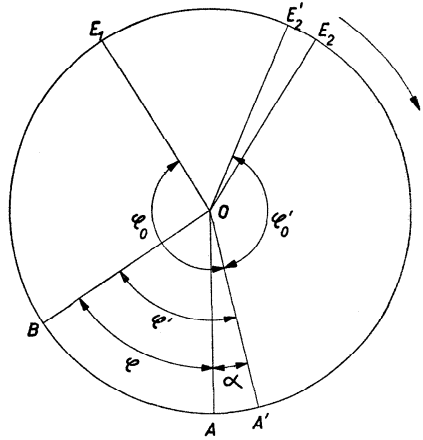


Fig. 266

Les angles E_1OA , AOB et BOE_2' sont parcourus dans les temps t_1 , t_2 et t_3 ; nous avons donc :

$$t_1 + t_2 + t_3 = \frac{T'}{2}.$$

Or :

$$t_1 = \frac{T}{4},$$

$$t_2 = \sqrt{\frac{I}{C}} \arcsin \frac{\varphi}{\varphi_0},$$

$$t_3 = \frac{T}{4} - \sqrt{\frac{I}{C}} \arcsin \frac{\varphi'}{\varphi_0'},$$

d'où :

$$\frac{T'}{2} = \frac{T}{2} + \sqrt{\frac{I}{C}} \left(\arcsin \frac{\varphi}{\varphi_0} - \arcsin \frac{\varphi + \alpha}{\sqrt{\varphi_0^2 + 2\varphi\alpha + \alpha^2}} \right)$$

et, par conséquent :

$$\Delta T = T' - T = 2 \sqrt{\frac{I}{C}} \left(\arcsin \frac{\varphi}{\varphi_0} - \arcsin \frac{\varphi + \alpha}{\sqrt{\varphi_0^2 + 2\varphi\alpha + \alpha^2}} \right). \quad (233)$$

Comparons les formules (232) et (233) : pour la même élongation φ et le même déplacement α , les valeurs de ΔT sont égales et de signes contraires.

Ne serait-il donc pas possible d'imaginer un système dans lequel les deux perturbations se compenseraient ? Il faudrait pour cela, dans la première alternance et avant le point mort, déplacer la position d'équilibre de l'angle α vers la droite lorsque l'oscillateur a l'élongation φ , puis, dans la deuxième alternance et après le point mort, faire le même déplacement α dans l'autre sens pour la même élongation φ . La compensation ne sera parfaite que si, d'une alternance à l'autre, l'amplitude ne varie pas.

Calculons l'influence de la perturbation ΔT de la période sur la marche de la montre. Reprenons à cet effet la formule (232) :

$$\Delta T = 2 \sqrt{\frac{I}{C}} \left(\arcsin \frac{\varphi + \alpha}{\sqrt{\varphi_0^2 + 2\varphi\alpha + \alpha^2}} - \arcsin \frac{\varphi}{\varphi_0} \right);$$

or :

$$\sqrt{\frac{I}{C}} = \frac{T}{2\pi},$$

donc :

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{\pi} \left(\arcsin \frac{\varphi + \alpha}{\sqrt{\varphi_0^2 + 2\varphi\alpha + \alpha^2}} - \arcsin \frac{\varphi}{\varphi_0} \right). \quad (234)$$

Rappelons la formule (146) du chapitre VII :

$$\mu = - \frac{\Delta T}{T} \cdot 86\,400,$$

dans laquelle μ désigne la marche diurne de la montre qui est, dans le cas envisagé :

$$\mu = - \frac{86\,400}{\pi} \left(\arcsin \frac{\varphi + \alpha}{\sqrt{\varphi_0^2 + 2\varphi\alpha + \alpha^2}} - \arcsin \frac{\varphi}{\varphi_0} \right). \quad (235)$$

Si nous calculons la marche diurne pour des valeurs données de φ_0 , φ et α , nous verrons que cette marche est négative (retard) et qu'elle diminue quand l'amplitude augmente et que le déplacement a lieu au moment où le balancier est plus près de la position extrême OE_1 .

Calculons, d'après (235), μ pour $\alpha = 40^\circ$ et pour des valeurs de φ égales à 60° , 90° et φ_0 , ainsi que pour des valeurs de φ_0 égales à 90° , 180° , 360° et 540° . Nous obtiendrons les résultats suivants :

Amplitude φ_0	Elongation φ	Marche diurne μ
$90^\circ = \frac{\pi}{2}$	$60^\circ = \frac{\pi}{3}$	— 1 h 54 m 41 s
	$90^\circ = \frac{\pi}{2}$	0
$180^\circ = \pi$	$60^\circ = \frac{\pi}{3}$	— 1 h 28 m 18 s
	$90^\circ = \frac{\pi}{2}$	— 1 h 18 m 26 s
	$180^\circ = \pi$	0
$360^\circ = 2\pi$	$60^\circ = \frac{\pi}{3}$	— 49 m 07 s
	$90^\circ = \frac{\pi}{2}$	— 47 m 42 s
	$360^\circ = 2\pi$	0
$540^\circ = 3\pi$	$60^\circ = \frac{\pi}{3}$	— 33 m 25 s
	$90^\circ = \frac{\pi}{2}$	— 33 m 01 s
	$540^\circ = 3\pi$	0

Ce tableau montre que les perturbations apportées par le déplacement brusque de la position d'équilibre du balancier-spiral sont loin d'être négligeables.

Restitution au balancier de l'énergie dissipée. — Dans le chapitre VII après avoir indiqué comment peut être établie la courbe de l'amplitude du balancier-spiral libre en fonction du temps, nous avons calculé la perte d'énergie due aux frottements et à la résistance de l'air.

Si $\Delta\varphi_0$ est la perte d'amplitude par oscillation, l'énergie dissipée pendant une oscillation vaut :

$$\Delta W_0 = C\varphi_0 \cdot \Delta\varphi_0.$$

Dans la plupart des échappements, la restitution de l'énergie au balancier se fait à chaque alternance ; nous avons :

$$\Delta W_a = \frac{1}{2} C\varphi_0 \cdot \Delta\varphi_0;$$

c'est donc l'énergie que l'échappement doit transmettre au balancier à chaque alternance.

Transmission de l'énergie par percussion. — En général, une pièce de l'échappement est chargée d'accélérer le mouvement du balancier pendant une partie de l'alternance. Cette pièce est arrêtée, puis libérée ; elle prend, sous l'action du ressort ou du poids moteur, une vitesse accélérée et rattrape une pièce solidaire du balancier à laquelle elle imprime une certaine accélération.

Ce processus se répète avec quelques variantes dans tous les échappements à percussion.

Nous examinerons le cas de la transmission de l'énergie au balancier dans l'échappement le plus répandu aujourd'hui, c'est-à-dire dans l'échappement à ancre. Les mêmes phénomènes se produisent dans les autres échappements, de sorte que la méthode exposée ici peut être considérée comme générale.

Dans l'échappement à ancre, l'arbre du balancier porte un plateau muni d'une « cheville ». La roue d'échappement agit sur une ancre terminée par la « fourchette ». L'entrée de la fourchette est chargée de conduire la cheville de plateau pendant un certain temps et d'accélérer son mouvement.

Le phénomène peut se décomposer en trois parties :

1° la fourchette est arrêtée ; pendant la demi-alternance descendante, la cheville rencontre la paroi A de la fourchette (fig. 267) et fait tourner cette dernière autour de son axe O_1 dans le sens de la flèche 2. A un certain moment, au cours de ce mouvement, la roue d'échappement se trouve libérée. Cette première période est appelée « *dégagement* » ;

2° à partir de ce moment, la roue d'échappement imprime à l'ancre un mouvement accéléré, également

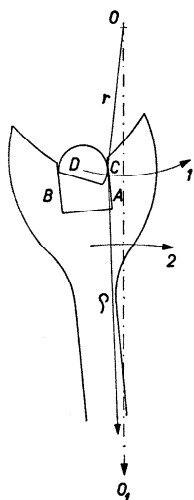


Fig. 267

dans le sens de la flèche 2, de sorte que bientôt sa vitesse au point de contact C est supérieure à celle de la cheville D au même point; la paroi A quitte la cheville D et, pendant un certain temps, les deux mobiles se meuvent sans se toucher. Mais bientôt la paroi B de l'entrée de la fourchette rattrape la cheville et le contact est rétabli. Appelons cette deuxième période la « *chute de la fourchette* »;

3° à partir de ce moment, la fourchette conduit la cheville de plateau et accélère son mouvement pendant un laps de temps qui dépend de la construction de l'échappement. C'est l'« *impulsion* ».

Les vitesses pendant le dégagement. — Pour simplifier l'étude de l'action de l'échappement, nous supposons que tant que le balancier n'est pas poussé par la fourchette sa vitesse angulaire est constante.

Cette hypothèse n'est pas loin de la réalité. En effet, l'action de l'échappement a lieu dans l'intervalle de temps que met le balancier à passer de l'élongation -20° à l'élongation $+20^\circ$. Si la période du balancier est $T = 0,4$ s, son amplitude $\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$ radians, sa vitesse angulaire maximum vaudra :

$$\Omega = \sqrt{\frac{C}{I}} \varphi_0 = \frac{3\pi^2}{0,4} = 74,022 \text{ rad/s.}$$

Pour l'élongation $\varphi = 20^\circ$, la vitesse angulaire du balancier est :

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{I}} \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2} = \frac{2\pi}{0,4} \sqrt{\frac{9\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{81}} = 73,819 \text{ rad/s.}$$

La variation de la vitesse angulaire est relativement faible (environ 3‰).

La vitesse angulaire du balancier est considérable; son moment d'inertie I l'est aussi, de sorte que son énergie cinétique est importante; celle-ci a pour expression :

$$W = \frac{1}{2} I \omega^2.$$

Pendant le dégagement, le balancier doit entraîner l'ancre dont le moment d'inertie est beaucoup plus petit que le sien. L'ancre résiste au mouvement en raison de son inertie et à cause de la pression d'une des dents de la roue d'échappement. Mais, en première approximation, admettons que l'ancre prend au point C la vitesse de la cheville de plateau. Cette vitesse est :

$$V_c = \omega r,$$

si nous désignons par r la distance OC (fig. 267).

Appelons ϱ la distance O_1C , ω_a la vitesse angulaire de l'ancre et V_a la vitesse de la fourchette au point C :

$$V_a = \omega_a \varrho .$$

Mais $V_a = V_c$ et, par suite :

$$\omega_a \varrho = \omega r ,$$

soit :

$$\omega_a = \omega \frac{r}{\varrho} .$$

Durée de la chute. — Le trajet parcouru pendant la chute est assez court pour que nous puissions le considérer comme rectiligne.

Au commencement de la chute la vitesse de la cheville est ωr , celle de la fourchette est $\omega \frac{r}{\varrho}$.

La fourchette doit parcourir le même chemin que la cheville, plus une longueur a qui est le jeu de la cheville dans l'entrée de la fourchette.

Appelons t_1 la durée de la chute. Pendant ce temps le balancier est animé d'un mouvement de rotation uniforme, de vitesse angulaire ω . La cheville a parcouru une longueur l_c :

$$l_c = \omega r t_1 .$$

Le mouvement de la fourchette est un mouvement accéléré ; la vitesse angulaire initiale est $\omega \frac{r}{\varrho}$; l'accélération angulaire γ vaut :

$$\gamma = \frac{C_a}{I_a} ,$$

si nous désignons par C_a le moment de la force qui agit sur l'ancre et par I_a le moment d'inertie de l'ancre. L'accélération au point C est égale à :

$$\frac{C_a}{I_a} \varrho .$$

Le chemin parcouru par la fourchette est :

$$l_a = \omega r t_1 + \frac{1}{2} \frac{C_a}{I_a} \varrho t_1^2 ,$$

mais :

$$l_a = l_c + a ,$$

d'où l'équation :

$$\omega r t_1 + \frac{1}{2} \frac{C_a}{I_a} \varrho t_1^2 = \omega r t_1 + a ,$$

dont nous tirons :

$$t_1 = \sqrt{\frac{2aI_a}{C_a g}}. \quad (236)$$

Pendant ce temps, le balancier a parcouru un angle α_1 égal à :

$$\alpha_1 = \omega t_1.$$

Au moment de la rencontre, la vitesse de la fourchette est :

$$V_a = \omega r + \frac{C_a}{I_a} \varrho t_1, \quad (237)$$

celle de la cheville de plateau :

$$V_c = \omega r. \quad (238)$$

Après le choc, les vitesses des mobiles seront modifiées suivant des lois que nous allons rappeler brièvement.

Rappel de quelques formules concernant la percussion. — Soient deux corps A et B (fig. 268), de masses m_1 et m_2 , en mouvement de translation suivant la droite OO joignant les centres de gravité. Convenons que les

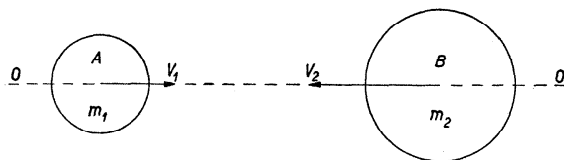


Fig. 268

deux corps se déplacent l'un vers l'autre avec les vitesses V_1 et V_2 comptées positivement dans le sens des flèches de la figure.

Les corps sont mous ou élastiques ; parmi ces derniers, distinguons encore ceux qui sont parfaitement et imparfaitement élastiques.

Appelons V'_1 et V'_2 les vitesses après le choc. Lorsqu'ils se sont heurtés, les corps mous ne se séparent plus l'un de l'autre ; ils prennent donc une vitesse commune, si bien que :

$$V'_1 = - V'_2$$

et

$$V'_1 = \frac{m_1 V_1 - m_2 V_2}{m_1 + m_2}, \quad (239)$$

$$V'_2 = \frac{m_2 V_2 - m_1 V_1}{m_1 + m_2}. \quad (240)$$

La quantité de mouvement des deux corps n'a pas été modifiée de sorte que :

$$m_1 V_1 - m_2 V_2 = m_1 V'_1 - m_2 V'_2.$$

Les corps élastiques réagissent l'un sur l'autre ; le choc peut être décomposé en deux parties : dans l'une, tout se passe comme si les corps étaient parfaitement mous, l'un des corps déforme l'autre ; dans l'autre, il y a une réaction élastique ; le corps déformé reprend sa forme primitive. Appelons ε le coefficient qui indique le degré d'élasticité des corps (coefficient de restitution). Pour les corps parfaitement élastiques $\varepsilon = 1$; pour les corps parfaitement mous $\varepsilon = 0$; pour les autres corps $0 < \varepsilon < 1$. Pour tous les corps, qu'ils soient élastiques ou mous, les formules suivantes sont valables :

$$V'_1 = V_1 - \frac{(1 + \varepsilon)m_2}{m_1 + m_2}(V_1 + V_2), \quad (241)$$

$$V'_2 = V_2 - \frac{(1 + \varepsilon)m_1}{m_1 + m_2}(V_1 + V_2). \quad (242)$$

On peut déterminer expérimentalement la valeur de ε pour deux corps donnés. On mesure la hauteur h' de rebondissement d'un des corps qui a la forme d'une bille qu'on laisse tomber de la hauteur h sur l'autre corps qui est plat :

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{h'}{h}}.$$

La hauteur h doit être choisie de façon que, pendant l'expérience, le choc ne produise pas de déformation permanente.

Pour les corps parfaitement élastiques $h' = h$, $\varepsilon = 1$. La percussion n'absorbe, dans ce cas, aucune énergie cinétique.

Dans les échappements d'horlogerie où les chocs sont fréquents, nous ne pouvons pas appliquer les formules (241) et (242) (valables pour des mouvements de translation), puisqu'il s'agit ici de rotations. Il convient de rappeler que les formules se rapportant à la percussion ne sont que des approximations assez grossières : les chocs sont des phénomènes complexes, accompagnés de déformations, réactions, vibrations, etc., dont il n'est pas facile de tenir compte.

Formules de la percussion pour les corps tournants. — Pour passer du mouvement de translation au mouvement de rotation, il faut envisager les moments d'inertie au lieu des masses, les moments de force au lieu des forces, les vitesses angulaires au lieu des vitesses linéaires. Il est alors possible de déduire des formules analogues aux formules (241) et (242).

Considérons deux corps parfaitement élastiques. Entre les deux corps, il y a percussion P du premier corps sur le second et réaction $-P$ du second sur le premier. Le moment de la percussion produit une variation égale du moment de la quantité de mouvement.

I_1 et I_2 sont les moments d'inertie des deux corps, ω_1 et ω_2 les vitesses angulaires avant le choc, ω'_1 et ω'_2 les mêmes vitesses après le choc, r et ϱ les distances du point d'impact aux centres de rotation O_1 et O_2 ; nous avons :

$$Pr = I_1\omega'_1 - I_1\omega_1 = I_1(\omega'_1 - \omega_1)$$

et

$$P\varrho = I_2(\omega'_2 - \omega_2),$$

d'où :

$$\frac{\omega'_1 - \omega_1}{\omega'_2 - \omega_2} = \frac{I_2}{I_1} \frac{r}{\varrho} = C, \quad (242 \text{ a})$$

C étant constant pour chaque cas considéré.

Nous admettons que, pour les corps parfaitement élastiques, il n'y a aucune perte d'énergie cinétique à la suite du choc, donc :

$$\frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1'^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2'^2$$

ou

$$I_1(\omega_1^2 - \omega_1'^2) = I_2(\omega_2'^2 - \omega_2^2). \quad (242 \text{ b})$$

Nous avons :

$$\frac{(\omega_1 - \omega_1')(\omega_1 + \omega_1')}{(\omega_2' - \omega_2)(\omega_2' + \omega_2)} = \frac{I_2}{I_1},$$

soit :

$$-\frac{C(\omega_1 + \omega_1')}{\omega_2' + \omega_2} = \frac{I_2}{I_1},$$

d'où :

$$\omega_1 + \omega_1' = -\frac{I_2}{I_1} \frac{1}{C} (\omega_2' + \omega_2) = -\frac{\varrho}{r} (\omega_2' + \omega_2). \quad (242 \text{ c})$$

Posons $\frac{\varrho}{r} = K$. Des équations (242 a) et (242 c), tirons :

$$2\omega_1 = -\omega_2(K - C) - \omega_2'(K + C)$$

et

$$\omega_2' = \frac{-2\omega_1 - \omega_2(K - C)}{K + C}. \quad (242 \text{ d})$$

En introduisant cette valeur dans l'équation (242 c), nous obtenons une relation entre ω'_1 et les deux vitesses angulaires avant le choc. La formule définitive a la forme :

$$\omega'_1 = \omega_1 - \frac{2}{1 + \frac{I_1}{I_2} K^2} (\omega_1 + K \omega_2). \quad (242 e)$$

De la même façon, nous obtiendrons :

$$\omega'_2 = \omega_2 - \frac{2}{1 + \frac{I_2}{I_1} \left(\frac{1}{K}\right)^2} \left(\frac{\omega_1}{K} + \omega_2\right). \quad (242 f)$$

Ces formules sont valables pour les corps parfaitement élastiques. La forme générale des équations donnant les vitesses angulaires après le choc pour des corps quelconques est :

$$\omega'_1 = \omega_1 - \frac{1 + \varepsilon}{1 + \frac{I_1}{I_2} \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2} \left(\omega_1 + \frac{\varrho}{r} \omega_2\right), \quad (242 g)$$

$$\omega'_2 = \omega_2 - \frac{1 + \varepsilon}{1 + \frac{I_2}{I_1} \left(\frac{r}{\varrho}\right)^2} \left(\omega_1 \frac{r}{\varrho} + \omega_2\right). \quad (242 h)$$

Ces formules peuvent aussi être établies en partant des équations (241) et (242). A cet effet, supposons que les deux corps tournants soient remplacés par des cylindres creux de rayons respectifs r et ϱ , mais de masses m_1 et m_2 telles que les moments d'inertie soient les mêmes. Nous avons :

$$I_1 = m_1 r^2, \quad I_2 = m_2 \varrho^2.$$

La formule (241) devient :

$$r\omega'_1 = r\omega_1 - \frac{(1 + \varepsilon) \frac{I_2}{\varrho^2}}{\frac{I_1}{r^2} + \frac{I_2}{\varrho^2}} (r\omega_1 + \varrho\omega_2),$$

d'où nous tirons :

$$\omega'_1 = \omega_1 - \frac{1 + \varepsilon}{1 + \frac{I_1}{I_2} \frac{\varrho^2}{r^2}} \left(\omega_1 + \frac{\varrho}{r} \omega_2\right),$$

c'est-à-dire la formule (242 g).

Vitesse de la cheville après le choc. — Au moment où la fourchette rattrape la cheville, il se produit un choc entre deux corps élastiques; il y aura, après le choc, rupture momentanée de contact entre les deux mobiles; nous négligeons ici cette rupture de contact parce que la fourchette est, avant, pendant et après la percussion, sous l'influence du couple moteur C_a qui lui imprime une accélération angulaire considérable.

Au moment du choc, les vitesses des mobiles sont V_a et V_c dont les valeurs sont données par les formules (237) et (238) :

$$V_a = \omega r + \frac{C_a}{I_a} \varrho t_1 = \omega r + \frac{C_a}{I_a} \varrho \sqrt{\frac{2aI_a}{C_a\varrho}} = \omega r + \sqrt{\frac{2aC_a\varrho}{I_a}},$$

et

$$V_c = \omega r.$$

La vitesse angulaire du balancier passe, du fait du choc, de ω à ω' . Celle de l'ancre est, avant le choc :

$$\omega_a = \frac{V_a}{\varrho} = \omega \frac{r}{\varrho} + \sqrt{\frac{2aC_a}{\varrho I_a}}.$$

Appliquons la formule (242 g) en tenant compte du fait qu'elle a été déduite en supposant que les vitesses positives ont les directions indiquées par les flèches de la figure 268. Dans notre cas particulier, la vitesse angulaire de l'ancre est positive et celle du balancier est négative. Nous aurons donc :

$$\omega' = -\omega - \frac{1 + \varepsilon}{1 + \frac{I_b}{I_a} \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2} \sqrt{\frac{2aC_a\varrho}{r^2 I_a}}. \quad (243)$$

Vitesse angulaire du balancier à la fin de l'impulsion. — Pendant l'impulsion, la cheville de plateau, poussée par la fourchette, a un mouvement accéléré.

L'accélération angulaire de l'ancre qui, avant le choc, était égale à $\frac{C_a}{I_a}$ est maintenant :

$$\gamma = \frac{C_a}{I_a + I_b \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2},$$

puisque l'ancre doit aussi entraîner le balancier. Pour simplifier, nous supposons que le rayon de giration et la distance au point d'impact sont égaux.

Pendant l'impulsion qui dure t_2 secondes, le balancier décrit un angle α déterminé par la construction de l'échappement : il est donc connu. Appelons ω'' la vitesse angulaire du balancier à la fin de l'impulsion. Nous avons :

$$\omega'' = \omega' + \gamma t_2$$

et

$$\alpha = \frac{1}{2} \gamma t_2^2 + \omega' t_2.$$

De cette dernière équation, nous tirons :

$$t_2 = \frac{-\omega' + \sqrt{\omega'^2 + 2\alpha\gamma}}{\gamma}.$$

Introduisons cette valeur dans l'expression de ω'' ; nous obtenons :

$$\omega'' = \sqrt{\omega'^2 + 2\alpha\gamma}$$

ou

$$\omega'' = \sqrt{\omega'^2 + 2\alpha \frac{C_a}{I_a + I_b \left(\frac{\rho}{r}\right)^2}}. \quad (244)$$

Valeur de l'énergie restituée au balancier. — Avant l'impulsion, l'énergie cinétique du balancier était :

$$W = \frac{1}{2} I_b \omega^2 ;$$

après l'impulsion, elle vaut :

$$W'' = \frac{1}{2} I_b \omega''^2.$$

L'énergie transmise lors de l'impulsion est :

$$\Delta W = W'' - W = \frac{1}{2} I_b (\omega''^2 - \omega^2). \quad (245)$$

Pour que cette énergie suffise à entretenir les oscillations d'amplitude φ_0 du balancier, il faut qu'elle soit égale à l'énergie absorbée par les frottements et la résistance de l'air pendant une alternance. Or, nous avons vu — chapitre VII, formule (184) — que cette perte d'énergie est égale à :

$$\Delta W_a = \frac{1}{2} C \varphi_0 \cdot \Delta \varphi_0,$$

où φ_0 désigne l'amplitude des oscillations du balancier et C le moment élastique du spiral.

L'entretien du mouvement d'amplitude φ_0 aura lieu si :

$$\Delta W = \Delta W_a,$$

soit :

$$\frac{1}{2} I_b (\omega'^2 - \omega^2) = \frac{1}{2} C \varphi_0 \cdot \Delta \varphi_0$$

ou

$$\omega'^2 - \omega^2 = \frac{C}{I_b} \varphi_0 \cdot \Delta \varphi_0.$$

Mais $\frac{C}{I_b} = \frac{4\pi^2}{T^2}$, donc :

$$\omega'^2 - \omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} \varphi_0 \cdot \Delta \varphi_0. \quad (246)$$

Le premier membre de l'équation (246) est une fonction du couple C_a qui agit sur l'ancre. Cette équation peut donc fournir une réponse aux deux questions suivantes :

1° quelle est la valeur du couple C_a capable d'entretenir les oscillations d'amplitude φ_0 d'un balancier dont on connaît la période, le moment d'inertie et l'amortissement $\Delta \varphi_0$?

2° connaissant le couple C_a et les caractéristiques d'un balancier (période, moment d'inertie, amortissement), quelle est l'amplitude des oscillations du balancier que C_a est capable d'entretenir ?

Exemple numérique. — Admettons pour l'ancre les valeurs suivantes :

$$I_a = 0,003 \text{ g} \cdot \text{cm}^2, \quad C_a = 10 \text{ dynes-cm}, \quad \varrho = 0,45 \text{ cm};$$

pour le balancier :

$$I_b = 0,2 \text{ g} \cdot \text{cm}^2, \quad T = 0,4 \text{ s}, \quad C = 49,348 \text{ dynes-cm}, \\ r = 0,15 \text{ cm}, \quad \omega = 74 \text{ rad/s};$$

pour le jeu de la fourchette :

$$a = 0,002 \text{ cm};$$

pour le coefficient d'élasticité :

$$\varepsilon = 0,5.$$

Calculons la durée de la chute ; d'après (236) :

$$t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,002 \cdot 0,003}{10 \cdot 0,45}} = 0,001\,63 \text{ s.}$$

Pendant la chute, le balancier a la vitesse angulaire constante de 74 rad/s ; il parcourt un angle :

$$\alpha_1 = \omega t_1 = 74 \cdot 0,001\,63 = 0,120\,84 \text{ rad}$$

ou

$$\alpha_1 = \frac{0,120\,84 \cdot 180}{\pi} = 6^\circ 55' 25''.$$

La vitesse angulaire du balancier après le choc est, d'après (243) :

$$\omega' = -74 - \frac{1 + 0,5}{1 + \frac{0,2}{0,003} \left(\frac{0,45}{0,15} \right)^2} \sqrt{\frac{2 \cdot 0,002 \cdot 10 \cdot 0,45}{0,15^2 \cdot 0,003}} = -74,041 \text{ rad/s.}$$

La vitesse angulaire du balancier à la fin de l'impulsion peut être calculée d'après (244). A cet effet, déterminons d'abord l'angle α . Admettons que l'angle de levée du balancier est égal à 40° ; l'angle de dégagement, à 6° . Pendant la chute de la fourchette, le balancier parcourt un angle de $2^\circ 32' 07''$ que nous arrondirons à $2^\circ 30'$. L'angle α vaudra :

$$\alpha = 40^\circ - 6^\circ - 6^\circ 55' = 27^\circ 05' = 0,472\,69 \text{ rad.}$$

La formule (244) donne :

$$\omega'' = \sqrt{74,041^2 + 2 \cdot 0,472\,69 \cdot \frac{10}{0,003 + 0,2 \left(\frac{0,45}{0,15} \right)^2}} = 74,076 \text{ rad/s.}$$

L'énergie restituée vaut, d'après (245) :

$$\Delta W = \frac{1}{2} \cdot 0,2 (74,076^2 - 74^2) = 1,13 \text{ erg.}$$

L'énergie dissipée par alternance est exprimée par :

$$\Delta W_a = \frac{1}{2} C \varphi_0 \cdot \Delta \varphi_0.$$

Egalons ces deux dernières valeurs ; nous obtenons :

$$\frac{1}{2} C\varphi_0 \cdot \Delta\varphi_0 = 1,13$$

ou

$$\varphi_0 \cdot \Delta\varphi_0 = \frac{2 \cdot 1,13}{49,348} = 0,0458.$$

φ_0 et $\Delta\varphi_0$ sont ici exprimés en radians. Exprimons-les en degrés d'angle. Nous avons :

$$\varphi_0 \cdot \Delta\varphi_2 = 0,0458 \frac{180^2}{\pi^2} = 150,35 \text{ (degrés d'angle)}^2.$$

L'examen du tableau donné au chapitre VII (p. 81), montre que pour 147° le produit $\varphi_0 \cdot \Delta\varphi_0$ vaut 164,64 (degrés d'angle)².

Le couple $C_a = 10$ dynes-cm peut entretenir le balancier envisagé dans un mouvement dont l'amplitude est de 142° environ.

Le calcul que nous venons d'effectuer est approximatif puisqu'il ne tient pas compte de la modification des vitesses de l'ancre et du balancier lors du choc très important de la cheville contre la fourchette, au début du dégagement. Nous reviendrons sur ce point dans un chapitre suivant.

CHAPITRE X

ÉCHAPPEMENTS A REPOS POUR LES MONTRES

Les échappements à repos. — Les échappements à repos ou à repos frottants peuvent être désignés par l'expression plus longue mais plus correcte d'*échappements à contact permanent sans recul*. Le contact permanent les distingue des échappements libres, l'absence de recul, des échappements à recul.

Le contact permanent est un inconvénient puisqu'il entrave le mouvement du balancier ; l'absence de recul est un avantage en ce sens qu'une partie de l'énergie cinétique du balancier n'est pas dépensée en pure perte à faire reculer la roue d'échappement.

Dans les montres, on utilise encore l'échappement à cylindre ; celui-ci est cependant de plus en plus remplacé par l'échappement libre à ancre. On rencontre, dans d'anciennes montres, l'échappement duplex de la même famille que l'échappement à cylindre.

Différents échappements à contact permanent sans recul sont employés dans les horloges ; l'un d'entre eux, l'échappement de Graham, a donné de si bons résultats que bien des horloges modernes de précision en sont pourvues.

L'échappement à cylindre. — Inventé par Graham vers 1720, l'échappement à cylindre a eu une brillante carrière ; il a fini par détrôner l'échappement à roue de rencontre sur lequel il présente deux avantages : l'absence de recul et la possibilité pour le balancier d'exécuter des oscillations de plus grande amplitude. L'échappement à cylindre ne cède la place à l'échappement à ancre que lentement. Il a l'avantage d'être simple ; il ne comprend que deux organes : la roue d'échappement et le cylindre.

La *roue d'échappement* (ou roue de cylindre) n'est pas plate. Ses dents sont supportées par des colonnes perpendiculaires au plan de la roue ; vues d'en haut, elles ont un profil à peu près triangulaire (fig. 269 et 270).

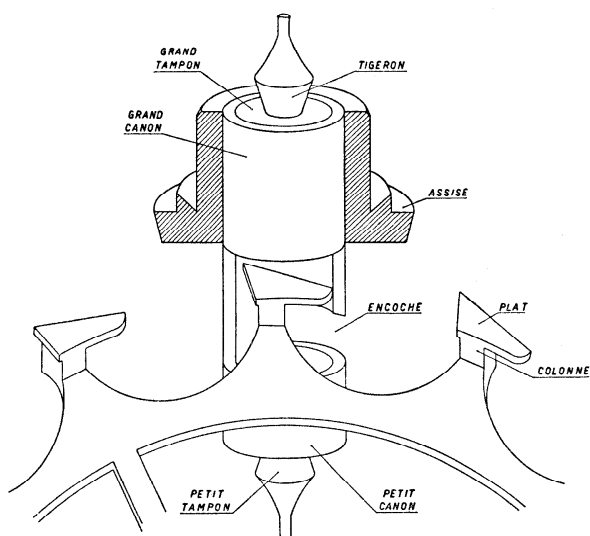


Fig. 269

Les expressions relatives aux dents de la roue d'échappement et au cylindre sont suffisamment expliquées par ces figures. La roue d'échappement est généralement en acier trempé et revenu; elle est rivée sur l'arbre du pignon d'échappement.

Le *cylindre* est un cylindre creux en acier; à ses deux extrémités, le cylindre creux est complet; à la hauteur des dents de la roue d'échappement, il est entaillé, et la partie restante est terminée par

les surfaces d'impulsion appelées *lèvres*. Au-dessous du passage des dents, le cylindre porte une encoche qui diminue encore la matière subsistante de l'anneau cylindrique; cette encoche permet au cylindre de décrire l'arc supplémentaire sans être arrêté par le corps de la roue d'échappement.

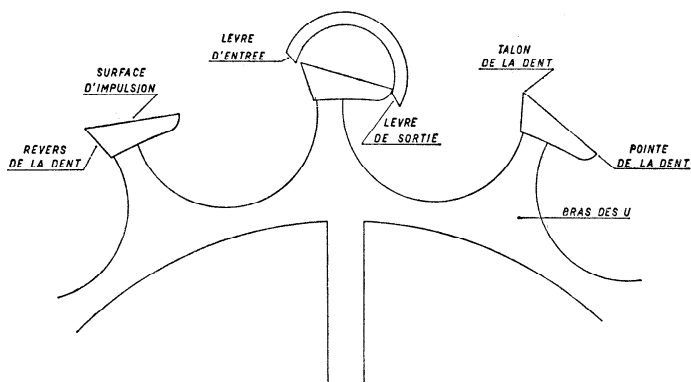


Fig. 270

Les *tampons* en acier trempé et revenu sont chassés dans les deux parties entières du cylindre creux (*grand* et *petit canon*); ils sont terminés

par les pivots. Cylindre, tampons et pivots constituent l'arbre du balancier qui est rivé sur l'*assiette* (ou assise), pièce en laiton fixée sur la partie supérieure du cylindre. L'*assiette* porte aussi l'ajustement pour la virole à laquelle est attaché le spiral.

Fonctionnement de l'échappement à cylindre. — Pour comprendre les fonctions des deux organes de l'échappement à cylindre, montrons-les en coupe, le plan de coupe étant celui du plat de la dent.

La figure 271 représente les mobiles à un instant où ils décrivent l'arc supplémentaire. Les mouvements ont lieu suivant les flèches. La force de rappel du spiral ramène le balancier vers sa position d'équilibre, tandis

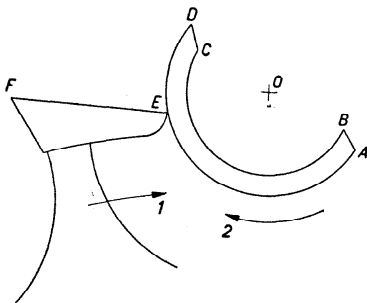


Fig. 271

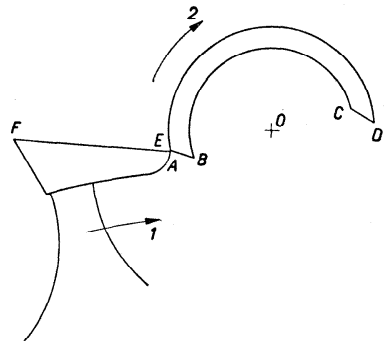


Fig. 272

que la surface latérale du cylindre glisse sur la pointe de la dent de la roue ; celle-ci ne recule pas si le cylindre tourne effectivement autour de son axe géométrique. Le balancier décrit l'*arc supplémentaire avant le point mort*.

A un moment donné, la pointe de la dent rencontre l'extrémité A de la lèvre d'entrée du cylindre (fig. 272), et la roue, animée par la force du ressort moteur, peut se mouvoir dans le sens de la flèche 1. Le plan d'impulsion EF de la dent repousse le plan AB de la lèvre d'entrée ; cette pression donne au balancier une accélération dans le sens de la flèche 2. C'est la *période d'impulsion* qui sera terminée lorsque les mobiles auront la position représentée dans la figure 273.

A ce moment, la dent de la roue abandonne la lèvre d'entrée ; elle n'a devant elle aucune résistance ; elle prend donc un mouvement accéléré jusqu'à ce que la pointe E rencontre la paroi intérieure du cylindre en G (fig. 274). Ce mouvement est appelé la *chute* ; il est mesuré par l'angle BO_1F décrit par la roue. Pendant ce parcours, la roue est le siège d'une transformation de l'énergie du ressort moteur en énergie cinétique ; cette

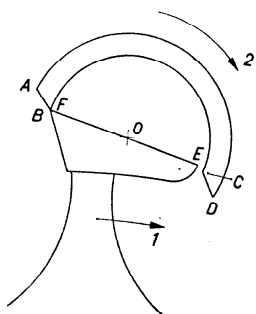


Fig. 273

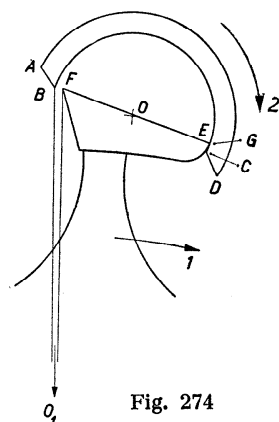


Fig. 274

fraction d'énergie est perdue pour le balancier. Cet angle doit donc être réduit autant que possible ; il ne peut cependant pas être supprimé, car il assure la liberté de la dent à l'intérieur du cylindre.

Le mouvement du cylindre continue dans le même sens, mais, le point mort étant dépassé, ce mouvement est contrarié par le spiral ; aussi, à un certain moment, le balancier s'arrête-t-il (fig. 275). Le spiral tendu ramène alors le cylindre vers la position d'équilibre ; le mouvement a lieu dans le sens de la flèche 3. Depuis l'instant où la dent est tombée sur la paroi intérieure du cylindre jusqu'au moment où le point C est vis-à-vis de la pointe de la dent (fig. 276), la roue est immobile, mais la pointe E

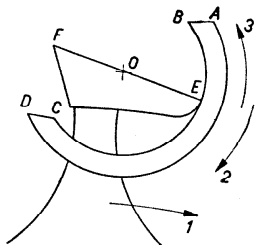


Fig. 275

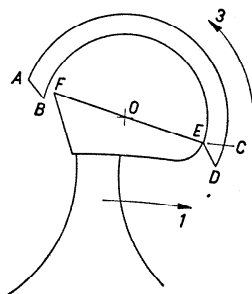


Fig. 276

frotte constamment contre l'intérieur du cylindre. La figure 276 représente les deux mobiles au commencement de l'impulsion sur la lèvre de sortie ; cette impulsion donne au balancier une accélération angulaire dans le sens de la flèche 3.

A la fin de l'impulsion, le cylindre et la roue sont dans la position représentée par la figure 277. Lorsque la dent 1 abandonne la lèvre de sortie, la dent suivante 2 est près de la paroi extérieure du cylindre.

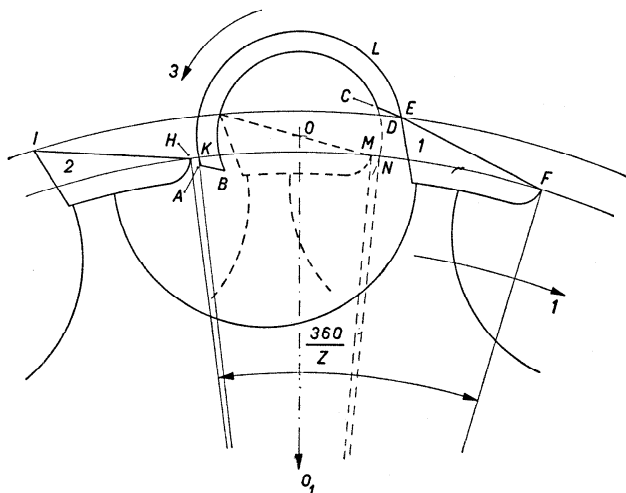


Fig. 277

L'impulsion terminée, la roue est libérée; après avoir parcouru l'angle de chute extérieure HO_1K , la pointe de la dent 2 atteint bientôt la paroi du cylindre. Le mouvement du cylindre continue dans le sens de la flèche 3; pendant le parcours de cet angle supplémentaire, la roue est immobile; la pointe H de la dent 2 frotte contre l'extérieur du cylindre qui tourne avec une vitesse de plus en plus réduite par la résistance croissante du spiral. Dès que le balancier est arrêté, il est ramené par le spiral vers sa position d'équilibre; les positions respectives de la roue et du cylindre se reproduisent ensuite dans l'ordre représenté par les figures 271 à 277.

Une dent de la roue d'échappement donne deux impulsions consécutives: l'une sur la lèvre d'entrée, l'autre, au cours de l'alternance suivante, sur la lèvre de sortie.

Les angles parcourus par le cylindre ou le balancier et par la roue. — Pendant la durée d'une alternance, le balancier décrit les angles suivants :

- 1° l'angle supplémentaire avant le point mort;
- 2° l'angle d'impulsion;
- 3° un très petit angle pendant la chute de la roue; c'est le seul moment de l'alternance pendant lequel, le contact entre la roue et le cylindre étant rompu, le balancier est libre;

4° l'angle supplémentaire après l'impulsion.

Lorsque, après la chute extérieure, la dent 2 (fig. 277) atteint la paroi extérieure du cylindre, le contact a lieu en K ; à la fin de l'arc supplémentaire, il a lieu en un point L ; l'angle supplémentaire est KOL .

Lorsque le balancier retourne vers la position d'équilibre, il décrit, avant le point mort, l'angle supplémentaire LOA . La différence entre les angles LOA et KOL est l'angle KOA appelé *angle de repos*.

La somme des angles de repos et d'impulsion porte le nom d'*angle de levée du balancier*.

La roue se meut seulement pendant l'impulsion et pendant la chute ; elle parcourt l'*angle d'impulsion* et l'*angle de chute*.

Pour que (fig. 277) la dent 2 arrive dans la position de la dent 1, la roue doit parcourir :

- 1° l'angle de chute extérieure HO_1K ,
- 2° l'angle d'impulsion AO_1M sur la lèvre d'entrée,
- 3° l'angle de chute intérieure MO_1N ,
- 4° l'angle d'impulsion NO_1F sur la lèvre de sortie.

La somme de ces angles est égale au pas angulaire de la roue, c'est-à-dire à $\frac{360^\circ}{z}$ pour une roue de z dents.

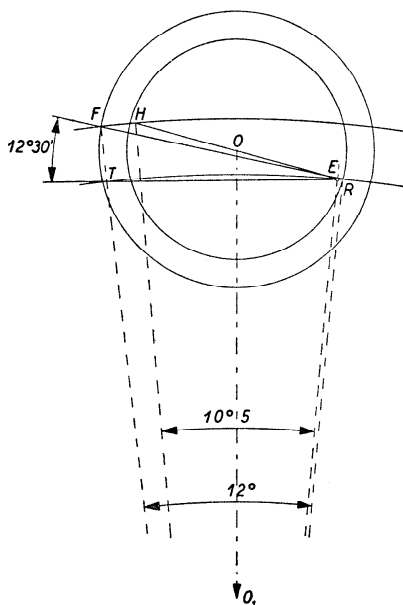


Fig. 278

Les dimensions du cylindre et de la roue. — Pour calculer les dimensions du cylindre et de la roue, il faut tout d'abord déterminer le rayon O_1F de la trajectoire des talons des dents de la roue (fig. 278).

Dans le triangle RO_1F , on connaît le côté O_1R qui n'est autre que le rayon de la trajectoire des pointes, pris pour unité ($O_1R = 1$) et l'angle RO_1F qui est par construction de 12° pour une roue de 15 dents.

L'angle $FR O_1$ est la somme de l'angle FRT , égal à $12^\circ 30'$, et de l'angle :

$$TRO_1 = \frac{180 - 12}{2} = 84^\circ.$$

L'angle $FR O_1$ vaut donc $96^\circ 30'$. Or :

$$\begin{aligned} O_1FR &= 180^\circ - (RO_1F + FR O_1), \\ &= 71^\circ 30'. \end{aligned}$$

Le côté OF_1 est alors donné par la formule :

$$O_1F = \frac{O_1R \sin FRO_1}{\sin O_1FR} = \frac{\sin 96^\circ 30'}{\sin 71^\circ 30'} = 1,0477.$$

Il s'agit ensuite de calculer la longueur HE du plan d'impulsion d'une dent (fig. 278).

Dans le triangle HO_1E , on a :

$$O_1E = 1, \quad O_1H = 1,0477, \quad HO_1E = 10^\circ 5'.$$

Ces données permettent de calculer :

$$\frac{O_1HE + HEO_1}{2} = 90^\circ - \frac{HO_1E}{2} = 90^\circ - 5^\circ 2' 30'' = 84^\circ 57' 30''$$

et

$$\operatorname{tg} \frac{HEO_1 - O_1HE}{2} = \frac{(O_1H - O_1E)}{O_1H + O_1E} \operatorname{tg} \frac{O_1HE + HEO_1}{2} = \frac{0,0477 \operatorname{tg} 84^\circ 57' 30''}{2,0477},$$

d'où :

$$\frac{HEO_1 - O_1HE}{2} = 14^\circ 47' 42''.$$

De ces deux résultats, on peut tirer les valeurs des angles O_1HE et HEO_1 :

$$O_1HE = 70^\circ 9' 48'', \quad HEO_1 = 99^\circ 45' 12'';$$

on peut dès lors calculer la valeur de HE :

$$HE = \frac{O_1E \sin EO_1H}{\sin O_1HE} = \frac{\sin 10^\circ 5'}{\sin 70^\circ 9' 48''} = 0,1861.$$

Il y a lieu ensuite de déterminer la distance des centres O_1O (fig. 278). Dans le triangle OO_1E , on a :

$$O_1E = 1, \quad OE = \frac{HE}{2} = 0,0931, \quad HBO_1 = 99^\circ 45' 12''.$$

De ces données, on tire tout d'abord :

$$\frac{O_1OE + EO_1O}{2} = 90^\circ - \frac{HEO_1}{2} = 90^\circ - 49^\circ 52' 36'' = 40^\circ 7' 24'',$$

puis :

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{O_1OE - EO_1O}{2} &= \frac{(O_1E - OE) \operatorname{tg} \frac{O_1OE + EO_1O}{2}}{O_1E + OE} \\ &= \frac{0,9069 \operatorname{tg} 40^\circ 7' 24''}{1,0931} = \operatorname{tg} 34^\circ 57' 50'', \end{aligned}$$

d'où :

$$\frac{O_1OE - EO_1O}{2} = 34^\circ 57' 50'';$$

on voit donc que :

$$EO_1O = 5^\circ 9' 34'', \quad O_1OE = 75^\circ 5' 14'',$$

ce qui permet de calculer :

$$\begin{aligned} OO_1 &= \frac{O_1E \sin HEO_1}{\sin O_1OE} \\ &= \frac{\sin (180^\circ - 99^\circ 45' 12'')}{\sin 75^\circ 5' 14''} \\ &= \frac{\sin 80^\circ 14' 48''}{\sin 75^\circ 5' 14''} = 1,0199. \end{aligned}$$

Pour calculer le rayon intérieur OR du cylindre (fig. 279), on considère le triangle OO_1R dont on connaît :

$$\begin{aligned} O_1R &= 1, \quad O_1O = 1,0199, \\ RO_1O &= EO_1O + EO_1R = 5^\circ 24' 34''. \end{aligned}$$

De là, on déduit tout d'abord :

$$\frac{ORO_1 + O_1OR}{2} = 90^\circ - \frac{RO_1O}{2} = 90^\circ - 2^\circ 42' 17'' = 87^\circ 17' 43'',$$

puis :

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{ORO_1 - O_1OR}{2} &= \frac{(O_1O - O_1R) \operatorname{tg} \frac{ORO_1 + O_1OR}{2}}{O_1O + O_1R} \\ &= \frac{0,0199 \operatorname{tg} 87^\circ 17' 43''}{2,0199} = \operatorname{tg} 11^\circ 46' 43'', \end{aligned}$$

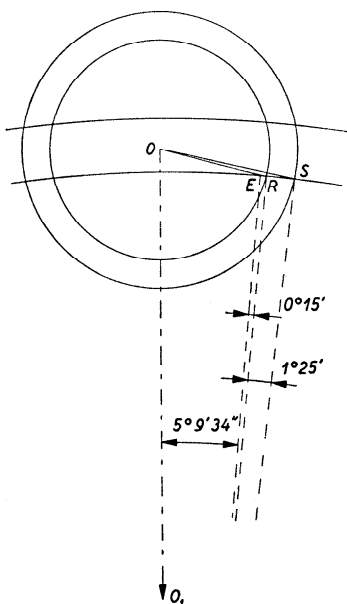


Fig. 279

d'où :

$$\frac{ORO_1 - O_1OR}{2} = 11^\circ 46' 43''.$$

Les angles O_1OR et ORO_1 ont donc les valeurs suivantes :

$$O_1OR = 75^\circ 31' 0'', \quad ORO_1 = 99^\circ 4' 26''$$

et, par conséquent :

$$OR = \frac{O_1R \sin RO_1O}{\sin O_1OR} = \frac{\sin 5^\circ 24' 34''}{\sin 75^\circ 31'} = 0,0974.$$

On détermine enfin le rayon extérieur OS du cylindre (fig. 279). Dans le triangle OO_1S , on a :

$$\begin{aligned} O_1S &= 1, & O_1O &= 1,0199, \\ SO_1O &= RO_1O + SO_1R = 5^\circ 24' 34'' + 1^\circ 25' = 6^\circ 49' 34'', \end{aligned}$$

où l'angle SO_1R représente la valeur angulaire de l'épaisseur de l'écorce.

Ces données permettent d'obtenir tout d'abord :

$$\frac{OSO_1 + O_1OS}{2} = 90^\circ - \frac{SO_1O}{2} = 86^\circ 35' 13'',$$

puis :

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{OSO_1 - O_1OS}{2} &= \frac{(O_1O - O_1S) \operatorname{tg} \frac{OSO_1 + O_1OS}{2}}{O_1O + O_1S} \\ &= \frac{0,0199 \operatorname{tg} 86^\circ 35' 13''}{2,0199} = \operatorname{tg} 9^\circ 22' 45'', \end{aligned}$$

d'où :

$$\frac{OSO_1 - O_1OS}{2} = 9^\circ 22' 45''.$$

On voit ainsi que :

$$O_1OS = 77^\circ 12' 28'', \quad OSO_1 = 95^\circ 57' 58'',$$

d'où :

$$OS = \frac{O_1S \sin SO_1O}{\sin O_1OS} = \frac{\sin 6^\circ 49' 34''}{\sin 77^\circ 12' 28''} = 0,1219.$$

Tracé de l'échappement à cylindre. — Les dimensions que nous venons de calculer peuvent être déterminées par le dessin avec une exactitude suffisante pour la pratique.

Partons des données suivantes (fig. 280) :

1. le rayon de la trajectoire des pointes des dents de la roue de 15 dents ; l'angle au centre, correspondant à l'arc compris entre deux pointes de dents consécutives, est, pour une roue de 15 dents, égal à 24° ;
2. l'épaisseur de l'écorce du cylindre (mesurée sur la trajectoire des pointes des dents de la roue) qui vaut $1^\circ 25'$;
3. la chute égale à $0^\circ 30'$;
4. l'épaisseur d'une dent qui est de $10^\circ 5'$.

La somme de ces trois quantités est :

$$1^\circ 25' + 0^\circ 30' + 10^\circ 5' = 12^\circ,$$

ce qui équivaut à la moitié du pas angulaire de la roue ;

5. la levée totale sur chaque lèvre qui est de 40° ;
6. l'angle de repos 5° ;
7. l'angle d'impulsion de 35° , soit environ 25° par le plan d'impulsion d'une dent et 10° par une des lèvres du cylindre ;
8. le centre du cylindre placé au milieu de la droite joignant le talon et la pointe d'une dent.

A partir de ces données, construisons le plan d'impulsion d'une dent et les profils intérieurs et extérieurs de l'écorce du cylindre. D'un point O_1 , centre de la roue, traçons une circonférence dont le rayon est égal à celui de la trajectoire des pointes des dents. Construisons ensuite un angle RO_1T de 12° , égal à la moitié du pas angulaire de la roue : R et T sont sur la trajectoire des pointes des dents. Joignons les points R et T par une droite et construisons un angle TRF de $12^\circ 30'$. F se trouve à l'intersection d'un des côtés de cet angle avec le prolongement du rayon O_1T . L'angle TRF doit être approximativement égal à la moitié de la levée produite par le plan d'impulsion d'une dent. Si l'angle de levée produit par une dent devait être de 30° , nous prendrions 15° pour la valeur de l'angle TRF . La circonférence de rayon O_1F est la trajectoire des talons des dents de la roue.

Construisons les trois angles RO_1S , de $1^\circ 25'$, épaisseur de l'écorce du cylindre, RO_1E , de $0^\circ 15'$, égal à la moitié de l'angle de chute, et EO_1H , de $10^\circ 5'$, correspondant à l'épaisseur d'une dent. Nous répartissons, en parties égales, l'angle de chute $0^\circ 30'$ en avant et en arrière de la dent, parce que le milieu de la droite qui joint le talon et la pointe est au centre du cylindre. S et E sont sur la trajectoire des pointes, H sur celle des talons des dents de la roue. Tirons la droite HE , profil du plan d'impulsion d'une dent ; de son milieu O , avec HR et HS pour rayon, traçons les profils intérieur et extérieur de l'écorce du cylindre.

Pour construire la lèvre de sortie, traçons OD' passant par le point d'intersection D' du profil extérieur du cylindre avec la trajec-

toire des talons des dents de la roue, puis formons un angle $D'OD$, de 40° , égal à l'angle de levée totale. D est sur le profil extérieur du cylindre ; D' est la position de l'extrémité extérieure de la lèvre à la fin de la levée et D , sa position à l'instant où la roue tombe au repos en R (point d'in-

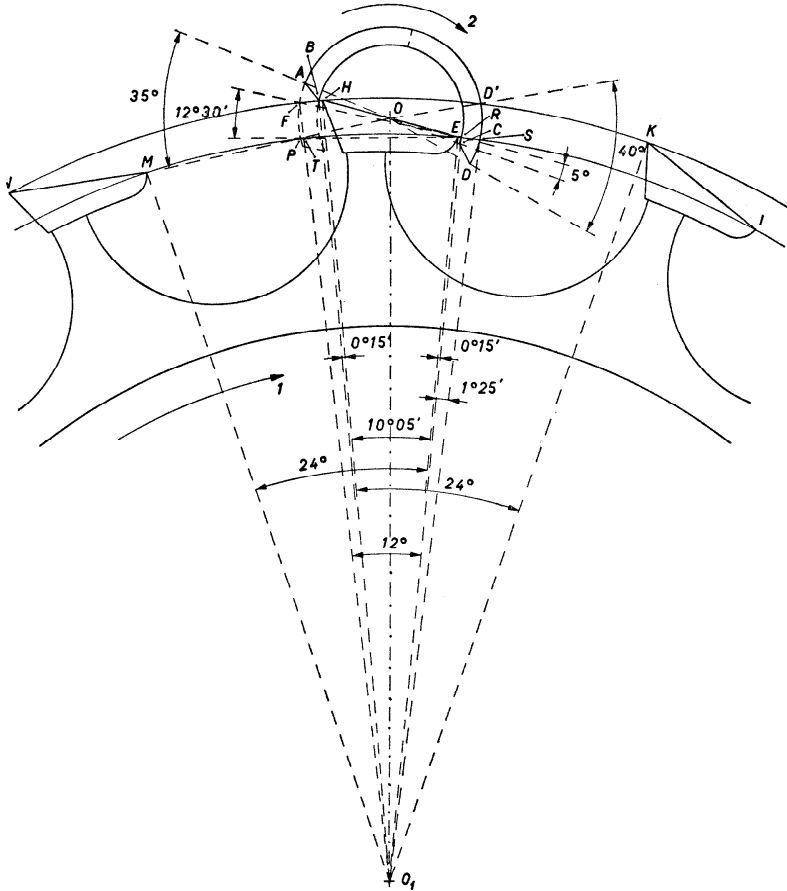


Fig. 280

tersection de la trajectoire des pointes des dents avec le profil intérieur du cylindre). L'angle de repos étant supposé égal à 5° , construisons l'angle ROC de 5° . L'origine C du plan d'impulsion de la lèvre de sortie est sur le profil intérieur du cylindre. CD est le profil du plan d'impulsion de la lèvre de sortie.

La construction de la lèvre d'entrée se fait comme suit : par le point d'intersection P du profil extérieur du cylindre avec la trajectoire des pointes des dents, traçons le rayon OP et dessinons un angle POA de 35° , égal à l'angle de levée totale moins l'angle de repos (angle d'impulsion totale). Le point A se trouve sur le profil extérieur du cylindre et représente l'origine du plan d'impulsion de la lèvre d'entrée. Le point B se trouve à l'intersection du profil intérieur du cylindre et de la trajectoire des talons des dents. La droite AB est le profil du plan d'impulsion de la lèvre d'entrée.

Transmission de l'énergie de la roue au balancier. — Appelons M le

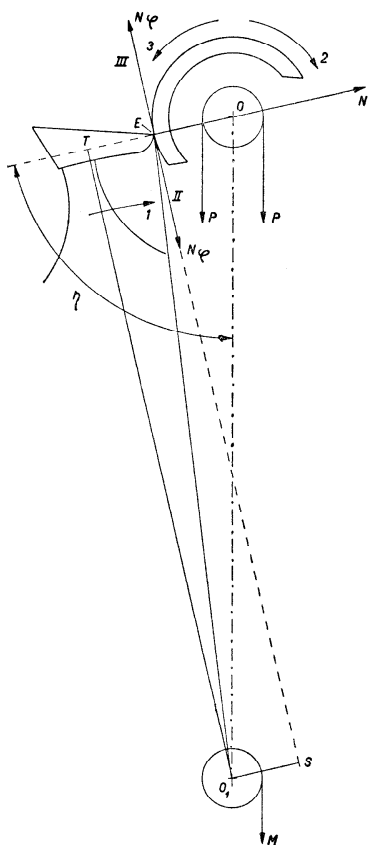


Fig. 281

moment moteur par rapport au centre O_1 de la roue (fig. 281); nous pouvons le représenter par une force M agissant à l'unité de distance de O_1 . La dent de la roue est appuyée contre la paroi extérieure du cylindre; elle exerce contre ce dernier une pression N dirigée vers le centre O . Le frottement $N\varphi$ est dirigé suivant la tangente à la circonférence extérieure du cylindre; suivant II, si le sens de rotation du cylindre est celui de la flèche 2; suivant III, si le cylindre tourne dans le sens de la flèche 3.

Pour le sens de rotation de la flèche 3, l'équation d'équilibre de la roue est :

$$M - N \cdot \overline{O_1 T} - N\varphi \cdot \overline{O_1 S} = 0.$$

En désignant par P le moment de force qui maintient le cylindre en équilibre et par r' le rayon extérieur du cylindre, l'équation d'équilibre du cylindre est :

$$P - N\varphi r' = 0.$$

Mais si l'on appelle R la distance des centres OO_1 , $\overline{O_1 T} = R \sin \eta$, $\overline{O_1 S} = R \cos \eta - r'$. En introduisant ces valeurs dans les équations d'équilibre, nous obtenons finalement :

$$P = M \frac{\varphi r'}{R \sin \eta + \varphi(R \cos \eta - r')} \quad (247)$$

Si la rotation du cylindre se fait suivant la flèche 2, la valeur de P est donnée par l'équation :

$$P = M \frac{\varphi r'}{R \sin \eta - \varphi(R \cos \eta - r')} \quad (248)$$

Nous pouvons calculer l'angle η puisque, dans le triangle OO_1E , nous connaissons R , r' et le rayon ϱ_1 de la pointe des dents. Appliquons la formule :

$$\sin \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}};$$

nous avons :

$$\sin \frac{\eta}{2} = \sqrt{\frac{\left(\frac{R+r'+\varrho_1}{2} - R\right) \left(\frac{R+r'+\varrho_1}{2} - r'\right)}{Rr'}}$$

ou

$$\sin \frac{\eta}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(r' + \varrho_1 - R)(R + \varrho_1 - r')}{Rr'}} \quad (249)$$

Si le contact a lieu à l'intérieur du cylindre, le moment P peut être calculé au moyen des formules :

$$P = M \frac{\varphi r}{R \sin \eta + \varphi(R \cos \eta - r)} \quad (250)$$

ou

$$P = M \frac{\varphi r}{R \sin \eta - \varphi(R \cos \eta - r)} \quad (251)$$

où r désigne le rayon intérieur du cylindre, suivant que le mouvement du cylindre se fait dans le sens de la flèche 3 ou dans celui de la flèche 2.

Examinons les conditions d'équilibre pendant l'impulsion. Soit B (fig. 282) le point de contact de la dent avec la lèvre d'entrée ; la pression de la dent est dirigée suivant BN perpendiculaire à BO_1 . Si M est le moment moteur agissant sur la roue d'échappement, nous avons, en négligeant les frottements :

$$N = \frac{M}{O_1B}.$$

L'équation (252) devient finalement :

$$P = \frac{Mr}{O_1B} \frac{\sin \alpha + \varphi \sin(\alpha + \beta) \sin \beta}{1 + \varphi \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \beta)}. \quad (253)$$

Le rapport $\frac{P}{M}$ serait égal à $\frac{r}{O_1B}$, si le rendement était égal à 1.

En faisant abstraction du frottement, le rendement momentané serait égal à $\sin \alpha$, donc bien faible, ce qui tient au fait que N a un petit bras de levier par rapport à O .

Pour calculer le rendement global de l'échappement à cylindre, il faut évaluer le travail absorbé par les frottements (y compris le frottement des pivots) pendant une oscillation.

Les modifications apportées par la pratique aux données de la théorie. —

L'un des graves inconvénients de l'échappement à cylindre est l'usure provoquée par le frottement de la pointe de la dent contre les parois du cylindre. Pour l'atténuer, il convient de tremper le cylindre et de le revenir très peu dans la région des lèvres ; la pointe de la dent doit être remplacée par un léger arrondi bien poli ; les lèvres sont graissées avec un peu d'huile fluide. La roue d'échappement est aussi en acier trempé et revenu.

Nous avons représenté les lèvres par des segments rectilignes ; en pratique il y a lieu d'éviter les angles vifs qui produisent une usure considérable des surfaces d'impulsion des dents de la roue.

Les moments où la roue est libérée, au début de l'impulsion, sont assez critiques. A cet instant, le balancier a une grande vitesse angulaire ; une rupture de contact — un décollement — se produit entre la dent et le cylindre ; un contact brutal va avoir lieu entre le plan d'impulsion de la dent et l'arête de la lèvre. Pour éviter cet inconvénient ou du moins le réduire, le plan théorique de la lèvre d'entrée est relié à la paroi extérieure du cylindre par un arc de circonférence ; il en est de même pour la lèvre de sortie et la paroi intérieure du cylindre.

Le frottement considérable de la dent contre la paroi du cylindre s'exerce pendant les longs parcours des angles supplémentaires ; il provoque de ce fait un amortissement important de l'amplitude du balancier et une diminution notable de sa vitesse angulaire. Un choc diminuant cette vitesse peut immobiliser momentanément le balancier ; si cet accident se produit tôt après l'impulsion, il arrive que la montre ne se remette pas en marche, car le spiral est peu armé et sa force peut être insuffisante pour vaincre le frottement. L'échappement à cylindre présente le défaut connu sous le nom d'*arrêt au doigt*.

Pour diminuer le frottement, des cylindres en rubis ont été utilisés, mais la difficulté d'exécution, la fragilité du cylindre et les frais supplémentaires sont trop grands pour un mécanisme qui n'est plus assez précis pour les montres actuelles.

En somme, la transmission d'énergie de la roue au cylindre se fait comme dans les engrenages. Pour réaliser une transmission uniforme de l'énergie et en même temps un rapport constant des vitesses pendant l'impulsion, nous n'avons qu'à appliquer la théorie des engrenages et donner, par exemple, aux profils d'impulsion de la dent et des lèvres des formes en arc de développante de cercle. Il y a cependant une difficulté. Sur la lèvre d'entrée, le travail de la dent est analogue à celui des dents d'un engrenage intérieur puisque les deux mobiles ont, pendant l'impulsion, le même sens de rotation. Sur la lèvre de sortie, au contraire, nous avons un engrenage extérieur. Le même profil de la dent ne peut pas convenir dans les deux cas. En pratique, il suffit en général d'arrondir le profil d'impulsion de la dent et celui de la lèvre d'entrée. Pour la lèvre de sortie, le meilleur profil est un segment de droite raccordé par un arc de cercle avec la paroi intérieure du cylindre.

La flèche du cylindre. — Pour contrôler si le cylindre est correctement entaillé, c'est-à-dire si les lèvres sont à la bonne distance l'une de l'autre, on mesure la flèche FL (fig. 283) passant par O et perpendiculaire à la droite BD joignant les points de fin d'impulsion des lèvres.

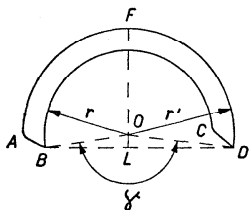


Fig. 283

On admet assez généralement pour rapport entre la flèche et le diamètre extérieur du cylindre :

$$\frac{FL}{2r'} = \frac{5}{9}, \quad FL = \frac{5}{9} 2r'.$$

Cependant FL ne dépend pas seulement de r' , mais aussi de r . Soit γ l'angle BOD ; on a :

$$BD = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma}.$$

Si S désigne la surface du triangle BOD , on a :

$$S = \frac{1}{2} rr' \sin \gamma = \frac{1}{2} BD \cdot OL,$$

d'où :

$$OL = \frac{rr' \sin \gamma}{BD} = \frac{rr' \sin \gamma}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma}}$$

et

$$FL = r' + \frac{rr' \sin \gamma}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma}}. \quad (254)$$

La grandeur de la flèche dépend donc de r , de r' et de γ . Si r et r' sont donnés, FL ne dépend plus que de l'angle γ qui est généralement à peu près égal à 170° .

On peut mesurer, au micromètre, la flèche et le diamètre $2r'$ du cylindre.

Pour vérifier si le rapport $\frac{FL}{2r'}$ est exact dans un cylindre donné,

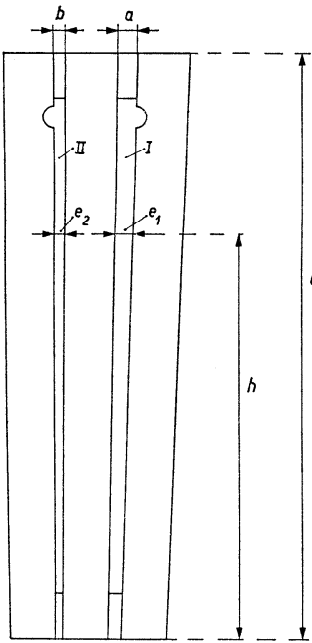


Fig. 284

on utilise aussi la *filière aux cylindres*, composée de trois réglettes d'acier (fig. 284) laissant entre elles deux rainures triangulaires. L'écartement des bords d'une rainure est proportionnel à la distance h et à l'une ou l'autre des grandeurs a ou b . Soient e_1 et e_2 les écartements des bords des rainures à la hauteur h des réglettes de longueur l :

$$e_1 = a \frac{h}{l}, \quad e_2 = b \frac{h}{l},$$

d'où :

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{a}{b}.$$

Les réglettes sont fixes; le rapport $\frac{a}{b}$ est constant. On construit la filière de façon que $\frac{a}{b} = \frac{5}{9}$.

Si le diamètre du cylindre est mesuré dans la rainure I à la hauteur h et si le cylindre entaillé se place dans la rainure

II à la même hauteur, le rapport de la flèche au diamètre est correct.

Défauts dans l'échappement à cylindre. — Les principaux défauts que l'on constate dans les échappements à cylindre sont dus à trois causes qui sont l'inexactitude: 1° de la distance des centres roue-cylindre, 2° des dimensions du cylindre, 3° de l'entaillage du cylindre.

Si la distance des centres est trop petite, la dent pénètre trop profondément dans le cylindre et la chute intérieure est trop faible. Si la distance des centres est trop grande, le repos est diminué; il peut même ne plus exister et, après l'impulsion, une dent de la roue tombe sur une des lèbres.

Un cylindre trop gros de diamètre extérieur diminue la chute extérieure ; si le cylindre est trop petit, la chute intérieure est réduite outre mesure. Dans ces deux cas, on suppose que le rapport $\frac{r'}{r}$ est correct :

si le diamètre extérieur est trop grand, le diamètre intérieur l'est aussi.

Si le diamètre extérieur du cylindre est exact et le diamètre intérieur trop petit (ce qui correspond à une écorce trop forte), la chute intérieure est trop faible.

Il arrive enfin que le cylindre soit mal entaillé : l'angle n'est pas juste ou l'inclinaison des lèvres est incorrecte. Les repos sont inégaux.

Pour permettre de corriger la distance des centres tout en conservant le parallélisme des axes du cylindre et de la roue, la plupart des montres à cylindre sont munies d'un *chariot* qui porte le coq ainsi que la pierre et le contre-pivot de dessous (fig. 285).

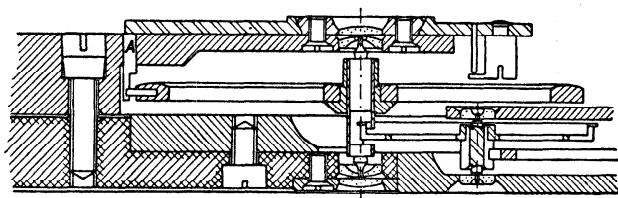


Fig. 285

Le chariot est une pièce en laiton vissée sur la platine ; sa position est encore assurée par des pieds, mais la tête de la vis et les pieds ont un certain jeu, de sorte qu'il est possible de déplacer légèrement le chariot ; ce déplacement effectué, la vis est serrée à fond et le chariot est fixé.

Une chute trop faible peut être corrigée en limant la pointe de la dent avec une lime en saphir, mais il ne faut user de ce moyen que lorsque le défaut est petit, sinon on doit remplacer le cylindre.

On peut aussi retoucher les lèvres avec une lime en saphir ou en rubis pour égaliser les repos.

L'amplitude du balancier. — On cherche toujours à donner aux oscillations du balancier la plus grande amplitude compatible avec le fonctionnement de l'échappement.

Dans la figure 286, la pointe *E* de la dent est appuyée contre la paroi extérieure du cylindre ; l'impulsion sur la lèvre de sortie a eu lieu et le balancier décrit l'arc supplémentaire dans le sens de la flèche 3. La pointe *E* est sur l'extrémité *D* de la lèvre de sortie ; si le cylindre

tourne encore un peu, la pointe *E* se trouvera devant le vide; la roue avancera, et lorsque le cylindre voudra tourner en sens inverse sous l'influence du spiral, il sera arrêté par la dent de la roue. C'est ce qu'on appelle le *renversement*. Il est facile de voir que le danger du renversement est grand dès que l'amplitude des oscillations du balancier approche de 180° ou π radians.

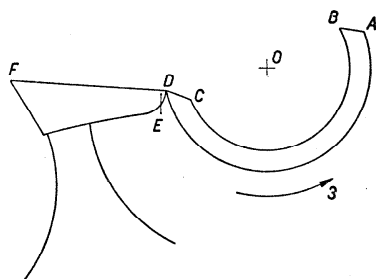


Fig. 286

On empêche le renversement en plaçant un « plot » *A* à l'arrière du coq (fig. 285); une goupille est fixée radialement dans la serge du balancier. Dès que l'amplitude atteint une certaine valeur voisine de 180° , la goupille bute contre le plot; le balancier est arrêté dans sa course et rejeté en arrière: le renversement ne se produit pas.

Le contact de la goupille et du plot ne doit être qu'exceptionnel, c'est dire qu'il ne doit se produire que lorsque la montre reçoit un choc qui augmente outre mesure la vitesse angulaire du balancier.

Quand le contact entre la goupille et le plot se produit, on a ce qu'on appelle le *rebattement*; ce phénomène occasionne une très forte perturbation de la période du balancier.

Influence de l'échappement à cylindre sur la période du balancier. —

A première vue, à cause du contact permanent entre la roue d'échappement et le cylindre, l'échappement à cylindre doit modifier considérablement la période du balancier. Mais l'effet de l'échappement est en partie une augmentation, en partie une diminution de la période du balancier, de sorte que l'effet global est bien moins grand qu'on ne le suppose d'abord. On a vu d'ailleurs que, pour la mesure du temps, il est de peu d'importance d'avoir un oscillateur dont la période a la valeur assignée par la théorie; ce qui importe, c'est que cette période, perturbée ou non, soit constante.

On aura plus de chance d'obtenir une période constante s'il n'y a pas de perturbations, car celles-ci sont de nature plus ou moins capricieuse, comme le frottement, ou créent des défauts d'isochronisme dont le résultat est une variation de la marche de la montre dès que l'amplitude des oscillations du balancier change. Or, on ne saurait empêcher que l'amplitude du balancier varie, par exemple lorsque la position de la montre ou la température sont modifiées, lorsque les huiles deviennent plus visqueuses en vieillissant ou lorsque la montre est secouée.

Que se passe-t-il dans l'échappement à cylindre au cours d'une alter-

nance? OA (fig. 287) représente le bras du balancier dans la position d'équilibre. Au début de l'alternance, le bras se trouve en OE_1 ; à la fin, en OE_2 ; ces deux positions devraient être symétriques par rapport à OA .

L'impulsion commence lorsque le bras est en OB et dure jusqu'à ce qu'il soit en OC . Elle n'est pas également répartie autour de OA , car l'angle AOC est plus grand que l'angle BOA .

Par contre, l'angle de levée qui est la somme des angles d'impulsion BOC et de repos DOB est également réparti autour de la position d'équilibre.

L'alternance se compose de trois parties : 1° de OE_1 à OB , la pointe de la dent frotte, dans le cas de la figure 287, contre la surface intérieure du cylindre; 2° de OB à OC , la dent accélère le mouvement du balancier en agissant sur la lèvre de sortie; 3° de OC à OE_2 , la pointe de la dent frotte contre la surface extérieure du cylindre. On fait abstraction ici des temps très courts pendant lesquels la roue ne touche pas le cylindre, c'est-à-dire des durées des chutes et du temps que la roue met à rattraper le cylindre au début de l'impulsion.

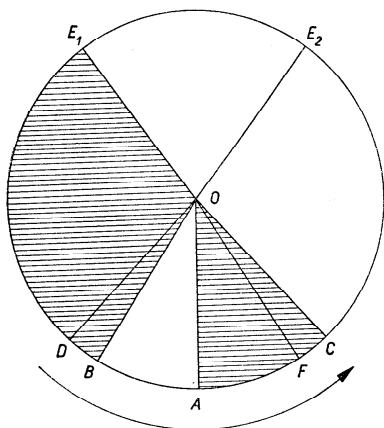


Fig. 287

En première approximation on peut raisonner ainsi : dans le trajet désigné par E_1B , le frottement provoque une augmentation de la période (résistance avant le point mort); dans le trajet BA , l'impulsion diminue la période (impulsion avant le point mort); durant le trajet AC , il y a accroissement de la période (impulsion après le point mort), tandis que le frottement réduit la période de C à E_2 (résistance après le point mort).

Dans la figure 287 les parcours pendant lesquels la période augmente sont hachurés; les parcours en blanc sont ceux pendant lesquels se produit une diminution de la période, soit une avance de la montre.

L'avance et le retard ne se compensent pas, car :

$$\sphericalangle E_1OB > \sphericalangle COE_2$$

et

$$\sphericalangle AOC > \sphericalangle AOB.$$

Mais pour évaluer l'effet perturbateur d'un certain facteur sur la période, il faut non seulement tenir compte de sa durée d'activité, comme on vient de le faire, mais aussi envisager son intensité et le moment de son action par rapport au passage au point mort. Si certaines conditions sont remplies, le retard causé pendant le trajet E_1D est compensé par l'avance dans le trajet CE_2 , puisque ces deux arcs sont symétriques par rapport à OA . Il reste donc un retard non compensé : celui que le frottement produit pendant le trajet DB . Comme D est assez près de A , ce retard est relativement faible.

De même le retard dû à l'impulsion de A à C n'est pas totalement compensé par l'avance due à la même cause pendant le trajet BA . Soit le point F symétrique de B par rapport à OA ; l'impulsion provoque un retard non compensé pendant le trajet FC ; ce retard s'ajoute à celui du trajet DB .

Quelle est enfin l'intensité des facteurs perturbateurs ? Le frottement est, si l'on admet la loi de Coulomb, égal à la pression normale N multipliée par le coefficient de frottement φ . Si le moment M agissant sur l'axe de la roue d'échappement est constant, la pression normale N l'est aussi ; si φ ne varie pas au cours du mouvement, le frottement est constant. S'il se produit sur la surface extérieure du cylindre, son moment est $N\varphi r'$, tandis qu'il est $N\varphi r$ lorsque la dent frotte dans l'intérieur du cylindre. Ces moments sont inégaux ; on ne peut donc pas parler de compensation lorsqu'on compare le retard du secteur E_1OD à l'avance du secteur COE_2 . Dans le cas qui vient d'être envisagé, le retard est plus petit que l'avance. Il n'en sera plus de même pendant l'alternance suivante.

L'impulsion donnée au balancier est une force dont le moment P est variable ; en effet, d'après (253) :

$$P = \frac{Mr}{O_1B} \frac{\sin \alpha + \varphi \sin (\alpha + \beta) \sin \beta}{1 + \varphi \sin (\alpha + \beta) \cos (\alpha + \beta)} ;$$

or, les facteurs O_1B , α et β varient pendant l'impulsion ; on peut cependant admettre une valeur moyenne de P que l'on supposera constante.

L'examen des trois caractéristiques — durée, moment de l'action et intensité — des facteurs perturbateurs indique bien que l'échappement à cylindre augmente la période du balancier, c'est-à-dire qu'il provoque un retard de la montre.

Les perturbations de la période sont d'autant plus grandes qu'elles se produisent à un moment où la vitesse angulaire du balancier est plus petite. Lorsque l'amplitude du balancier diminue, sa vitesse angulaire, pour une elongation donnée, diminue aussi ; l'effet du facteur perturbateur augmente. Donc, *l'échappement à cylindre produit un défaut d'isochronisme.*

Les considérations qui précèdent sont fondées sur l'hypothèse d'un coefficient de frottement constant ; on sait que, même dans les conditions les meilleures, la valeur de ce coefficient varie ; cette variation peut être considérable dès que s'interposent entre la dent et le cylindre un peu de saleté, un grain de poussière, ou dès l'instant, qui arrive plus ou moins tôt suivant la qualité, la trempe et le poli des organes, où le cylindre porte des traces d'usure.

L'échappement duplex. — Inventé par Pierre Le Roy (1717-1785), cet échappement de la classe des échappements à contact permanent sans recul n'est plus employé de nos jours. Il n'a jamais été très répandu, bien qu'il ait des avantages sur l'échappement à cylindre. Sa construction est en effet délicate et il ne fonctionne bien que s'il est exécuté de façon impeccable.

Il se compose d'une roue à deux dentures situées dans des plans différents, d'un rouleau cylindrique muni d'une coche longitudinale et d'un plateau portant une palette en rubis ; ces deux derniers organes, rouleau et plateau, sont fixés sur l'arbre du balancier.

A l'origine, la roue d'échappement était constituée par deux roues plates solidaires et fixées sur l'arbre du pignon d'échappement. Cette construction a sans doute justifié le nom de *duplex* donné à cet échappement.

Fonctionnement de l'échappement duplex. — Soient, en coupe (fig. 288), *A* le rouleau fixé sur l'arbre du balancier, *B* la coche longitudinale ; la dent *E*, qu'on appelle la dent de repos, est appuyée contre le rouleau et presse dans le sens de la flèche 1. Le mouvement du rouleau a lieu suivant la flèche 2 ; il est un peu ralenti par le frottement de *E*. La roue est immobile jusqu'au moment où le bord *C* de la coche passe devant la pointe *F* de la dent *E*. Alors la dent a un espace vide devant elle et se met en mouvement dans le sens de la flèche 1 ; mais à peine a-t-elle commencé à se mouvoir qu'elle est heurtée par l'arête *D* de la coche qui lui fait reprendre sa position primitive, représentée sur la figure. Le balancier et son rouleau continuent à tourner dans le sens de la flèche 2, jusqu'à ce que le frottement de la dent et la tension du spiral annulent la vitesse angulaire du balancier. Le spiral oblige le balancier à rebrousser chemin et à tourner, dès ce moment, suivant la flèche 3. Jusqu'à présent le balancier a décrit une alternance ; il ne s'est à peu près rien passé dans le rouage de la montre à part une velléité de la dent *E* de s'échapper, mais l'échappement n'a pas eu lieu. Cette alternance est dite « muette ».

Dans la première partie du mouvement de retour (flèche 3), le rouleau et le balancier qui lui est solidaire sont quelque peu entravés dans leur

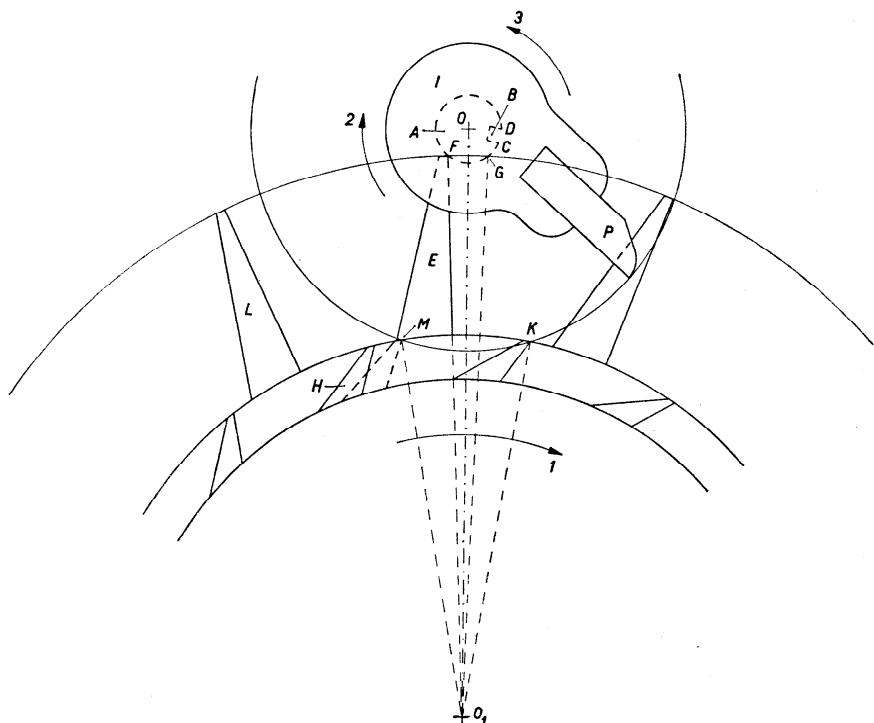


Fig. 288

mouvement par le frottement de la dent *E* contre le rouleau. Au moment où l'arête *D* de la rainure *B* passe devant *F*, la pointe de la dent s'engage dans la coche ; elle suit le mouvement du rouleau auquel elle donne une impulsion. Dès que la pointe *F* est arrivée en *G*, la dent quitte le rouleau : la roue d'échappement est libre et continue son mouvement avec une vitesse accélérée. Bientôt la dent d'impulsion *H* de la roue rattrape la palette *P* portée par le plateau *I* et lui donne une impulsion qui augmente la vitesse angulaire du balancier. L'impulsion prend fin au moment où la dent *H* abandonne la palette en *K*. A cet instant, la dent *L* se trouve près du rouleau ; après le parcours de l'angle de chute, *L* tombe sur le rouleau qui poursuit sa course (arc supplémentaire), jusqu'au moment où le frottement de la dent *L* et la tension croissante du spiral arrêteront le balancier. Celui-ci sera ramené par le spiral vers sa position d'équilibre suivant la flèche 2.

Au cours de la deuxième alternance, le balancier reçoit deux impulsions ; l'une de celles-ci est très petite, parce qu'elle se donne en un point

F très éloigné du centre O_1 de la roue d'échappement, et situé sur le rouleau dont le rayon est petit.

L'impulsion principale est donnée par une dent d'impulsion plus rapprochée de O_1 que F , sur la palette P dont le rayon est plus de 6 fois celui du rouleau.

Les deux impulsions, d'intensités inégales, se suivent de très près ; on peut considérer qu'elles n'en font qu'une.

Chaque dent d'impulsion donne une impulsion lors de chaque oscillation, puisqu'il y a une alternance muette ; l'aiguille des secondes saute à chaque oscillation et non à chaque alternance comme dans l'échappement à cylindre. Le saut de l'aiguille des secondes a lieu en deux fois, lors des deux impulsions. Pendant la première impulsion, la roue d'échappement décrit l'angle FO_1G ; pendant l'impulsion principale, la roue décrit l'angle MO_1K , or :

$$\sphericalangle MO_1K > \sphericalangle FO_1G ;$$

les deux sauts de l'aiguille n'ont pas la même valeur angulaire.

A chaque oscillation, la roue d'échappement décrit un angle égal au pas angulaire $\frac{2\pi}{z}$, si elle comporte z dents.

Les angles décrits par le balancier et par la roue. — Puisqu'il y a deux impulsions dans la même alternance, il y a aussi deux *angles de levée*, c'est-à-dire deux angles parcourus par le balancier pendant chacune des impulsions.

En somme, l'impulsion donnée par la dent de repos est accidentelle : elle accompagne le *dégagement* de la roue d'échappement. L'angle de levée correspondant à cette impulsion mineure est l'*angle de dégagement* ; il porte également le nom d'*angle de petite levée*, bien qu'il puisse atteindre 70 à 80° et qu'il soit plus grand que l'*angle de grande levée*, qui est l'angle parcouru par le balancier pendant l'impulsion principale. L'angle de grande levée est d'environ 35 à 40° .

La position et les rayons des dents ainsi que les rayons du rouleau et de la palette d'impulsion dépendent de ces angles.

La roue décrit deux *angles d'impulsion* correspondant aux deux angles de levée du balancier. L'angle d'impulsion correspondant à la grande levée est plus grand que celui décrit pendant la petite levée.

La roue décrit aussi deux *angles de chute* pendant l'alternance active. Comme dans l'échappement à cylindre, ces angles sont des sûretés nécessaires en raison de l'imperfection du taillage de la roue d'échappement, de l'inexactitude des dimensions des organes (roue, rouleau, plateau) ou

de celles du plantage, du jeu des pivots, et des variations des dimensions dues aux changements de température.

Comparaison avec l'échappement à cylindre. — L'échappement duplex ressemble à l'échappement à cylindre par la manière dont se fait le repos sur une pièce solidaire du balancier. Dans le premier de ces deux échappements, le repos a lieu constamment à la même distance de l'axe du balancier.

On réduit le frottement dans l'échappement duplex en faisant le rouleau en rubis et en diminuant son rayon autant que possible. En pratique, on ne peut pas réduire ce rayon au-delà d'une certaine valeur limite, du moins si l'on ne veut pas augmenter dangereusement les difficultés d'exécution et la fragilité du rouleau.

Si la pénétration de la dent de repos dans la coche du rouleau est faible et si les jeux nécessaires des pivots de la roue et du balancier sont normaux, un choc peut faire passer la dent de repos devant le rouleau.

Dans les deux échappements comparés ici, il y a deux impulsions par oscillation. Dans l'échappement à cylindre, il y a une impulsion, donc un dégagement de la roue, à chaque alternance ; tous les mobiles du rouage et les aiguilles se meuvent à chaque alternance. Dans l'échappement duplex, les deux impulsions ont lieu dans la même alternance qui est appelée active ; l'une et l'autre de ces impulsions provoquent un mouvement du rouage et des aiguilles, mais le premier mouvement est plus petit que le second ; l'aiguille des secondes, comme les autres aiguilles, fait un saut par oscillation, mais un saut composé de deux parties égales et très voisines l'une de l'autre.

Dans l'échappement duplex, l'amplitude du balancier peut atteindre 250 à 280°. Cette amplitude est supérieure à celle qui est permise au balancier d'une montre à cylindre ; elle est plus favorable au réglage de la montre. Mais l'amplitude ne doit pas dépasser 360°, sinon la coche revient devant la dent de repos appuyée contre le rouleau et dégage de nouveau la roue qui lui donne une impulsion supplémentaire. Ainsi, plusieurs dents peuvent passer sans que le balancier effectue les alternances muettes ; le mouvement de l'aiguille des secondes est désordonné. Ce défaut, le *galop*, est combattu par la création d'un obstacle à l'augmentation excessive de l'amplitude du balancier.

Si l'échappement duplex ne l'a pas emporté sur l'échappement à cylindre, c'est que le rouleau n'était pas facile à exécuter au moment où la lutte entre les deux échappements était vive ; aujourd'hui la fabrication du rouleau offrirait moins de difficultés, mais la concurrence entre ces deux dispositifs n'a plus aucun sens parce que l'échappement à ancre leur est bien supérieur.

Tracé de l'échappement duplex. — Il est superflu d'établir des formules mathématiques pour le calcul des dimensions des organes de l'échappement duplex. Le tracé graphique est suffisant pour ce dispositif démodé dont l'intérêt est surtout historique.

Supposons connue la valeur R du rayon de la circonférence passant par les pointes des dents de repos de la roue d'échappement. Le rayon du rouleau doit être choisi en fonction de l'angle de dégagement (petite levée) et de façon que la pénétration de la dent dans la coche soit assez grande pour que le dégagement se fasse avec sécurité.

Nous admettons que le diamètre du rouleau est égal à $\frac{2}{7}$ de la distance qui sépare deux pointes voisines des dents de repos ; si ϱ est le rayon du rouleau, nous aurons :

$$\varrho = \frac{2\pi R}{z} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2\pi R}{7z}$$

et, pour une roue de 15 dents :

$$\varrho = \frac{2\pi R}{105}.$$

Si l'angle de dégagement est égal à 70° , nous pourrions facilement construire le triangle OO_1A (fig. 289) dont nous connaissons deux côtés, R et ϱ , ainsi que l'angle $O_1OA = 35^\circ$.

La pénétration des dents de repos dans la circonférence du rouleau est :

$$R + \varrho - OO_1.$$

La dent de repos repose en B sur le rouleau ; nous pouvons dessiner les dents de repos au nombre de 15 ; la distance angulaire entre deux dents consécutives est 24° .

Chaque dent d'impulsion est à égale distance angulaire de deux dents de repos consécutives ; dessinons l'angle $BO_1C = 12^\circ$; le rayon O_1C passe par la pointe d'une dent d'impulsion. Le point C est déterminé par l'angle de grande levée du balancier que nous admettons de 35° . Le rayon OC fait avec OO_1 un angle de $17^\circ 30'$. Le point C marque la position de la dent à la fin de l'impulsion. La dent d'impulsion précédente est à 24° de C , soit en D .

Le rayon r de la palette est égal à OC ; il est plus de 6 fois plus grand que ϱ .

Au commencement de l'impulsion principale, la dent d'impulsion était en E à 35° de C . Pendant le dégagement, la dent D parcourt l'arc DE qui est égal à l'arc MN .

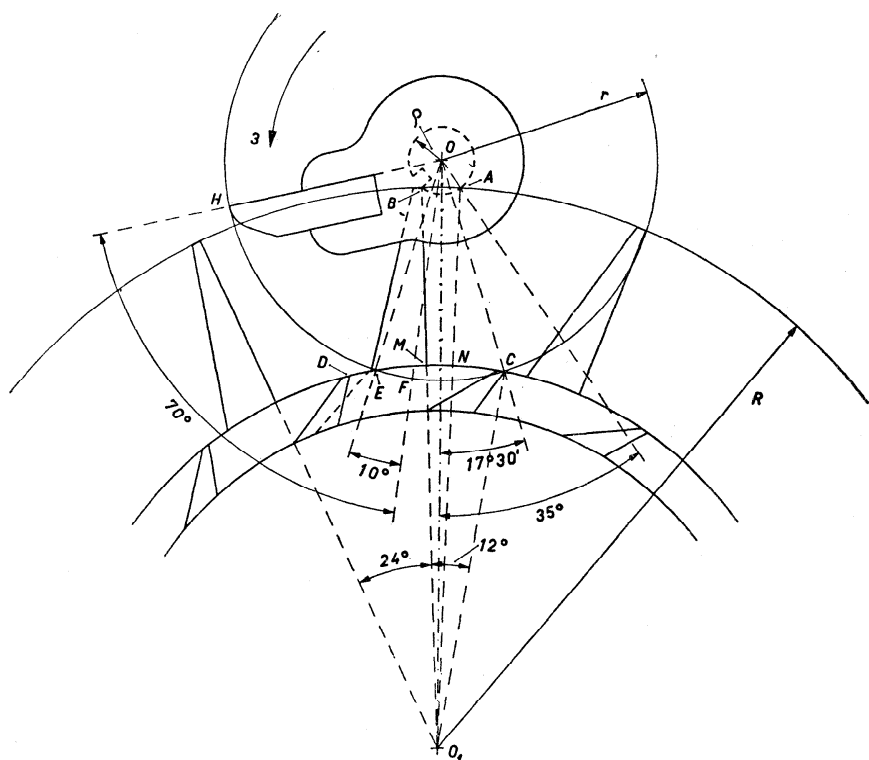


Fig. 289

Pour la sécurité du fonctionnement, la palette d'impulsion doit se trouver, à la fin du dégagement, à une certaine distance de E . Si la palette se trouve en F , tandis que la dent est en E , celle-ci ne sera pas frôlée par la palette. Supposons l'angle EOF égal à 10° . Pendant le dégagement, la palette a parcouru, comme le rouleau, un angle de 70° . Portons $FOH = 70^\circ$. OH est la position du plan de la palette au commencement du dégagement; cette position correspond à celle de la dent de repos B qui va s'engager dans la coche du rouleau. La coche doit être assez large pour que la pointe de la dent y trouve place et assez profonde pour que la pointe de la dent ne puisse jamais en toucher le fond même en tenant compte du jeu des pivots.

Pour terminer le dessin de la roue, du plateau et de la palette, nous laisserons guider par l'avantage qu'offrent des organes légers. Mais ni la légèreté des pièces ni la beauté des formes ne doivent faire oublier que les dents, le rouleau et la palette sont soumis à des chocs auxquels ils doivent résister.

Influence de l'échappement duplex sur la période du balancier. —

Pendant l'alternance muette, une seule force agit sur le balancier : le frottement de la dent de repos contre le rouleau. Ce frottement serait continu s'il n'y avait pas de coche au rouleau. Le passage de la coche devant la pointe de la dent de repos libère la roue pendant un instant très court car, à ce moment, le balancier a une grande vitesse angulaire. La dent pénètre un peu dans la coche, puis en est aussitôt rejetée ; pendant ce recul, la roue résiste fortement, mais cette résistance est de très courte durée ; son effet, une avance (résistance après le point mort), n'est pas grand, mais, ce qui est plus grave, il varie avec la vitesse du balancier, c'est-à-dire avec l'amplitude de l'oscillateur. Sans l'effet de ce recul, on pourrait dire que, pendant l'alternance muette, le frottement, supposé constant, de la dent de repos contre le rouleau n'altère pas la période, bien qu'il diminue l'amplitude du balancier.

Pendant l'alternance suivante, la dent de repos est appuyée contre le rouleau jusqu'au moment où la coche passe ; la pointe de la dent entre dans la coche ; durant un instant très court, le contact entre les deux mobiles est rompu, puis la dent rattrape la paroi de la coche et donne une impulsion au balancier ; cette impulsion a relativement peu d'effet sur la vitesse angulaire du balancier à cause de la grande valeur de R et de la petite valeur de ρ . Dès que la dent de repos a quitté le rouleau, la dent d'impulsion tombe sur la palette ; là aussi il y a d'abord rupture de contact entre les mobiles, puis l'impulsion principale se produit ; elle n'est pas répartie également de part et d'autre de la ligne des centres. Après l'impulsion, nouvelle chute, nouvelle rupture de contact entre roue et balancier, puis frottement de la dent de repos sur le rouleau jusqu'à la fin de l'alternance.

Schématiquement, on peut représenter les différentes phases de l'alternance active (en négligeant les chutes pendant lesquelles la période du balancier n'est pas modifiée), de la façon suivante (fig. 290) :

1^o début de l'alternance ; frottement de la dent de repos contre le rouleau : secteur E_1OB ;

2^o petite impulsion de la dent de repos contre la paroi de la coche du rouleau : secteur BOC ;

3^o impulsion principale de la dent d'impulsion sur la palette : secteur COD ;

4^o frottement de la dent de repos suivante contre le rouleau : secteur DOE_2 .

La position d'équilibre du balancier est représentée par OA . Les parties hachurées de la figure sont celles où se produit une augmentation de la période (retard) ; dans les autres parties, la période est diminuée.

La petite impulsion avant la position d'équilibre provoque une avance

dont la valeur, faible à cause de la petitesse du rayon ρ du rouleau, est renforcée par le grand angle de petite levée et par l'éloignement notable de la position d'équilibre du balancier.

En comparant les surfaces des parties claires et des parties hachurées de la figure 290, on pourrait déduire que pendant l'alternance active, l'échappement duplex diminue la période du balancier. Mais les surfaces ne tiennent pas compte de l'intensité des forces actives ou passives. Or, il y a de grandes différences entre l'intensité du frottement, celle de l'impulsion mineure et celle de l'impulsion principale. Il faut aussi considérer la vitesse du balancier au moment où la force perturbatrice agit. Pour connaître l'effet de l'échappement duplex sur la période du balancier, il serait indispensable d'étudier les différentes phases au moyen de l'analyse mathématique. Le phénomène est plus compliqué que dans l'échappement à cylindre qui n'a pas d'alternance muette ni d'impulsions d'intensité inégale.

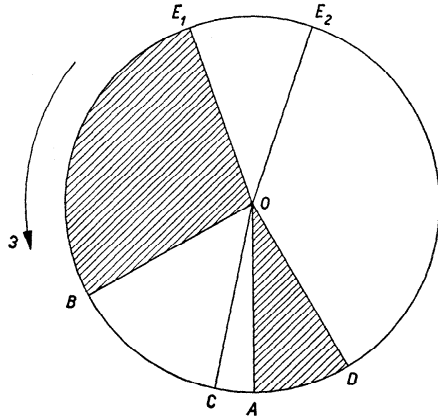


Fig. 290

Une variante de l'échappement duplex : l'échappement Jacot. — Certaines montres destinées à la Chine étaient munies d'un échappement spécial, « l'échappement Jacot », qui porte le nom de son inventeur. Ce dispositif est proche parent de l'échappement duplex.

Comme ce dernier, il a une roue avec deux dentures ; le balancier porte un rouleau avec une rainure longitudinale et une palette d'impulsion fixée dans un plateau. Mais les dents de repos ont une forme particulière : elles sont terminées par deux pointes qui travaillent successivement. Le balancier reçoit une impulsion principale toutes les 4 alternances. Si le nombre d'alternances par heure est de 14 000 (4 alternances par seconde), le balancier reçoit une impulsion par seconde. Il subit encore deux impulsions mineures données par les deux pointes de la dent de repos, mais ces impulsions sont faibles et n'occasionnent qu'un très léger déplacement angulaire de la roue d'échappement. Si l'aiguille des secondes fait un saut à chaque seconde, la montre a quelque analogie avec les montres « à seconde morte » que l'on fabriquait encore au milieu du XIX^e siècle.

Les figures 291, 292 et 293 font comprendre le fonctionnement de cet échappement. Examinons 4 alternances successives.

1^{re} alternance (fig. 291). — C'est une alternance muette au cours de laquelle se produit un léger soubresaut de la roue d'échappement, lorsque la coche du rouleau passe devant la première pointe *A* de la dent de repos.

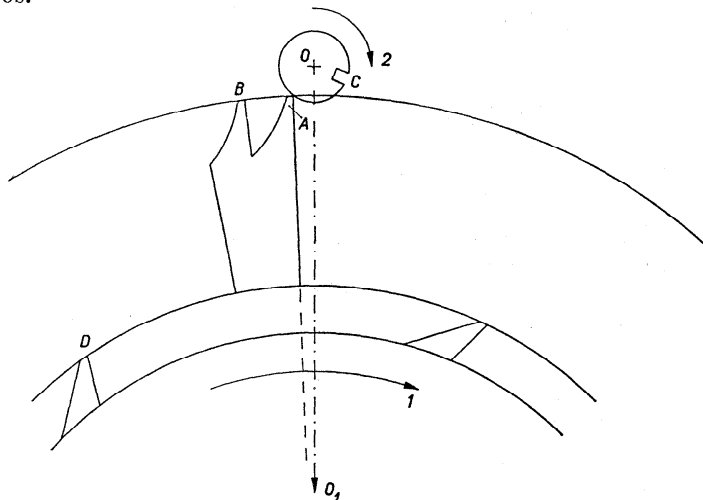


Fig. 291

2^e alternance (fig. 292). — Le balancier ramené par la force élastique du spiral revient vers la position d'équilibre (flèche 3); la pointe *A* s'engage dans la coche *C*, lorsque celle-ci passe devant elle; *A* donne une impulsion au balancier jusqu'au moment représenté par la figure 292, où la pointe *A* quitte la coche. Dès cet instant, le contact entre la roue et le rouleau est rompu; la roue est libérée et la pointe *B* de la dent de repos tombe sur le rouleau après avoir parcouru un petit angle de chute. Comme dans l'échappement duplex, l'impulsion donnée par la dent de repos est très faible; la roue tourne de l'angle BO_1A . Si, comme cela arrive fréquemment, la roue d'échappement a 6 dents d'impulsion et 6 dents de repos, son pas angulaire est de 60° , tandis que l'angle BO_1A n'est guère que $\frac{1}{10}$ du pas angulaire.

3^e alternance. — Cette alternance est de nouveau muette comme la première dont elle diffère par le fait que c'est la pointe *B* au lieu de la pointe *A* qui repose contre le rouleau. Pendant cette alternance, la roue est immobile sauf lorsque la coche *C* passe devant la pointe *B*; à ce

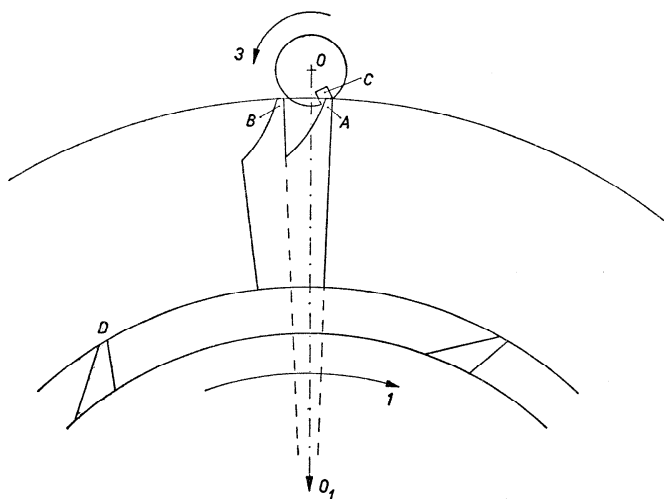


Fig. 292

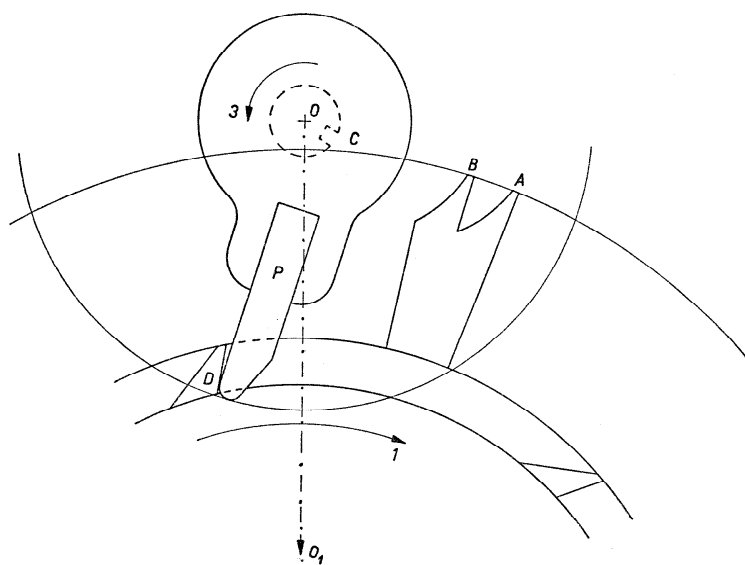


Fig. 293

moment, la pointe tente de pénétrer dans la coche, mais en est aussitôt rejetée ; la roue d'échappement a avancé puis reculé d'un angle à peine perceptible.

4^e alternance. — C'est l'alternance de l'impulsion principale. Comme dans l'échappement duplex normal, la dent de repos *B* donne une petite impulsion sur la paroi de la coche *C*, puis la dent d'impulsion *D* tombe sur la palette *P* pour donner le choc principal au balancier (fig. 293).

Inconvénients de l'échappement duplex à double dent de repos. — Le saut principal de l'aiguille des secondes a lieu pendant l'impulsion principale, donc une fois toutes les 4 alternances ou une fois par seconde si $A_h = 14\,400$.

Dans l'intervalle entre deux impulsions principales consécutives, l'amplitude du balancier diminue notablement ; plus encore que l'échappement duplex normal, l'échappement Jacot est affecté de « l'arrêt au doigt ».

On comprend aisément que le « galop » puisse se produire dans l'échappement duplex à double dent de repos.

Les difficultés du taillage de la roue d'échappement et de l'exécution du rouleau en rubis sont les mêmes que pour l'échappement duplex ordinaire.

Si l'échappement Jacot a eu quelque succès, il l'a dû au fait que les montres qui en étaient munies remplaçaient les montres à seconde morte, plus délicates et plus compliquées.

CHAPITRE XI

L'ÉCHAPPEMENT LIBRE A ANCRE DES MONTRES

Les échappements libres. — Un échappement est dit *libre* lorsqu'il est construit de telle sorte que le balancier parcourt l'arc supplémentaire en toute liberté, c'est-à-dire sans contact avec un organe de l'échappement ; on l'appelle aussi *échappement à contact périodique*.

Pendant que le balancier décrit l'arc supplémentaire, la roue est arrêtée ; dans les échappements à contact permanent une dent de la roue est appuyée sur une palette (échappement à roue de rencontre), contre le cylindre (échappement à cylindre) ou contre le rouleau (échappement duplex) ; toutes ces pièces d'arrêt sont solidaires du balancier.

Dans les échappements libres, le repos se fait sur une pièce indépendante du balancier ; cette pièce sert parfois d'organe de transmission de l'énergie, d'autres fois elle n'a pas d'autre fonction que d'arrêter la roue au bon moment. Comme dans les échappements à repos, le balancier est chargé de dégager la roue qui, libérée, donne au balancier, directement ou indirectement, l'impulsion nécessaire à l'entretien de son mouvement. Le balancier décrit aussi les angles de dégagement, d'impulsion et l'angle supplémentaire qu'il est superflu de définir.

L'échappement à ancre. — L'échappement le plus souvent utilisé dans les montres actuelles est l'échappement à ancre inventé par Thomas Mudge au XVIII^e siècle. Il donne de très bons résultats ; ses organes sont, aujourd'hui, faciles à construire ; il n'est pas délicat en ce sens qu'il fonctionne même avec des défauts assez graves.

Il se compose de trois organes : la *roue d'échappement*, l'*ancree avec la fourchette* et la *cheville de plateau*, encastrée dans le *plateau*. Ces organes sont montés sur des arbres terminés par des pivots aussi fins que possible afin de diminuer l'énergie absorbée par le frottement, mais assez gros pour résister aux efforts auxquels ils sont soumis. La roue d'échappement est rivée ou chassée sur l'arbre du pignon d'échappement ; l'ancree est

vissée ou chassée sur la *tige d'ancre*, tandis que le plateau est chassé sur l'*arbre*¹ du *balancier*.

La roue d'échappement. — La roue d'échappement appelée aussi roue d'ancre transmet l'énergie à l'ancre ; la transmission se fait au moyen de plans inclinés appelés *plans d'impulsion*. Si la dent de la roue et l'ancre ont chacune un plan d'impulsion, l'échappement est à *surface d'impulsion partagée* ; c'est l'*échappement à ancre suisse* (fig. 294).

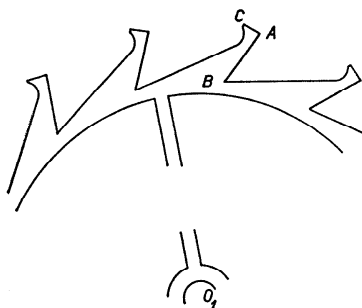


Fig. 294

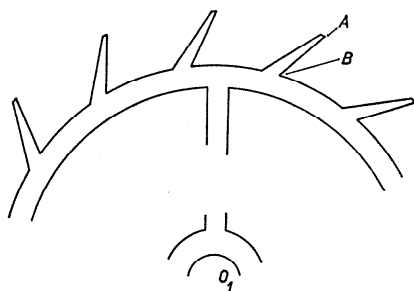


Fig. 295

Les dents de la roue peuvent être pointues ; elles n'ont pas de surface d'impulsion, et l'échappement s'appelle alors *échappement à dents pointues* ou *échappement à ancre anglais* (fig. 295). Enfin lorsque la surface d'impulsion appartient uniquement à la dent de la roue, on a affaire à l'*échappement à chevilles* (fig. 296).

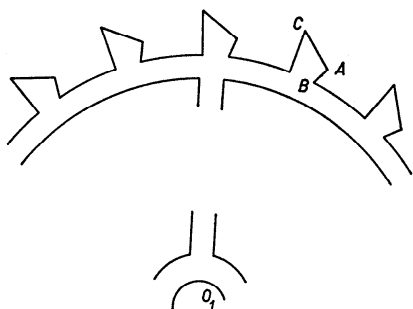


Fig. 296

Quelle que soit la forme des dents, elles ont toujours un plan de repos projeté en AB. Sauf dans l'échappement à dents pointues, elles ont un plan d'impulsion AC.

Le premier de ces échappements est le plus répandu ; la roue du second a des dents délicates ; en raison de sa simplicité, le troisième est utilisé dans les montres Roskopf, dans les réveils et dans certains appareils où la grande précision n'est pas recherchée.

¹ L'arbre du balancier est appelé « axe du balancier » par les horlogers ; nous réservons cette expression à l'axe géométrique autour duquel se fait la rotation.

Les roues de l'échappement à ancre suisse sont généralement en acier trempé et revenu, parfois en bronze ou en bronze de glucinium dans les montres amagnétiques. On trouve aussi des roues en laiton durci dans les échappements à ancre anglais et dans les échappements à chevilles.

Le nombre des dents varie de 12 à 18 ; dans les montres, il est généralement de 15, sauf dans les montres Roskopf où l'on a souvent des roues de 18 dents.

L'ancre et la fourchette. — La pièce, généralement en acier, qui reçoit l'énergie de la roue pour la transmettre au balancier est appelée *ancre* à

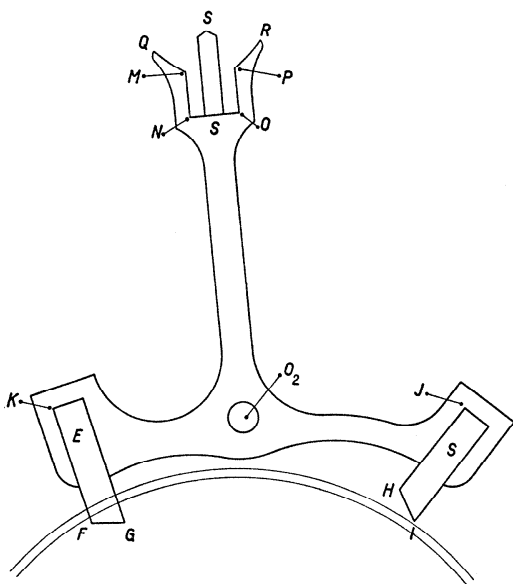


Fig. 297

cause de sa forme. Ses deux bras portent des palettes en rubis ou en saphir, parfois en grenat dans les pièces moins soignées. L'ancre a aussi un levier, la *fourchette*, terminé en forme de fourche.

Dans les constructions anciennes, la fourchette était vissée sur l'ancre ; parfois un contrepoids ramenait le centre de gravité de l'ancre et de la fourchette sur l'axe de la tige d'ancre. Ces dispositifs ont disparu ; la construction de l'ancre et de la fourchette en une seule pièce est plus simple et plus solide ; d'autre part le contrepoids est superflu, comme nous le verrons plus tard.

La palette *E* (fig. 297) est la *palette d'entrée*; la palette *S* s'appelle *palette de sortie*. Les *plans d'impulsion* des palettes sont *FG* et *HI*; les *plans de repos* sont *FK* et *HJ*.

La fourchette a une *entrée MNOP*; elle est terminée par les *cornes MQ* et *PR* et porte un organe de sécurité, le *dard SS*, dont la fonction sera expliquée plus bas.

L'axe de la fourchette est souvent dans une direction à peu près perpendiculaire à une droite qui relierait les extrémités *G* et *I* des palettes; dans ce cas, les centres de pivotement de la roue, de l'ancre et du balancier sont sur une droite : l'échappement est *en ligne droite*. Si l'axe de la fourchette est à peu près parallèle à *GI*, l'échappement est dit *à ancre de côté*; les trois points de pivotement forment un triangle.

Le plateau et la cheville. — La cheville de plateau, généralement en rubis, est fixée dans un disque, le plateau, chassé sur l'arbre du balancier; l'axe de la cheville est perpendiculaire au plan du disque et parallèle à l'axe du balancier. Elle reçoit, de la fourchette, les impulsions d'entretien du mouvement du balancier.



Fig. 298

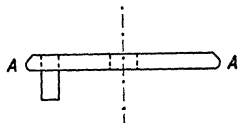


Fig. 300

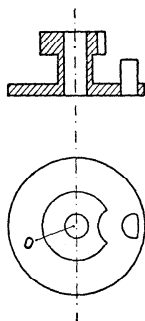


Fig. 299

La section transversale de la cheville a différentes formes : elliptique, triangulaire, demi-circulaire (fig. 298). La forme elliptique, aujourd'hui délaissée, fut si fort en vogue que la cheville fut appelée *ellipse*, nom qu'elle a gardé même après la disparition de la forme elliptique.

Le plateau a une fonction principale : servir de soutien à la cheville et relier celle-ci de façon rigide à l'arbre du balancier. Il a en outre une fonction de sécurité : empêcher que, par suite d'un choc, les organes de l'échappement prennent des positions dans lesquelles ils ne pourraient plus fonctionner normalement.

Cette fonction de sécurité est souvent assumée par un second disque, le *petit plateau*, relié au grand plateau avec lequel il ne forme qu'une

pièce (fig. 299). Parfois les deux plateaux sont deux pièces distinctes chassées sur l'arbre du balancier indépendamment l'une de l'autre. Cette construction, pour laquelle il fallait parler « des plateaux », a à peu près disparu. Ces deux dispositifs sont utilisés dans les *échappements à ancre à double plateau*.

Il existe un système à *simple plateau* dans lequel un seul plateau porte la cheville et protège, par son bord biseauté *A* (fig. 300), l'échappement contre les effets de certains chocs.

Fonctionnement de l'échappement à ancre. — Dans l'échappement à ancre, quatre organes : la roue, l'ancre, la fourchette et la cheville de plateau, transmettent l'énergie de la roue au balancier. Deux actions ont lieu simultanément : celle de la roue sur l'ancre et celle de la fourchette sur la cheville ; elles sont dépendantes l'une de l'autre, puisque l'ancre et la fourchette ne sont en somme qu'une seule pièce.

A un moment donné, pendant que le balancier parcourt l'arc supplémentaire, la dent 1 de la roue d'échappement est appuyée contre le plan de repos de la palette d'entrée *E* (fig. 301). La roue est arrêtée et avec elle tous les organes de l'échappement sauf la cheville de plateau qui participe au mouvement du balancier. La roue peut être arrêtée soit par la palette *E*, soit par la palette *S* ; la fourchette et l'ancre sont arrêtées par une des butées G_1 ou G_2 .

Supposons que le balancier se meuve suivant la flèche 1 ; à un certain moment la cheville *R* rencontrera la paroi *PO* de l'entrée de la fourchette et obligera celle-ci à tourner autour du centre O_2 dans le sens de la flèche 2. L'ancre, solidaire de la fourchette, est entraînée dans le même sens ; la palette *E* se lève et bientôt la dent 1 n'a plus aucun obstacle devant elle ; libre, elle exécute un mouvement dans le sens de la flèche 3 à cause de la force motrice provenant du barillet, qui agit constamment sur la roue d'échappement. La roue n'est libre qu'un court instant, car elle rencontre bientôt le plan d'impulsion *FG* de la palette d'entrée, elle-même en mouvement. La dent 1 pousse l'ancre et la fourchette suivant la flèche 2 ; ce mouvement est fortement accéléré, de sorte que bientôt la fourchette acquiert une vitesse supérieure à celle de la cheville ; la paroi *OP* de l'entrée de la fourchette abandonne alors la cheville ; un instant plus tard, la paroi *MN* rattrape la cheville et la pousse devant elle. Les rôles sont renversés : pendant le dégagement la cheville a conduit la fourchette, et maintenant la fourchette conduit la cheville ; l'impulsion commence et donne au balancier une accélération supplémentaire qui annulera l'amortissement dû aux résistances. Le balancier exécute des oscillations ayant toujours la même amplitude si l'amortissement et l'énergie restituée restent constantes.

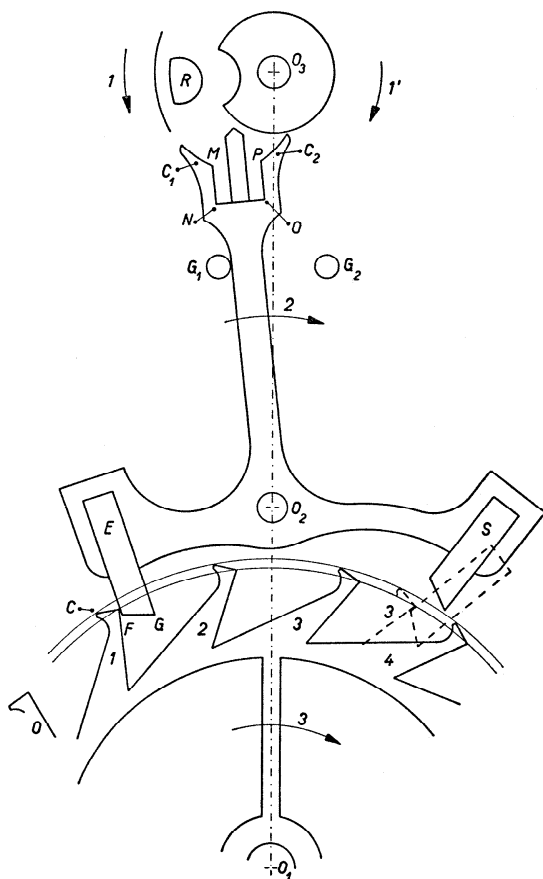


Fig. 301

L'impulsion dure jusqu'au moment où la dent 1 abandonne le plan d'impulsion FG de la palette E ; à cet instant, le talon C de la dent coïncide avec le point G du plan d'impulsion de la palette. La roue est de nouveau libre, mais son mouvement est arrêté lorsque la dent 3 tombe sur la face de repos de la palette de sortie S (position dessinée en pointillé). En même temps la fourchette est très près de la butée G_2 qu'elle atteindra après avoir parcouru un petit angle. La fourchette, l'ancre et la roue sont dès lors immobilisées. La cheville quitte la paroi MN de l'entrée de la fourchette et continue, avec le balancier, son mouvement suivant la flèche 1. Dès l'instant où la cheville abandonne la fourchette, le balancier est tout à fait libre; il décrit l'arc supplémentaire, jusqu'au moment où la tension croissante du spiral l'arrête et l'oblige à rebrousser

chemin. Dès lors l'angle supplémentaire est décrit dans le sens de la flèche 1' et les fonctions suivantes sont exécutées comme dans l'alternance précédente :

1° entraînement de la fourchette et de l'ancre par la cheville et, en même temps, dégagement de la dent 3 de la roue d'ancre ;

2° impulsion de l'ancre par la dent 3, d'où accélération du mouvement de l'ancre ; la fourchette au lieu d'être menée devient menante et augmente la vitesse du balancier ;

3° l'impulsion terminée, la dent 0 tombe sur la face de repos de la palette E ; la fourchette est arrêtée par la butée G_1 , tandis que la cheville et le balancier continuent leur mouvement suivant la flèche 1'.

Protection de l'échappement contre certains chocs. — Lorsque la cheville de plateau se trouve dans la position représentée en R , dans la figure 301, un choc dirigé suivant la flèche 2 peut, s'il est assez fort, faire passer la fourchette de la butée G_1 à la butée G_2 . Pendant ce mouvement, la dent 1 sera dégagée ; la roue se mettra en mouvement jusqu'à ce que la dent 3 rencontre le plan de repos de la palette de sortie. Si la cheville se meut suivant la flèche 1', le balancier achèvera sa course sans encombre, mais au retour, la cheville se déplaçant suivant la flèche 1 rencontrera le dos de la fourchette, et la montre s'arrêtera. Cet accident s'appelle le *renversement*. Pour l'éviter, on munit la fourchette d'une tige SS , le *dard*, qui travaille avec le *petit plateau* ou *plateau de sûreté* P' (fig. 302). Lorsque la fourchette est appuyée contre l'une ou l'autre des butées G_1 et G_2 , le dard ne doit pas toucher le petit plateau ; l'angle SO_2S' dont le dard doit tourner jusqu'à sa rencontre avec le bord du plateau de sûreté s'appelle l'*ébat de dard* ou l'*ébat de plateau*. Le dard n'entrave pas le mouvement du balancier jusqu'au moment où une secousse projette la fourchette vers G_2 ; la fourchette décrit l'*ébat de dard*, puis est arrêtée par le petit plateau que rencontre le dard.

Pour que, lors de l'impulsion (fig. 302, rotation du

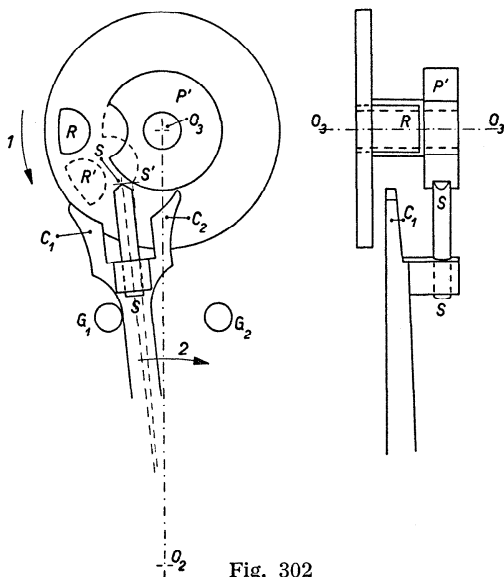


Fig. 302

balancier suivant la flèche 1), la fourchette puisse passer de G_1 à G_2 , le petit plateau porte une encoche qui se trouve en face du dard pendant le dégagement et pendant l'impulsion. L'encoche est de forme demi-circulaire; elle est assez profonde et assez large pour qu'au moment du passage normal du dard, celui-ci ne touche pas le plateau.

Dans le système à simple plateau, la baguette de la fourchette F (fig. 303) est taillée en biseau, tandis que l'entrée et les cornes sont dans

un plan inférieur. L'extrémité S du biseau rencontre le bord du plateau lorsque la fourchette est lancée vers la butée G_2 . Au moment du dégagement, le passage de la fourchette s'effectue grâce à une encoche A pratiquée dans le plateau.

Immédiatement avant le commencement du dégagement, le dard est déjà devant l'encoche. Si, à ce moment, une secousse lançait la fourchette de G_1 vers G_2 , rien n'arrêterait ce mouvement si la fourchette n'était pas munie des cornes C_1 et C_2 . A cet instant dangereux, la cheville a une position telle que R' ; la corne C_1 vient buter contre elle après avoir décrit un petit angle appelé *ébat de cornes*.

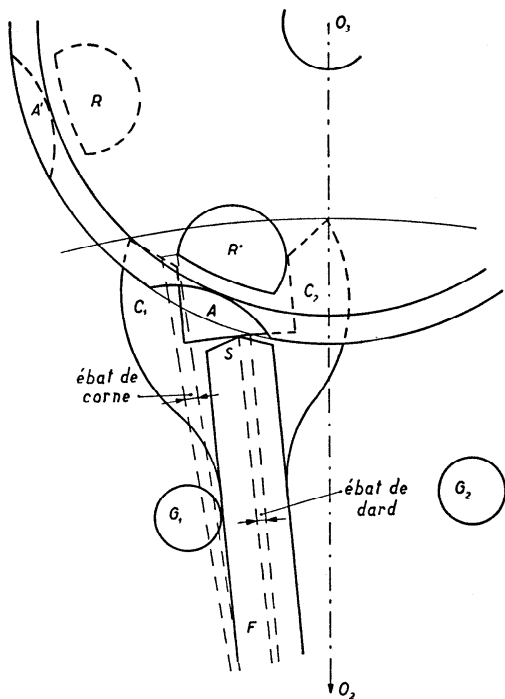


Fig. 303

Les différentes fonctions : dégagement, impulsion, passage du dard dans l'encoche du plateau, sécurité donnée par le dard et par les cornes, ne doivent pas se gêner mutuellement; pour cela, il faut que la position relative des organes, dans le sens de la hauteur également, soit judicieusement choisie. La vue de côté donnée par la figure 302 montre une disposition des organes fréquemment utilisée.

Rappel de la fourchette contre les butées. — Si un choc détache la fourchette d'une des butées, un contact peut se produire entre la pointe du dard et le bord du petit plateau ou entre une corne et la cheville. Ce

contact ne doit être que momentané, sinon il troublerait trop la période du balancier. Il faut que la fourchette soit ramenée vers la butée; on y parvient en donnant au plan de repos des palettes une inclinaison telle que la pression de la dent oblige la fourchette à revenir vers la butée; cette action est appelée le *tirage*.

Soit (fig. 304) la dent 1 de la roue d'ancre au repos en A sur la face FK de la palette d'entrée E. O_1 et O_2 sont les centres de rotation de la roue et de l'ancre; O_2A est perpendiculaire à O_1A . La pression de la dent est dirigée perpendiculairement au plan FK; si ce plan est dans le prolongement du rayon O_1A , la pression passe par O_2 ; son moment par rapport à O_2 est nul; elle ne provoque aucune rotation de l'ancre, mais presse les pivots de la tige d'ancre contre les parois des coussinets. Si le plan de repos est en F_1K_1 la pression normale N a pour moment par rapport à O_2 :

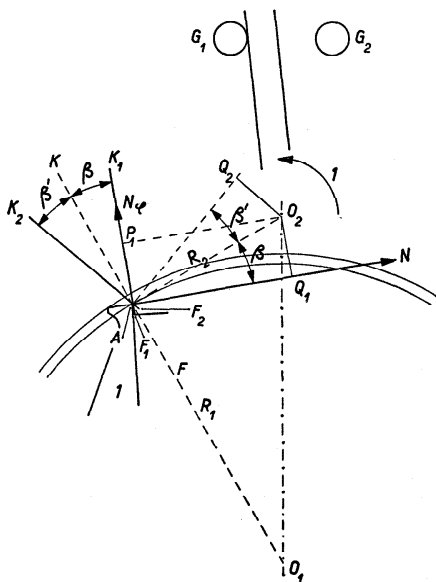


Fig. 304

$$- N \cdot \overline{O_2Q_1} = - NR_2 \sin \beta ,$$

où R_2 désigne la distance O_2A et β l'angle K_1AK appelé *angle de tirage*.

La pression N , dont le moment par rapport à O_2 est négatif, tend à faire tourner l'ancre dans le sens de la flèche 1 (fig. 304) et presse la fourchette contre la butée G_1 .

Si le plan de repos était en F_2K_2 , le moment de N par rapport à O_2 serait positif et aurait pour valeur :

$$N \cdot \overline{O_2Q_2} = NR_2 \sin \beta' .$$

La fourchette appuyée contre G_1 serait sollicitée de quitter cette butée.

Dans le cas du plan de repos suivant F_1K_1 , la pression N appuie la fourchette contre G_1 . Une autre force, le frottement, s'oppose au mouvement de la fourchette; elle a pour valeur $N\varphi$, si φ désigne le coefficient de frottement.

Par rapport au centre de l'ancre, le moment du frottement est positif ; sa valeur est :

$$N\varphi \cdot \overline{O_2P_1} = N\varphi R_2 \cos \beta .$$

L'équation d'équilibre de l'ancre est :

$$-NR_2 \sin \beta + N\varphi R_2 \cos \beta = 0 ,$$

d'où l'on tire :

$$\operatorname{tg} \beta = \varphi . \quad (255)$$

Le coefficient φ est égal à la tangente de l'angle de frottement α (voir le chapitre VI, t. I, p. 244) ; l'ancre est donc en équilibre si $\beta = \alpha$.

Mais ici on ne désire pas l'équilibre ; on veut que le moment de N soit supérieur et de signe contraire à celui du frottement $N\varphi$: pour cela, il faut que $\beta > \alpha$. Si :

$$0,15 < \varphi < 0,20 ,$$

l'angle α est compris entre $8^\circ 30'$ et $11^\circ 20'$. En choisissant $\beta \cong 15^\circ$, on aura le résultat désiré : la fourchette sera attirée vers la butée G_1 . On verra plus tard que l'angle de tirage varie au cours du dégagement.

Lorsque la roue d'ancre est arrêtée par la palette de sortie, la somme des moments de N et de $N\varphi$ doit être positive pour que la fourchette soit sollicitée vers la butée G_2 .

Les angles parcourus par le balancier. — Envisageons la course du balancier à partir du point extrême E_1 (fig. 305) ; il parcourt d'abord l'arc *supplémentaire* E_1B à la fin duquel la cheville rencontre une des parois de l'entrée de la fourchette. Le choc se traduit par un entraînement de la fourchette et une diminution de la vitesse angulaire de la cheville. C'est le début du *dégagement* qui dure jusqu'au moment où la pointe de la dent 1 (fig. 301) atteint l'arête F de la palette d'entrée E . Soit BO_3C l'angle de dégagement.

A cause de l'inclinaison de la face de repos de la palette (tirage), la roue a été obligée de reculer pendant que la pointe de la dent 1

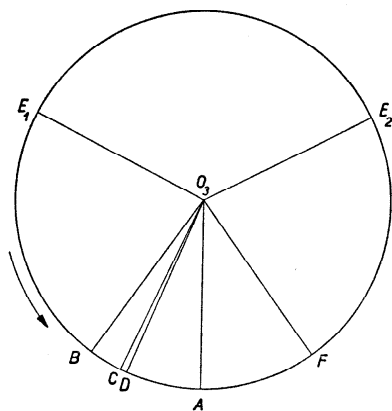


Fig. 305

passait du point de repos au bord F de la palette. Pendant ce recul, la roue a acquis une certaine vitesse angulaire négative ; dès que le contact entre la dent et la palette est rompu, la dent continue son mouvement de recul jusqu'au moment où son énergie cinétique est détruite par l'énergie motrice qui tend à donner à la roue une vitesse angulaire positive. Pendant ce temps, l'ancre continue son mouvement dû au choc de la cheville. Dès que la roue reprend son mouvement en avant, sa vitesse augmente rapidement ; la dent rattrape alors le plan d'impulsion de la palette et donne à l'ancre une vitesse croissante, de sorte que la paroi PO (fig. 301) de la fourchette fuit devant la cheville ; un instant après, c'est l'autre paroi MN qui rattrape la cheville et la pousse devant elle. Le contact entre la cheville et la fourchette a été rompu durant un instant très court, pendant lequel le balancier parcourt librement le petit angle CO_3D . Après quoi, la cheville reçoit une impulsion de la fourchette, de sorte que, pendant le parcours de l'angle d'impulsion DO_3F , la vitesse angulaire du balancier augmente. Au cours de l'impulsion, le balancier passe par la position d'équilibre O_3A . La somme des angles BO_3C , CO_3D et DO_3F est l'angle de levée du balancier. Comme CO_3D est très petit, nous dirons que l'angle de dégagement est BO_3D et l'angle d'impulsion DO_3F .

Après l'impulsion, le balancier décrit encore l'angle supplémentaire FO_3E_2 . En E_2 , le balancier s'arrête ; l'alternance est terminée. Le balancier exécute un mouvement de sens inverse et décrit, à nouveau et dans le même ordre, les angles supplémentaires, de dégagement et d'impulsion.

Dans l'échappement à ancre, l'amplitude mesurée à partir de la position d'équilibre O_3A est d'environ 270° ou $1,5\pi$ rad : c'est l'un des angles AOE_1 ou AOE_2 . Le parcours total du balancier pendant une alternance s'appelle le *cheminement* ; il vaut environ 540° ou 3π rad.

L'angle de levée du balancier est de 35 à 40° ; ainsi l'angle que le balancier parcourt en toute liberté est de 500 à 505° .

La figure 305 est purement schématique.

Les angles parcourus par l'ancre. — La fourchette est entraînée par la cheville de plateau, si bien que l'ancre décrit d'abord un *angle de dégagement* qui n'est pas égal à celui du balancier. Appelons ϱ_2 la distance du centre de l'ancre au point de contact C (fig. 306) de la fourchette avec la cheville et ϱ_3 la distance du centre du balancier au même point de contact C . Comme l'angle de dégagement est petit, nous pouvons admettre que le point C reste à la même distance des centres O_2 et O_3 ; en réalité il n'en est pas ainsi, mais l'erreur résultant de cette hypothèse est négligeable. Pendant le dégagement, le chemin parcouru par la cheville est $\varrho_3\alpha$, celui de la fourchette est $\varrho_2\beta$, si α et β désignent les angles de dégagement du balancier et de l'ancre. Ces chemins sont égaux, d'où :

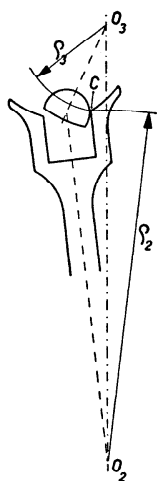


Fig. 306

$$\rho_3 \alpha = \rho_2 \beta, \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\rho_2}{\rho_3}. \quad (256)$$

Le début de l'impulsion sur la cheville de plateau ne coïncide pas avec le début de l'impulsion sur l'ancre ; en effet, dès le début de l'impulsion de la roue sur la palette de l'ancre, le mouvement de l'ancre est accéléré ; la paroi *PO* (fig. 301) quitte la cheville, et l'ancre doit parcourir un certain angle avant que débute l'impulsion donnée à la cheville par la paroi *MN* de l'entrée de fourchette.

Pendant l'impulsion de la dent de la roue sur une des palettes, l'ancre décrit l'*angle d'impulsion*.

La somme des angles de dégagement et d'impulsion est l'*angle de levée* de l'ancre.

Après l'impulsion, la roue abandonne la palette, mais l'ancre doit encore parcourir l'*angle de sûreté* ou *chemin perdu* avant d'atteindre la butée qui marque la fin de son mouvement.

Les angles parcourus par la roue d'échappement. — Pendant que le balancier décrit les angles supplémentaires avant le dégagement ou après l'impulsion, la roue est immobile ; une de ses dents est appuyée contre la face de repos d'une des palettes.

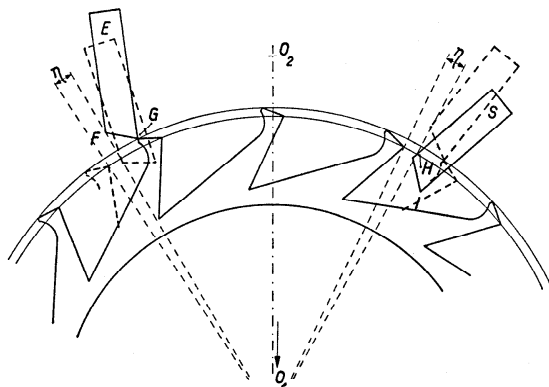


Fig. 307

Dès que la fourchette est entraînée par la cheville, la palette, en se levant, fait reculer la roue d'ancre à cause de l'inclinaison du plan de repos qui doit assurer le tirage. Au moment où la face de repos de la

palette quitte la roue, celle-ci a une certaine vitesse; l'inertie oblige la roue à continuer son mouvement rétrograde jusqu'à ce que la force motrice agissant sur la roue d'échappement à travers le rouage annihile ce mouvement.

La roue effectue donc deux reculs : un *recul géométrique* provoqué par l'inclinaison de la face de repos de la palette et un *recul dynamique* dû à l'inertie. *L'angle de recul* est la somme de ces deux angles.

Après le recul, la roue reprend son mouvement dans le sens normal jusqu'à ce qu'une dent rencontre le plan d'impulsion d'une palette: la roue décrit un certain angle qui est une chute sur le plan d'impulsion. Cet angle est plus grand que l'angle de recul, puisque, pendant le recul dû à l'inertie et le retour de la roue, l'ancre a tourné et que le plan d'impulsion s'est éloigné du centre de la roue. Appelons *angle de chute sur l'impulsion* l'angle décrit par la roue après la fin de son mouvement de recul.

Dès que le contact entre la dent et la palette est rétabli, la roue pousse l'ancre et parcourt l'*angle d'impulsion*, jusqu'au moment où la dent de la roue abandonne le plan d'impulsion de la palette.

La roue décrit alors un petit angle, l'*angle de chute*, jusqu'à ce qu'une de ses dents vienne buter contre la face de repos de l'autre palette. Nous parlerons de *chute extérieure* quand il s'agira de la chute d'une dent sur le plan de repos de la palette d'entrée, de *chute intérieure* lorsqu'il s'agira de chute sur la palette de sortie (fig. 307).

Relations entre quelques angles. — A la fin de l'impulsion sur la palette d'entrée, par exemple, la dent qui se trouve près de la palette de sortie tombe sur le plan de repos de cette palette en R (fig. 308). Supposons qu'à cet instant la fourchette n'a pas encore atteint la butée G_2 qu'elle touchera après avoir

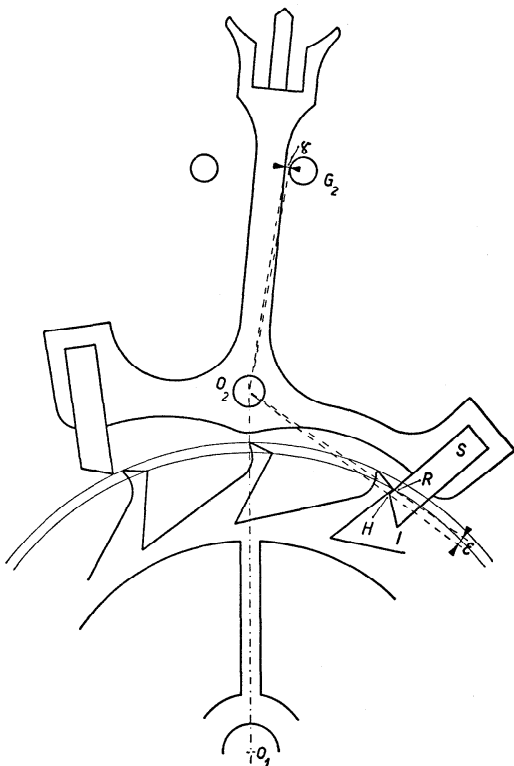


Fig. 308

parcouru l'angle γ (chemin perdu). Si H désigne l'arête formée par la face de repos et le plan d'impulsion de la palette S , l'angle $HO_2R = \varepsilon$ est l'angle d'engagement virtuel de l'ancre. Mais, dès que la fourchette a atteint G_2 , cet angle d'engagement est augmenté de l'angle de chemin perdu γ et devient l'angle d'engagement réel ou angle de repos.

L'angle de repos est aussi l'angle de dégagement de l'ancre.

L'angle de recul géométrique de la roue d'échappement dépend de l'angle de tirage. Dans la figure 309, nous avons dessiné la face de repos FK de la palette d'entrée et l'angle de repos $FO_2A = \varepsilon$ (dans la figure, cet angle est fortement exagéré). Appelons α l'angle O_2O_1A dont la valeur dépend du nombre z de dents de la roue et de l'emprise de l'ancre; cet angle est facile à calculer; il vaut :

$$\alpha = \frac{360}{2 \cdot 15} 2,5 = 30^\circ$$

pour $z = 15$ et une ancre embrassant $2\frac{1}{2}$ pas de la roue,

$$\alpha = \frac{360}{2 \cdot 18} 3,5 = 35^\circ$$

pour $z = 18$ et une ancre embrassant $3\frac{1}{2}$ pas de la roue.

Entre les rayons $R_1 = O_1A$ et $R_2 = O_2A$, nous avons la relation :

$$\frac{R_2}{R_1} = \operatorname{tg} \alpha. \quad (257)$$

Quand la palette se lève, le point F décrit l'arc FB de centre O_2 . L'angle de recul δ vaut :

$$\delta = \frac{AB}{R_1},$$

mais :

$$AB = O_2F - O_2A = O_2F - R_2.$$

Or, dans le triangle AO_2F , nous avons :

$$\frac{O_2F}{R_2} = \frac{\sin(90^\circ + \beta)}{\sin(180^\circ - 90^\circ - \beta - \varepsilon)} = \frac{\cos \beta}{\cos(\beta + \varepsilon)}$$

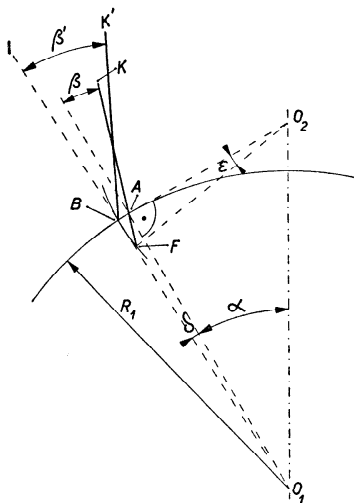


Fig. 309

ou

$$O_2F = R_2 \frac{\cos \beta}{\cos(\beta + \varepsilon)} = R_2 \frac{1}{\cos \varepsilon - \sin \varepsilon \operatorname{tg} \beta}$$

et

$$AB = R_2 \left(\frac{1}{\cos \varepsilon - \sin \varepsilon \operatorname{tg} \beta} - 1 \right) = R_2 \frac{1 - \cos \varepsilon + \sin \varepsilon \operatorname{tg} \beta}{\cos \varepsilon - \sin \varepsilon \operatorname{tg} \beta}.$$

Donc :

$$\delta = \frac{R_2}{R_1} \frac{1 - \cos \varepsilon + \sin \varepsilon \operatorname{tg} \beta}{\cos \varepsilon - \sin \varepsilon \operatorname{tg} \beta}$$

ou

$$\delta = \operatorname{tg} \alpha \frac{1 - \cos \varepsilon + \sin \varepsilon \operatorname{tg} \beta}{\cos \varepsilon - \sin \varepsilon \operatorname{tg} \beta}. \quad (258)$$

Comme l'angle ε est petit — il est généralement $\leq 2^\circ$ — nous pouvons poser $\cos \varepsilon = 1$ et $\sin \varepsilon = \varepsilon$. La formule (258) devient ainsi :

$$\delta = \operatorname{tg} \alpha \frac{\varepsilon \operatorname{tg} \beta}{1 - \varepsilon \operatorname{tg} \beta}.$$

L'angle de tirage est d'environ 15° ; si $\varepsilon = 2^\circ$, nous avons :

$$\varepsilon \operatorname{tg} \beta = 0,0094,$$

ce qui est négligeable par rapport à l'unité. La formule simplifiée pour δ devient :

$$\delta = \varepsilon \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta. \quad (259)$$

Calculons cet angle pour $\varepsilon = 1^\circ 30'$, $\beta = 15^\circ$, $\alpha = 30^\circ$. Nous trouvons :

$$\delta = 13' 55''.$$

L'angle de tirage varie pendant le dégagement. A la fin du dégagement sur la palette d'entrée, il vaut (fig. 309) :

$$\beta' = \sphericalangle IBK'$$

Mais :

$$\sphericalangle IBK' = 90^\circ - \sphericalangle K'BO_2.$$

Or :

$$\sphericalangle K'BO_2 = \sphericalangle AFO_2 = 180^\circ - 90^\circ - \beta - \varepsilon = 90^\circ - (\beta + \varepsilon).$$

Donc :

$$\beta' = \beta + \varepsilon. \quad (260)$$

A la fin du dégagement, l'angle de tirage sur la palette d'entrée est augmenté de l'angle de repos.

Sur la palette de sortie, l'angle de tirage au point de repos R (fig. 310) est l'angle VRI . A la fin du dégagement, l'angle de tirage devient β' :

$$\beta' = \sphericalangle V'WI' = 90^\circ - \sphericalangle I'WX = 90^\circ - \sphericalangle IHY.$$

Mais :

$$\sphericalangle IHY = 180^\circ - \sphericalangle IHO_2 = 180^\circ - (180^\circ - \varepsilon - 90^\circ + \beta) = 90^\circ - (\beta - \varepsilon),$$

d'où :

$$\beta' = \beta - \varepsilon. \quad (261)$$

A la fin du dégagement, l'angle de tirage sur la palette de sortie est diminué de l'angle de repos.

On comprend pourquoi l'on donne souvent plus de tirage à la palette de sortie qu'à la palette d'entrée.

Un choc peut détacher la fourchette de la butée contre laquelle elle est appuyée, mais le dard ou l'une des cornes empêche le renversement de la fourchette.

Si l'ébat de dard ou de corne est plus grand que le chemin perdu et l'angle d'engagement virtuel, c'est-à-dire plus grand que l'angle de repos, une des dents de la roue peut passer sur le plan d'impulsion d'une palette ; la fourchette ne pourra plus revenir vers la butée, et le dard (ou une corne) sera fortement pressé contre le pourtour du plateau (ou contre la cheville).

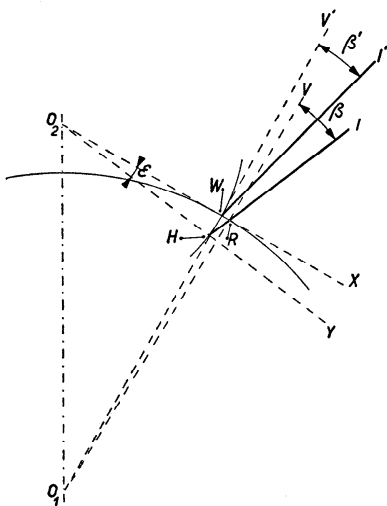


Fig. 310

Répercussion de la modification de certains angles. — Dans l'échappement à ancre, deux actions sont simultanées : celle de la roue sur l'ancre et celle de la fourchette sur la cheville de plateau ; l'ancre solidaire de la fourchette participe à ces deux actions ; un mouvement de l'ancre peut se répercuter sur la roue et sur la cheville.

Ainsi le chemin perdu influence l'angle de repos de l'ancre et, par là, l'angle de recul (géométrique et dynamique) de la roue. Ecartons une des butées et augmentons le chemin perdu correspondant ; s'il s'agit de la goupille G_1 , le repos sur la palette d'entrée est augmenté et, avec lui, le recul de la roue ; l'angle de tirage à la fin du dégagement est plus grand. En même temps nous avons augmenté l'angle d'impulsion du balancier

au cours d'une alternance et l'angle de dégagement au cours de l'alternance suivante; l'ébat de dard et l'ébat de cornes sont plus grands.

Si la goupille G_2 a été écartée, les mêmes effets se produiront sauf pour l'angle de tirage; à la fin du dégagement, celui-ci sera plus petit.

Supposons que l'on sorte la palette d'entrée pour la faire pénétrer davantage dans le cercle de la roue. Nous augmentons ainsi les angles de repos, le tirage à la fin du dégagement, l'angle de recul de la roue; les angles de dégagement et de levée de l'ancre et du balancier sont plus grands; le chemin perdu sur la butée G_2 est diminué. Si nous déplaçons G_2 pour égaliser les chemins perdus, nous augmentons le repos sur la palette de sortie, le recul, l'angle de dégagement, mais diminuons le tirage à la fin du dégagement. Donc, en accroissant le repos sur l'une des palettes, nous l'augmentons sur l'autre, si les chemins perdus conservent leur valeur.

Ces exemples montrent qu'il faut être prudent en faisant une retouche dans un échappement à ancre et qu'il importe de se rendre compte des répercussions de cette retouche sur toutes les fonctions.

Les chutes. — Les angles de chute (ou simplement les chutes) sont parcourus « à vide » par un organe qui, pendant un petit instant, a perdu le contact avec la pièce avec laquelle il travaille. Les chutes sont nécessaires en raison des imperfections des organes, des erreurs de dimensions ou de positions, des jeux des pivots, des dilatations causées par l'élévation de la température. Pendant les chutes, il n'y a aucune transmission d'énergie, mais dépense d'énergie pour mouvoir le corps qui tombe. Il convient donc de réduire le plus possible les angles de chute, qui diminuent le rendement de l'échappement. Les chutes se terminent généralement par un choc dont l'intensité dépend, en partie, de la grandeur de l'angle de chute.

Dans l'échappement à ancre, les chutes sont nombreuses; elles se suivent dans l'ordre suivant :

1^o chute d'une dent de la roue d'échappement contre le plan d'impulsion d'une des palettes ;

2^o chute de la paroi MN de l'entrée de la fourchette (fig. 301) contre la cheville de plateau, à partir du moment où la paroi PO abandonne la cheville ;

3^o chute de la dent 3 (fig. 301) contre la face de repos de la palette de sortie à partir du moment où la dent 1 quitte le plan d'impulsion de la palette d'entrée ;

4^o chute de la fourchette contre la butée G_2 .

Les chutes 3^o et 4^o peuvent être simultanées ; il peut arriver que la fin de la chute 4^o précède celle de la chute 3^o.

Pendant la chute, un des organes au moins a un mouvement accéléré ; à la fin de la chute, il a une certaine énergie cinétique dont une partie est utilisée dans les chutes 1^o et 2^o qui précèdent une opération de transmission de force ; cette énergie cinétique est perdue dans les chutes 3^o et 4^o où le corps mobile rencontre soit une pièce fixe (butée), soit une pièce qui ne peut céder dans la direction du choc (palette). Un des mobiles peut, après la chute, être rejeté en arrière.

Les chocs. — Les chutes dont nous venons de parler se terminent par des chocs qui naissent des rencontres d'organes ayant des vitesses différentes. Nous avons rappelé, dans le chapitre IX (pp. 151 et suiv.), les lois de la percussion qui permettent de calculer les vitesses après le choc.

Dans un choc, la transmission de l'énergie ne se fait pas sans une perte qui dépend du coefficient d'élasticité ε des deux corps ; elle est accompagnée d'un échauffement et d'une déformation des corps percutés. L'échauffement n'est pas assez important dans le cas qui nous occupe pour que nous en tenions compte ; par contre, la déformation est souvent accompagnée d'une détérioration des surfaces, donc d'une augmentation notable du frottement et de la perte d'énergie qui en résulte. La déformation peut rendre un organe inapte à accomplir sa fonction ou ne lui permettre de l'accomplir que dans des conditions défavorables.

Le choc est accompagné d'une perte d'énergie qu'il faut éviter ou réduire le plus possible.

Nous avons mentionné quatre chutes se terminant par des chocs ; un cinquième choc, celui de la cheville de plateau contre la paroi *PO* (fig. 301) de l'entrée de fourchette, se produit au début du dégagement.

Les nombreux chocs (il y en a 2 160 000 en 24 heures) provoquent une forte usure des organes de l'échappement, si ceux-ci ne sont pas faits avec des matières très dures : acier trempé pour la roue et la fourchette, rubis ou saphir pour les palettes et la cheville de plateau.

Rapport des dimensions de la roue et de l'ancre. — Rappelons les trois genres d'échappement à ancre : échappement à dents pointues, à plans d'impulsion partagés et à chevilles.

Après avoir choisi le genre d'échappement, nous pouvons admettre certaines relations entre la roue et l'ancre. Le nombre des dents de la roue a été déterminé en même temps que les nombres des dents des roues et des pignons d'après le nombre A_h d'alternances que doit faire l'organe oscillant en une heure. L'ancre peut embrasser un nombre plus ou moins grand de pas de la roue (ou de dents comme on dit généralement) ; en pratique on construit des ancres embrassant $2\frac{1}{2}$ pas de la roue de

15 dents ou $3\frac{1}{2}$ pas de la roue de 18 dents ; dans certains échappements d'horloge, les roues d'échappement ont souvent beaucoup plus de dents et l'emprise de l'ancre est nettement supérieure à $3\frac{1}{2}$ pas.

Le nombre de pas embrassés par l'ancre est compté entre deux points homologues des palettes, par exemple entre les points de repos ou entre les milieux des plans d'impulsion. Autant que possible, l'ancre est disposée de façon que ses bras soient à peu près symétriques par rapport à la ligne qui relie les centres de la roue et de l'ancre.

Prenons un exemple pour fixer les idées. Soient une roue à dents pointues de 15 dents dont nous connaissons le rayon R_1 et une ancre embrassant $2\frac{1}{2}$ pas de la roue, c'est-à-dire un angle de :

$$\frac{360^\circ}{15} \cdot 2,5 = 60^\circ.$$

L'angle $AO_1A' = 60^\circ$ (fig. 311) est divisé en deux parties égales par la ligne des centres O_1O_2 .

Le centre O_2 de l'ancre se trouve généralement au point d'intersection des tangentes au cercle de la roue en A et A' .

Posons :

$$O_1O_2 = a, \quad O_2A = O_2A' = R_2, \quad \sphericalangle AO_1A' = 2\alpha.$$

Nous avons :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R_2}{R_1}$$

ou

$$R_2 = R_1 \operatorname{tg} \alpha, \quad (262)$$

$$R_1 = \frac{R_2}{\operatorname{tg} \alpha} = R_2 \cotg \alpha,$$

soit :

$$a = \frac{R_1}{\cos \alpha} = R_1 \sec \alpha. \quad (263)$$

Dans notre cas :

$$a = \frac{R_1}{\cos 30^\circ} = 1,1547 R_1.$$

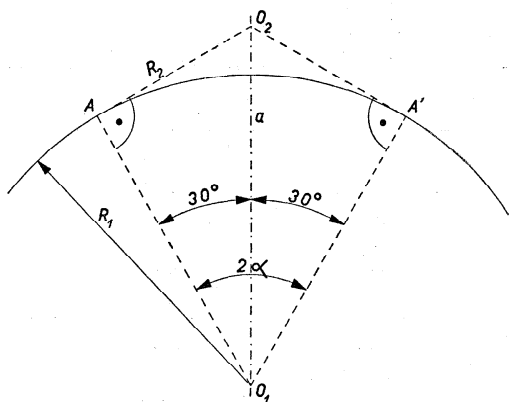


Fig. 311

Si nous décidons que A et A' sont les points de repos des palettes de l'ancre, nous aurons un *échappement à repos équidistants*. Les bras de l'ancre seront inégaux puisque la palette d'entrée est à l'intérieur de l'angle AOA' , tandis que la palette de sortie est à l'extérieur du même angle.

Pour avoir une ancre plus symétrique, nous pouvons admettre que A et A' sont les milieux des plans d'impulsion des palettes. L'ancre est alors dite à *bras de levier égaux*, à *leviers équidistants* ou à *palettes équidistantes*.

Chaque système a ses avantages et ses inconvénients; les praticiens utilisent souvent un *tracé mixte* dans lequel les points A et A' sont à une certaine distance angulaire (1° à 2°) des points de repos.

Tracé des palettes pour l'échappement à dents pointues et à repos équidistants. — Partons du tracé de la figure 311. A et A' sont les points de repos, c'est-à-dire les points où tombe une dent de la roue d'échappement après une impulsion.

Déterminons la répartition des valeurs angulaires en admettant une roue de 15 dents, une ouverture de l'ancre de $2\frac{1}{2}$ pas et un angle de levée total de l'ancre de $10^\circ 30'$. Nous avons :

angle parcouru par la roue	{	épaisseur angulaire de la dent	30'
$\frac{1}{2} p = 12^\circ$		épaisseur angulaire de la palette	$9^\circ 30'$
		chute	2°
angle de levée de l'ancre	{	angle de repos (engagement total)	2°
$10^\circ 30'$		angle d'impulsion	$8^\circ 30'$

Construisons (fig. 312) à droite des rayons O_1A et O_1A' les angles AO_1B et $A'O_1B'$ de $9^\circ 30'$; à gauche de O_1A l'angle AO_1C de $30'$, donnant l'épaisseur de la dent. Les points C, A, B, A', B' se trouvent sur la trajectoire de la pointe des dents de la roue.

Par les points A et A', B et B' , traçons avec O_2 comme centre les trajectoires des points de repos et des talons des deux palettes.

Une dent attaque le plan d'impulsion de la palette d'entrée E en A et le conduit jusqu'en B , tout en le repoussant d'un angle d'impulsion égal à $8^\circ 30'$.

Pour déterminer le plan d'impulsion de la palette d'entrée, nous construirons l'angle d'impulsion BO_2D égal à $8^\circ 30'$. AD est le plan d'impulsion cherché. Prolongeons AD et, avec O_2 comme centre, traçons l'arc H tangent à cette ligne.

La palette de sortie S doit produire, comme la palette d'entrée, un mouvement angulaire de l'ancre de $8^\circ 30'$; traçons donc l'angle $B'O_2D'$ égal à $8^\circ 30'$. $D'A'$ est le plan d'impulsion cherché. Prolongeons $D'A'$ et, avec O_2 comme centre, traçons l'arc H' tangent à cette ligne.

Pour terminer la palette d'entrée E dont le plan d'impulsion AD est connu, prolongeons le rayon O_1A perpendiculaire à O_2A et construisons à droite du prolongement, avec A comme sommet, l'angle de tirage de 15° .

Par D menons une parallèle à la face de repos de la palette, c'est le revers. La longueur de la palette est AF ; elle est égale à environ deux fois et demi la largeur de la palette.

Le profil de la palette de sortie S est déterminé comme suit : prolongeons O_1A' et construisons à droite de ce prolongement, avec A' comme sommet, l'angle de tirage de 13° . Le revers de la palette passe par D' et est parallèle à la face de repos $A'F'$. La longueur $A'F'$ est égale à AF .

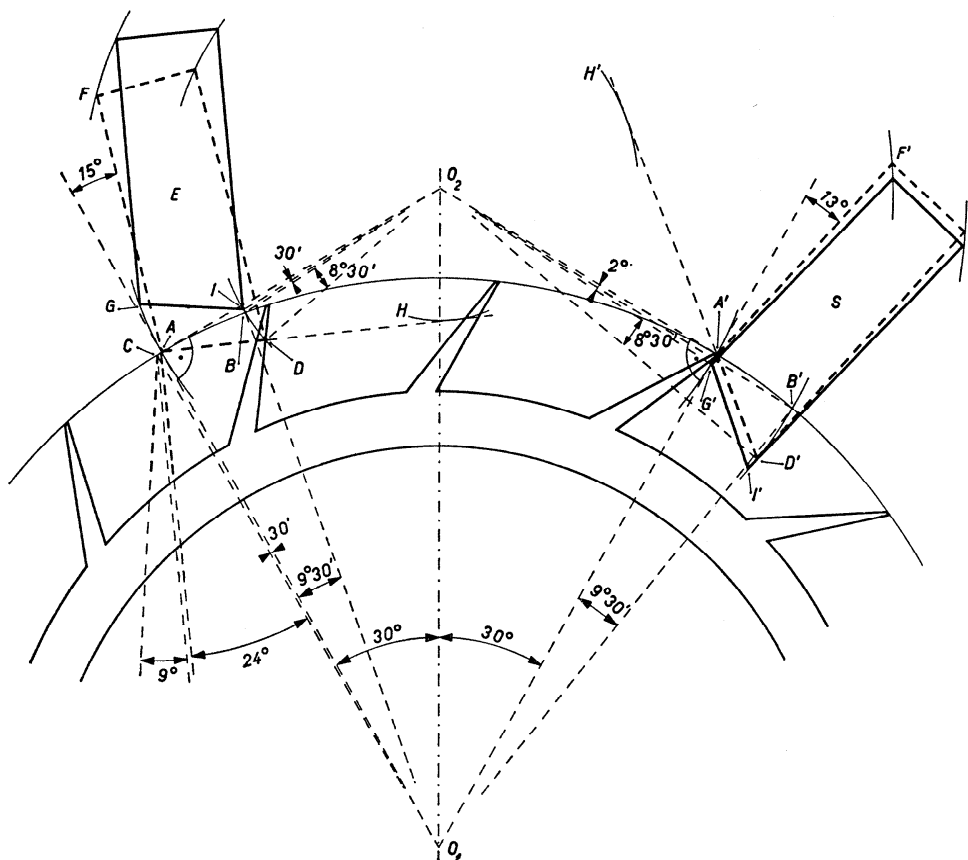


Fig. 312

Le fait de choisir 15° et 13° donne un tirage moyen de 14° sur chaque palette. A l'entrée, le tirage diminue, lorsque la palette vient au repos, de la valeur de l'angle d'engagement; à la sortie, par contre, le tirage augmente de cette valeur, lorsque le repos a lieu.

Traçons à présent les palettes dans leur position définitive, soit la sortie au repos et l'entrée dans la position correspondante.

Dessignons à cet effet l'angle d'engagement total ou de repos $A'O_2G'$ égal à 2° et menons par G' une droite tangente à l'arc H' ; $G'I'$ est le plan d'impulsion de la palette dans la position demandée. La palette de sortie ayant subi une rotation autour de O_2 , l'achèvement du tracé de son profil n'offre aucune difficulté.

La palette de sortie étant au repos, le talon de la palette d'entrée se trouve au delà de la trajectoire de la pointe des dents de la roue, de la valeur du chemin perdu, soit de BO_2I qui est égal à $30'$.

Traçons la tangente à l'arc H passant par I ; IG est le plan d'impulsion cherché. Le reste du profil peut être terminé sans difficulté, le centre de rotation de la palette étant O_2 .

Dessignons la dent dont la pointe se trouve en A . La face est inclinée de 24° par rapport au rayon passant par A ; par le talon C , menons une parallèle à la face et construisons le revers qui, avec la parallèle, forme un angle de 7° à 9° . La serge limite la longueur des dents; nous l'obtiendrons en traçant deux circonférences de centre O_1 dont les rayons valent 0,7 et 0,8 fois le rayon de la roue.

Traçons maintenant la roue dont une des dents est appuyée contre la face de repos de la palette de sortie.

Chaque dent est séparée de sa voisine de la valeur du pas, soit de 24° .

Les palettes de l'échappement à dents pointues: palettes équidistantes et tracé mixte. — Pour déterminer les plans d'impulsion et de repos des palettes dans les échappements qui ne sont pas à repos équidistants, il faut savoir quels points des plans d'impulsion doivent être à la même distance du centre de l'ancre et occuper les positions A et A' de la figure 311. Dans le tracé dit à *bras de levier égaux* ou à *palettes équidistantes*, les points A et A' sont au milieu des plans d'impulsion dont les extrémités seront à $\frac{9^\circ 30'}{2} = 4^\circ 45'$ de part et d'autre de A et de A' . On déter-

minera ainsi les points de repos B et B' (fig. 313) sur la circonférence (O_1, O_1A). La construction des plans de repos et d'impulsion des palettes et celle des dents de la roue d'ancre se font comme dans le tracé à repos équidistants.

Dans le *tracé mixte*, on admet que A et A' sont par exemple à 2° du point de repos. On porte à droite de O_1A et de O_1A' un angle de $7^\circ 30'$, à gauche un angle de 2° . Ce dernier angle détermine les points de repos B et B' de la figure 313. Dès que ces points sont déterminés, la construction n'offre aucune difficulté nouvelle.

Dessin des palettes et des dents de la roue d'échappement à surfaces d'impulsion partagées et à repos équidistants. — Nous partirons des données suivantes :

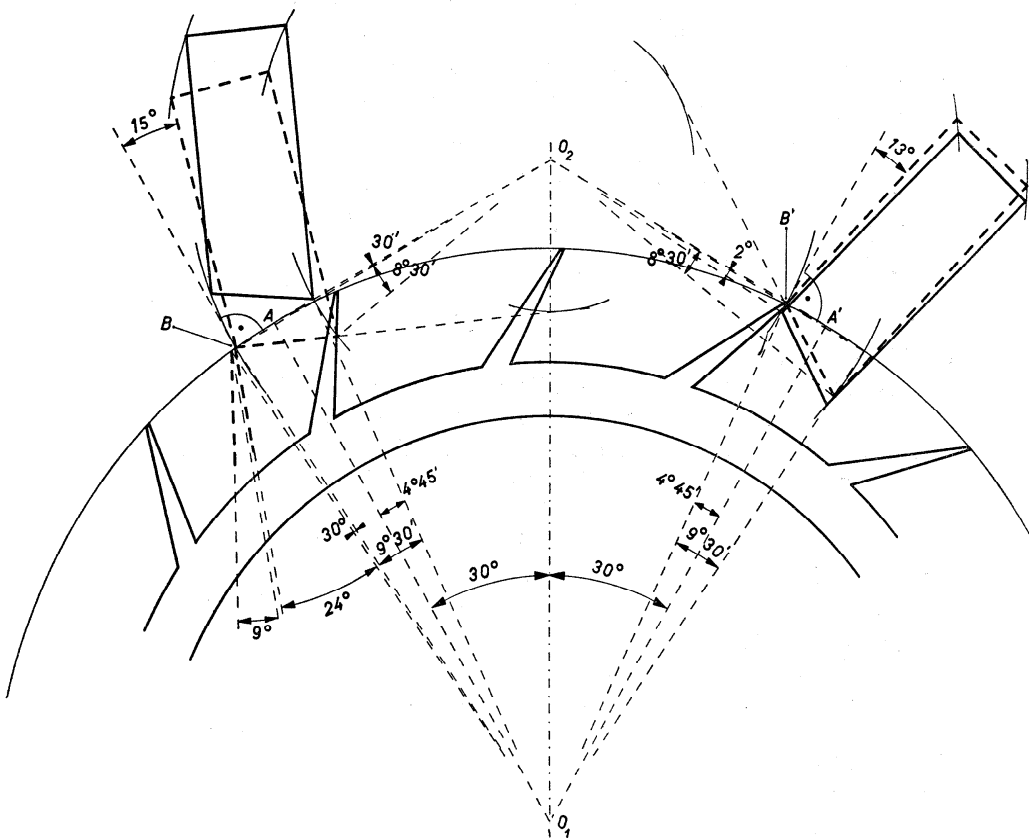


Fig. 313

1. le rayon de la trajectoire des pointes des dents de la roue ou la distance des centres ;

2. la roue de 15 dents ; d'où 24° pour l'angle compris entre deux dents consécutives, et 12° pour le mouvement angulaire de la roue à chaque alternance. Nous distribuons ces 12° comme suit :

largeur d'une dent	$= 4^\circ$	} 12° ;
largeur d'une palette	$= 7^\circ$	
chute	$= 1^\circ$	

3. le mouvement angulaire total de l'ancre (angle de levée) de 11° est partagé de la façon suivante :

$$\left. \begin{array}{ll} \text{angle de repos} & = 2^\circ \\ \text{angle de chemin perdu} & = 0^\circ 30' \\ \text{angle d'impulsion} & = 8^\circ 30' \end{array} \right\} 11^\circ.$$

L'impulsion sera partagée de manière à éviter la coïncidence des plans ; nous prendrons, à cet effet, à l'entrée, 3° pour l'impulsion résultant d'une dent et $5^\circ 30'$ pour celle de la palette ;

4. l'ancre embrasse $2\frac{1}{2}$ pas de la roue, soit un angle de 60° ;

5. les repos sont équidistants ;

6. à l'entrée, 14° de tirage et, à la sortie, 12° , produits par l'inclinaison de la face de repos sur la perpendiculaire élevée à l'extrémité de la ligne qui joint le centre de l'ancre au point d'intersection des plans de repos et d'impulsion.

La construction pourra être faite de la façon suivante.

Sur un plan perpendiculaire aux axes de rotation de l'ancre et de la roue, traçons une droite de longueur indéfinie et d'un point O_1 , centre de la roue, pris sur cette droite, portons O_1O_2 égale à la distance des centres amplifiée (fig. 314).

A partir de O_1 et de chaque côté de O_1O_2 , tirons des droites formant avec O_1O_2 des angles de 30° chacun.

Du point O_2 , centre de l'ancre, abaissons les perpendiculaires O_2A et O_2A' sur ces droites ; la circonférence (O_1 , O_1A) est la trajectoire des pointes des dents de la roue. Du centre O_2 , traçons les trajectoires des points A et A' des palettes (trajectoire des becs de repos).

A gauche du rayon O_1A , construisons l'angle AO_1D de 4° ; à droite de O_1A et de O_1A' , les angles AO_1K et $A'O_1K'$ de 7° chacun (D , K , K' sont sur la trajectoire des pointes des dents de la roue).

Construisons l'angle KO_2F de 3° , que le plan d'impulsion d'une dent fera parcourir à l'ancre (F est sur le prolongement du rayon O_1K), et, du point O_2 , avec O_2F comme rayon, traçons l'arc FG compris dans l'angle FO_2G de $8^\circ 30'$ (angle total d'impulsion).

Traçons la trajectoire des talons des dents de la roue (O_1 , O_1F).

Joignons A et G par une droite et abaissons sur elle la perpendiculaire O_2I . Du centre O_2 , avec O_2I comme rayon, traçons un arc de cercle. AG est le profil du plan d'impulsion de la palette d'entrée. Joignons A au point d'intersection L du prolongement du rayon O_1D avec la trajectoire des talons des dents de la roue. AL est le profil du plan d'impulsion d'une dent.

Du point A , traçons une droite inclinée de 24° sur AO_1 .

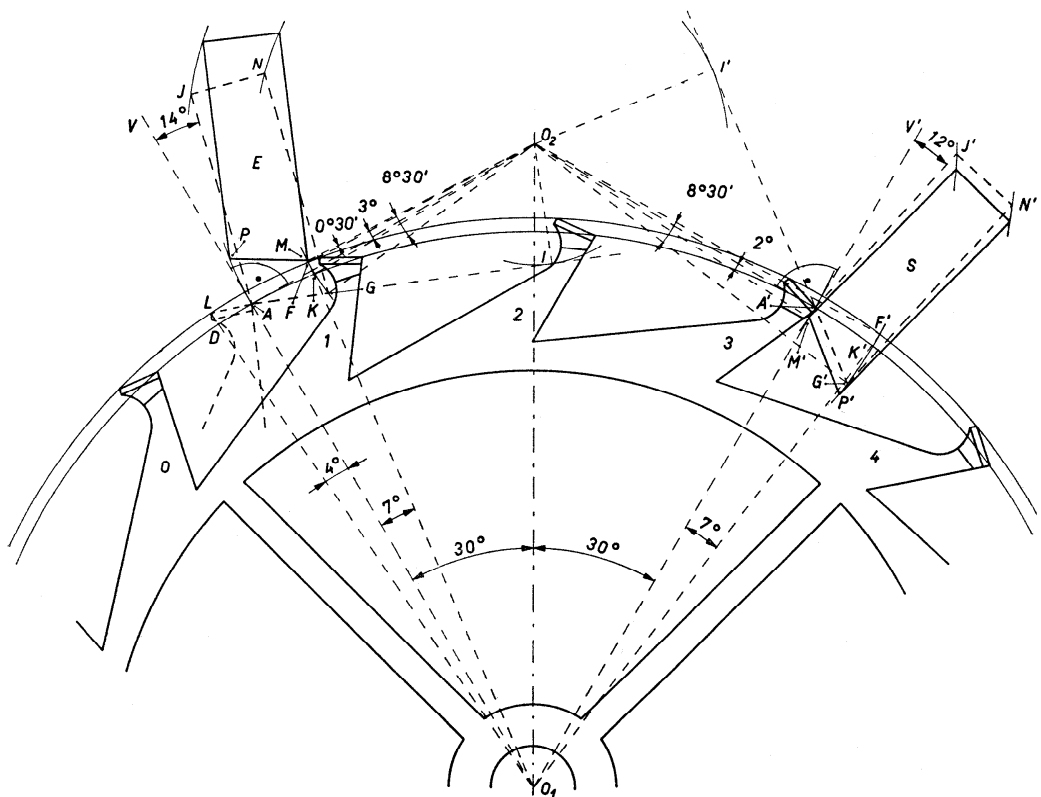


Fig. 314

Pour déterminer le profil du plan d'impulsion de la palette de sortie, de manière à obtenir, comme à l'entrée, un angle total d'impulsion de $8^{\circ}30'$, prolongeons le rayon O_1K' jusqu'à sa rencontre en F' avec la trajectoire des talons des dents de la roue. Traçons un arc de cercle (O_2, O_2F'), trajectoire de l'extrémité extérieure du profil d'impulsion de la palette de sortie.

Construisons à l'intérieur de la roue un angle $F'O_2G'$ de $8^{\circ}30'$ (G' est sur la trajectoire du point F'). Joignons G' à A' par une droite prolongée de manière à pouvoir abaisser sur elle la perpendiculaire O_2I' . Décrivons un arc de cercle (O_2, O_2I'). $A'G'$ est le profil du plan d'impulsion de la palette de sortie.

La ligne AJ qui fait avec le prolongement du rayon O_1A , à droite de celui-ci, un angle de 14° est le profil du plan de repos de la palette d'entrée.

Du point G , menons une parallèle à AJ , et du point J , une perpendiculaire JN à ces deux lignes.

De O_2 comme centre, traçons les trajectoires des points J et N .

A la sortie, traçons $A'J'$ formant avec le prolongement du rayon O_1A' , à droite de celui-ci, un angle de 12° . $A'J'$ est le profil du plan de repos de la palette de sortie. Par G' , menons une parallèle à $A'J'$ et par J' une perpendiculaire $J'N'$ à ces deux lignes.

Du point O_2 comme centre, traçons les trajectoires des points J' et N' .

Les palettes que nous venons de tracer n'ont pas des positions correspondantes. Faisons-les glisser en plaçant, par exemple, la palette de sortie au repos et en dessinant la palette d'entrée dans la position correspondante. Pour cela, du point A' , construisons à l'intérieur de la roue un angle $A'O_2M'$ de 2° , égal à l'angle de repos. M' se trouve sur la trajectoire du point A' . Pour déterminer le plan d'impulsion, menons $M'P'$ tangente à l'arc I' . Le point P' se trouve sur la trajectoire F' . Pour tracer la position correspondante de la palette d'entrée, construisons l'angle FO_2M , de $0^\circ 30'$, égal à l'angle de chemin perdu. Le point M se trouve sur la trajectoire de F . Pour déterminer le plan d'impulsion, menons MP tangente à l'arc I . Le point P se trouve sur la trajectoire du point A . Pour terminer les palettes, nous appliquerons la méthode des rotations géométriques.

Roue et palettes de l'échappement à ancre suisse à bras de levier égaux. — Dans cette construction, les extrémités des plans d'impulsion des palettes sont à égales distances, c'est-à-dire à $\frac{7^\circ}{2} = 3^\circ 30'$, des points A et A' déterminés comme précédemment.

Nous nous bornons à indiquer la suite des opérations représentées par la figure 315. La répartition des angles est la même que dans l'échappement à repos équidistants.

Dessin de la dent

1. $\sphericalangle AO_1B = \sphericalangle A'O_1B' = 3^\circ 30' \left(\frac{1}{2} \text{ épaisseur de la palette} \right)$,
2. $\sphericalangle AO_1K = \sphericalangle A'O_1K' = 3^\circ 30' \left(\frac{1}{2} \text{ épaisseur de la palette} \right)$, prolonger les droites O_1K et O_1K' ,
3. $\sphericalangle BO_1L = 4^\circ$ (épaisseur de la dent),
4. circonférence (O_1, O_1F) ,
5. BL est le plan d'impulsion de la dent,
6. $\sphericalangle O_1BQ = 24^\circ$ ($BQ =$ face de la dent),
7. circonférences $(O_2, O_2B)(O_2, O_2B')$, trajectoires des points de repos de l'entrée et de la sortie,

18. $V'B'$ perpendiculaire à $B'O_2$,
19. $V'B'J' = 13^\circ$ (angle de tirage),
20. $G'N'$ parallèle à $B'J'$,
21. $B'J' = BJ$,
22. les angles de sommet J' et N' sont droits.

Mise en position des palettes l'une par rapport à l'autre (la dent est au repos sur la palette de sortie)

23. $\sphericalangle B'O_2P' = 2^\circ$ (angle d'engagement total ou de repos),

24. le prolongement de $P'M'$ est tangent à la circonférence I' . La figure est terminée comme une figure géométrique ayant subi une rotation. La palette d'entrée se trouve au-delà de la trajectoire du talon des dents de la roue,

25. $\sphericalangle FO_2M = 30'$ (angle de chemin perdu),

26. PM prolongé est tangent à la circonférence I . La figure peut être terminée sans difficulté.

Tracé des dents

27. construire la première dent en 3 de façon qu'elle appuie par sa pointe sur le repos de la palette de sortie dont le plan d'impulsion est $P'M'$;

28. reporter le pas angulaire de la roue, soit 24° , à partir de la pointe de la dent 3. Les pointes des dents 4, 2, 1, 0, etc. sont ainsi déterminées ;

29. les plans d'impulsion construits sont égaux à BL . Les faces de ces dents, tangentes à la circonférence Q , sont limitées par la serge, dont les rayons mesurent 0,8 et 0,75 fois O_2A .

Tracé mixte de la roue et des palettes de l'échappement à ancre suisse. —

La répartition des angles a été un peu modifiée ; la largeur des palettes a été réduite de 7° à $6^\circ 30'$, ce qui a permis de porter la chute de 1° à $1^\circ 30'$ (voir pp. 215 et 216, la répartition des angles dans l'échappement à repos équidistants).

Dans le tracé (fig. 316) les repos B et B' ne sont pas à $3^\circ 15'$ $\left(\frac{1}{2}\right)$ épaisseur de la palette), mais à $1^\circ 30'$ des points A et A' .

Les angles sont :

$$\sphericalangle BO_1A = \sphericalangle B'O_1A' = 1^\circ 30',$$

$$\sphericalangle BO_1K = \sphericalangle B'O_1K' = 6^\circ 30'.$$

Il est facile de compléter le dessin en s'inspirant de la figure 315.

La roue est dessinée à la fin de l'impulsion sur la palette d'entrée E , au moment où elle va la quitter pour effectuer la chute.

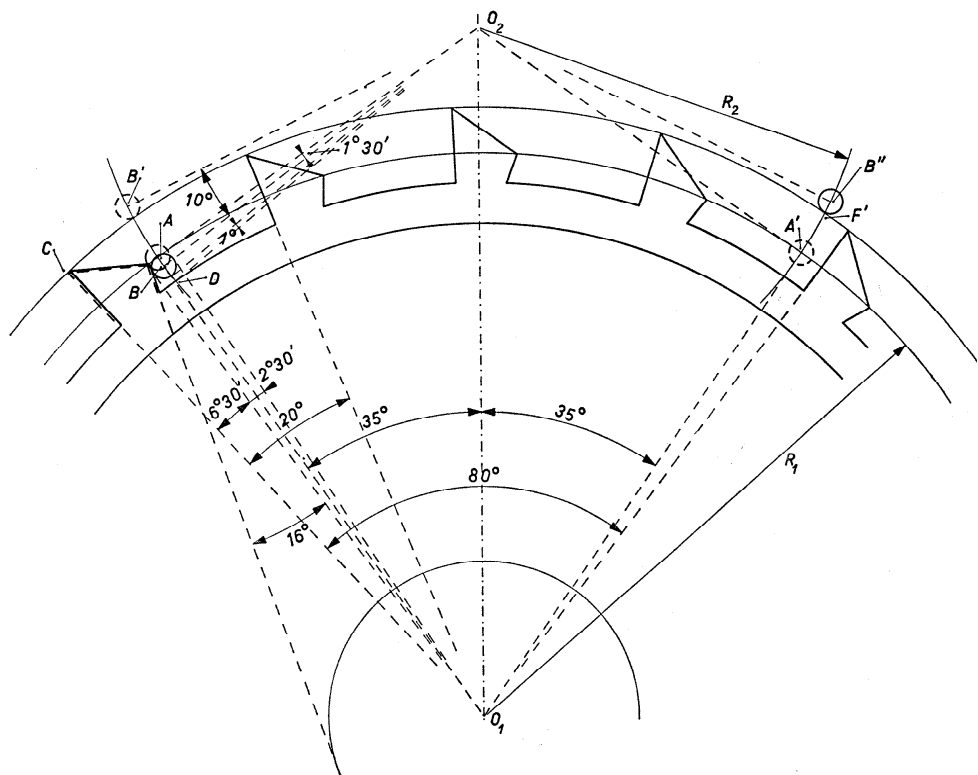


Fig. 317

En faisant $\sphericalangle O_2 O_1 A = \sphericalangle O_2 O_1 A' = 35^\circ$, on obtient les points A et A' qui se trouvent sur la circonférence de rayon donné, décrite par les pointes des dents de la roue. Le centre de l'ancre se trouve sur les tangentes à cette circonférence en A et A' . (Lorsque la roue a peu de dents et l'ancre une faible emprise sur la roue, on est parfois obligé d'éloigner le centre de l'ancre.)

Le rayon R_1 de la roue et celui des chevilles R_2 , à partir de O_2 sont liés par les relations :

$$\frac{R_2}{R_1} = \operatorname{tg} 35^\circ, \quad O_1 O_2 = \frac{R_1}{\cos 35^\circ}.$$

Soit $\sphericalangle A O_2 B = 1^\circ 30'$ l'angle d'engagement virtuel ; on admet que B se trouve sur le rayon $O_1 A$. Pendant la levée, le centre B de la cheville décrit un arc de cercle $(O_2, O_2 B)$ de 10° , angle de levée de l'ancre ; donc $\sphericalangle B O_2 B' = 10^\circ$.

A la fin de l'impulsion, le talon de la dent quitte la cheville ; le cercle décrit par ce talon est tangent à la circonférence de la cheville.

Pendant une alternance, la roue tourne d'un demi-pas, c'est-à-dire de $\frac{360^\circ}{2 \cdot 18} = 10^\circ$. Cet angle comprend l'angle d'impulsion de la roue, le diamètre de la cheville et l'angle théorique ou virtuel de chute. Soit un angle théorique de chute de 1° ; il reste pour l'angle d'impulsion de la dent :

$$10^\circ - 2^\circ 30' - 1^\circ = 6^\circ 30'.$$

En portant cet angle à gauche de la tangente extérieure à la circonférence de la cheville, on obtient le talon C de la dent. La face de repos de la dent est inclinée de 16° sur le rayon de la roue aboutissant à la pointe de la dent ; elle est, en même temps, tangente à la circonférence de la cheville, si l'on dessine la roue au repos sur la cheville d'entrée. Dans la plupart des échappements à chevilles, il n'y a pas de butée ; la serge de la roue limite la course de l'ancre. La longueur du plan de repos est donc déterminée par le chemin perdu de l'ancre. Si l'on trace à partir de O_2 la tangente à la circonférence de la cheville et qu'on porte un angle de chemin perdu de 1° , on obtient le point D sur le rayon O_1B ; O_1D est le rayon extérieur de la serge.

Il est facile de dessiner les autres dents de la roue qui sont à 20° l'une de l'autre.

Le centre B'' de la cheville de sortie se trouve sur un arc de circonférence (O_2, O_2A'), de sorte que la circonférence de la cheville est tangente extérieurement à celle de centre O_1 qui passe par C .

Les chutes dans l'échappement à chevilles. — Dans l'échappement à chevilles, la *chute réelle* est plus grande que la chute théorique ; leur différence est l'angle occupé par le rayon de la cheville. Dans notre cas, la chute réelle serait de $1^\circ + 1^\circ 5' = 2^\circ 15'$.

Dans la figure 318, nous avons dessiné, à plus grande échelle, les deux chevilles B' et I ainsi que les dents correspondantes C et F de la roue d'échappement.

La *chute d'entrée* ou *chute intérieure* est l'angle DO_1C qui est un peu plus petit que $2^\circ 15'$; la *chute de sortie* ou *chute extérieure*, soit l'angle IO_1F , est un peu plus grand que $2^\circ 15'$.

Les centres des chevilles se déplacent sur la même circonférence (O_2, O_2B), mais la cheville d'entrée, en s'élevant, se rapproche du talon C de la dent qui vient de donner l'impulsion, tandis que la cheville de sortie, en s'élevant, s'éloigne du talon F de la dent.

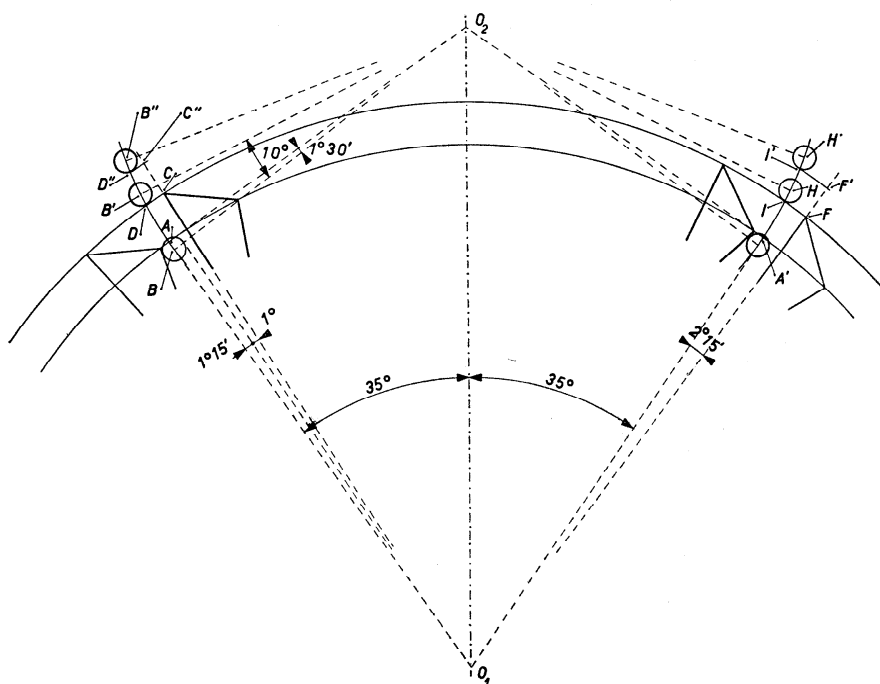


Fig. 318

Dans l'échappement à chevilles, la chute de sortie est plus grande que la chute d'entrée.

La différence entre les angles de chute augmente avec l'angle de levée de l'ancre :

$$\sphericalangle D''O_1C'' < \sphericalangle DO_1C, \quad \sphericalangle I'O_1F' > \sphericalangle IO_1F.$$

La fourchette, la cheville et les plateaux dans le système à double plateau. — Soient (fig. 319) O_2 et O_3 les centres de rotation de l'ancre et du balancier, ρ_3 le rayon de la cheville, c'est-à-dire la distance entre O_3 et le centre de la cheville. Appelons ρ_2 la distance entre le centre O_2 de l'ancre et le centre de la cheville ; cette grandeur varie avec l'élongation φ du balancier ; elle est minimum pour $\varphi = 0$, lorsque le centre de la cheville est sur la ligne des centres O_2O_3 .

Dessignons les valeurs ρ_2 et ρ_3 correspondant au commencement du dégagement et désignons par λ_a et λ_b les angles de levée de l'ancre et du balancier. Nous avons :

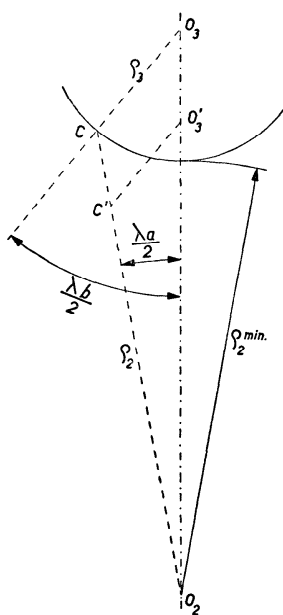


Fig. 319

$$\frac{O_2C}{O_3C} = \frac{\varrho_2}{\varrho_3} = \frac{\sin \frac{\lambda_b}{2}}{\sin \frac{\lambda_a}{2}}.$$

Modifier le rapport $\frac{\varrho_2}{\varrho_3}$ revient à changer le rapport des angles de levée du balancier et de l'ancre.

Pour le même angle de levée du balancier, la fourchette est plus longue si celui de l'ancre est plus petit ; pour le même angle de levée de l'ancre, elle est plus longue, si celui du balancier est plus grand.

Pour raccourcir la fourchette en conservant les angles de levée, il faut réduire la distance des centres O_2O_3 ; en même temps, le rayon de la cheville diminue, puisque le rapport $\frac{\varrho_2}{\varrho_3}$ conserve la même valeur. Dans

la figure 319, les points O'_3 et C' sont les centres du balancier et de la cheville pour une fourchette plus courte.

Pour construire la fourchette et le plateau, admettons (fig. 320) que : la distance réelle des centres ancre-balancier O_2O_3 est égale à 6,00 mm ;

le diamètre de la cheville vaut 0,60 mm ;

le diamètre du dard est 0,24 mm ;

l'angle de levée de l'ancre vaut 12° ;

l'angle de levée du balancier, 40° ;

l'angle de dégagement de l'ancre, $2^\circ 30'$;

l'angle d'ébat de plateau ou de dard, 1° ;

l'angle d'ébat de corne, $1^\circ 30'$.

Suivant les cas, ces valeurs pourront être différentes, mais la construction restera la même.

Représentons à une certaine échelle, la distance O_2O_3 . Construisons successivement les demi-angles de levée AO_2O_3 et O_2O_3A de l'ancre et du balancier, soit 6° et 20° , dont deux côtés se coupent en A qui est sur la trajectoire, de centre O_2 , d'un point de l'entrée de la fourchette et, d'autre part, sur la trajectoire de centre O_3 de la cheville.

Pour définir la forme de la cheville, dessinons l'axe de la fourchette à la fin du dégagement. L'angle de dégagement de l'ancre vaut $2^\circ 30'$,

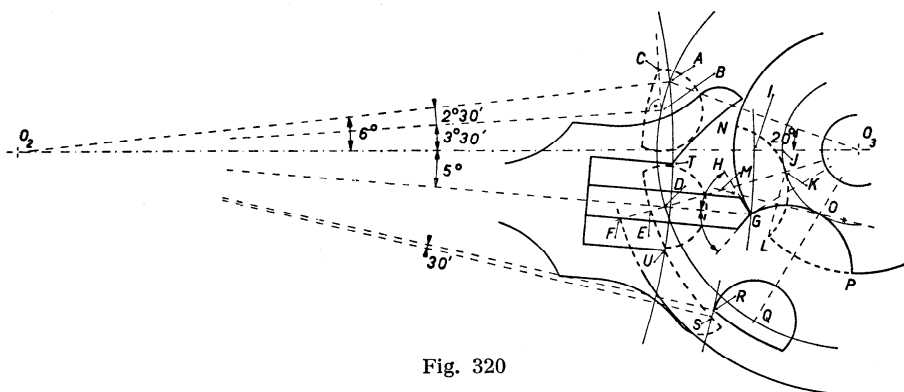


Fig. 320

celui que forme l'axe de la fourchette avec la ligne des centres, $3^{\circ}30'$ ($6^{\circ} = 3^{\circ}30' + 2^{\circ}30'$). B est la nouvelle position du centre de la cheville. Elevons la perpendiculaire BC à O_2B et limitons la cheville par un arc de cercle de centre O_3 passant par C . Habituellement l'arc est remplacé par sa corde; le devant de la cheville est alors un plan et non une surface cylindrique.

En réalité, à la fin du dégagement, la cheville est plus proche de la ligne des centres à cause de l'ébat de cette dernière dans l'entrée de la fourchette. Au moment de l'impulsion, le flanc de l'entrée touche donc la partie cylindrique de la cheville, mais jamais l'arête C .

Déterminons maintenant les rayons du grand et du petit plateau. Pour cela, construisons l'axe de la fourchette dans la position qu'il occupe lorsque la pointe du dard appuie contre la circonférence du petit plateau.

L'axe forme alors avec la ligne des centres un angle de 5° (demi-angle de levée moins angle d'ébat de plateau ou de dard). D est le centre de la cheville de plateau dans la nouvelle position. EF est l'épaisseur nécessaire entre la cheville et la circonférence du grand plateau. La circonférence (O_3, O_3F) limite le plateau. EF vaut dans ce cas 0,20 à 0,25 mm.

Considérons les angles de levée; nous pouvons admettre que le rayon du petit plateau vaut la moitié de celui du grand. En prenant un petit plateau de rayon plus grand, nous diminuerons la longueur des cornes; c'est ce que les horlogers font toutes les fois que les angles de levée des deux mobiles sont grands.

Traçons la circonférence du petit plateau dont un rayon coupe le prolongement de l'axe O_2D de la fourchette en G , extrémité du dard. Au moment du contact du dard avec le petit plateau, une des faces du dard GH doit être tangente au petit plateau. Reportons l'angle de GH avec l'axe du dard de l'autre côté de cet axe, afin de déterminer la seconde face

de l'extrémité. La partie cylindrique du dard est indiquée par deux parallèles tracées de chaque côté de l'axe à 0,24 mm l'une de l'autre.

Construisons l'encoche du petit plateau. A cet effet, dessinons la trajectoire de l'extrémité G du dard ; cette trajectoire coupe la ligne des centres en I ; reportons entre le fond de l'encoche et l'extrémité du dard la sûreté nécessaire, lorsque le dard est sur la ligne des centres. Cette dimension IJ peut être égale à 0,20 mm. La trajectoire du fond de l'encoche est un arc de cercle (O_3, O_3J) ; elle coupe O_3D en K qui est un point de l'encoche cherchée ; celle-ci sera définie dès que nous en connaîtrons un second point.

Reportons en $GL = IJ$ le jeu nécessaire au passage du dard. L est le second point cherché. La perpendiculaire élevée sur le milieu de KL coupe O_3D en M , centre de l'encoche LKN .

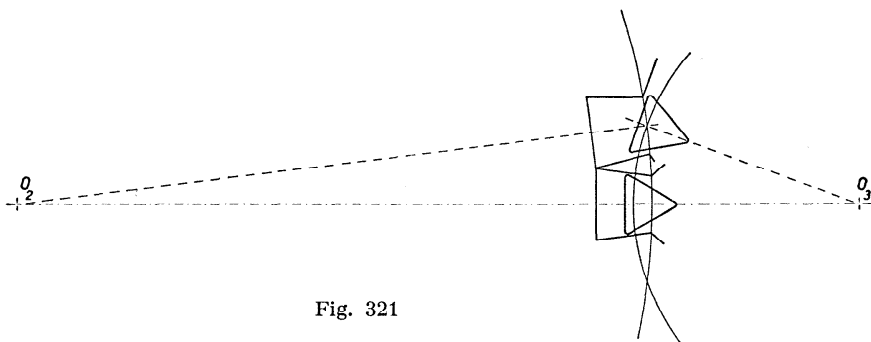


Fig. 321

Déterminons les cornes. Pour cela, faisons tourner les plateaux de façon à amener N en G . L'encoche du petit plateau est en GOP . Le centre de la cheville est Q . Traçons l'angle RO_2S égal à $30'$ (angle d'ébat de corne moins angle d'ébat de plateau). S est un point de la corne. Pour déterminer un second point de celle-ci, traçons l'entrée de la fourchette dont la largeur est égale au diamètre de la cheville plus le jeu de cette dernière dans l'entrée ; ce jeu vaut 0,02 à 0,03 mm. Reportons la moitié de cette largeur de chaque côté de l'axe O_2D . Par les points T et U situés sur la trajectoire de l'entrée, menons deux parallèles à l'axe ; celles-ci forment les flancs de l'entrée dont la profondeur est égale à la largeur. Le jeu de la cheville reste constant, quelle que soit sa position dans l'entrée.

Les deux points U et S de la corne étant connus, il est possible de dessiner cette dernière soit en faisant passer par ces deux points un arc de cercle dont le centre se trouve au delà de O_3 soit en les joignant par une droite. La corne doit être prolongée au delà de S de façon à assurer à la cheville une pénétration suffisante au moment où le bout du dard

s'engage dans l'encoche du petit plateau. La seconde corne est symétrique avec la première.

Il reste à dessiner le profil extérieur de la fourchette qui peut être fait à la convenance du constructeur. Il faut néanmoins veiller à obtenir une fourchette légère et rigide.

L'ébat de dard est plus faible que l'ébat de corne qui doit être également inférieur à l'angle de repos (angle d'engagement virtuel augmenté de l'angle de chemin perdu). L'entrée de la fourchette est faite en queue d'aigle, lorsque la cheville est triangulaire (voir la figure 321); ainsi la cheville aura un jeu régulier dans l'entrée.

La fourchette, la cheville et le plateau dans le système à simple plateau. — La construction à simple plateau n'offre aucune difficulté spéciale; le tracé de la cheville, de l'entrée et des cornes de la fourchette ainsi que celui du dard se font comme dans la construction à double plateau (voir la figure 303).

Transmission de l'énergie de la roue à l'ancre. — Il s'agit de trouver les conditions les plus favorables à une transmission aussi intégrale et régulière que possible du premier organe au second. Dans le chapitre VI (t. I), nous avons traité un problème analogue à propos des roues dentées.

Comme deux roues dentées, la roue d'échappement et l'ancre sont deux leviers; les parties en contact doivent remplir certaines conditions pour que la transmission de l'énergie de la roue à l'ancre se fasse bien.

Pour pouvoir appliquer la règle des profils, exposée au chapitre VI, nous devons d'abord déterminer ce qu'il convient d'appeler les circonférences primitives de la roue d'échappement et de l'ancre. Ce sont les circonférences de deux rouleaux s'entraînant par friction avec le rapport des vitesses angulaires de la roue et de l'ancre pendant l'impulsion.

Pendant l'impulsion, la roue parcourt un demi-pas angulaire moins l'angle de chute; l'ancre parcourt l'angle de levée moins l'angle d'engagement virtuel.

Soient :

r_1 et r_2 les rayons primitifs de la roue et de l'ancre,

z le nombre de dents de la roue d'ancre,

δ l'angle de chute,

ε l'angle d'engagement virtuel,

γ l'angle de levée de l'ancre.

Pendant l'impulsion, la roue parcourt un angle égal à :

$$\frac{360^\circ}{2z} - \delta,$$

tandis que l'ancre décrit un angle de :

$$\gamma - \varepsilon .$$

Nous avons donc :

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\gamma - \varepsilon}{\frac{360^\circ}{2z} - \delta} . \quad (264)$$

Appelons a la distance des centres :

$$a = r_1 + r_2 .$$

Nous déduirons facilement de la formule (264) les formules suivantes :

$$r_1 = a \frac{\gamma - \varepsilon}{\left(\frac{360^\circ}{2z} - \delta \right) + (\gamma - \varepsilon)} , \quad (265)$$

$$r_2 = a \frac{\frac{360^\circ}{2z} - \delta}{\left(\frac{360^\circ}{2z} - \delta \right) + (\gamma - \varepsilon)} . \quad (266)$$

Pour les valeurs précédemment admises, nous aurons :

$$r_1 = a \frac{8^\circ 30'}{10^\circ 30' + 8^\circ 30'} = 0,4474 a ,$$

$$r_2 = 0,5526 a .$$

Le problème de la roue et de l'ancre diffère de celui des roues dentées parce que les dents de la roue travaillent sur les deux palettes dans des conditions très différentes ; sur la palette d'entrée, nous avons un engrenage intérieur (les deux mobiles tournent dans le même sens) ; sur la palette de sortie, il s'agit d'un engrenage extérieur. Les formules (265) et (266) s'appliquent à l'action de la dent sur la palette de sortie. Pour la palette d'entrée, nous trouverons des formules analogues en partant de la relation :

$$a = r_1 - r_2 .$$

La solution théorique consisterait, par exemple, à déterminer les profils de la palette de sortie et de la dent de la roue d'ancre (ces profils pourraient être des arcs de développante de circonférence), puis à former le profil de la palette d'entrée d'après celui du plan d'impulsion de la

dent. Mais les profils théoriques sont peu pratiques et les essais faits n'ont conduit jusqu'à présent à aucune solution acceptable ; certaines propositions ont pourtant été formulées entre autres par Lange, de Glashütte et, en Suisse, par L.-A. Grosclaude et J. Grossmann.

Vaut-il la peine de rechercher des profils donnant une transmission absolument régulière de l'énergie ? Nous savons que les profils théoriques donnés par la théorie des engrenages n'assurent pas une transmission uniforme de l'énergie, puisque ces profils ont été déterminés en faisant abstraction du frottement. D'autre part, l'impulsion dure pendant une très petite fraction de seconde (généralement inférieure à 0,01 s). Ce qui importe, pendant cette action, c'est que le balancier reçoive une quantité d'énergie suffisante pour maintenir son amplitude. Si cette énergie n'est pas constante pendant l'impulsion, cela n'a pas grande importance, à condition que la transmission ne soit pas irrégulière au point de créer des perturbations brusques du mouvement du balancier. Si les profils des palettes sont rectilignes, la variation de la force transmise se fait de façon continue dans l'échappement à dents pointues ; dans l'échappement à impulsion partagée, la force transmise est représentée graphiquement par une ligne brisée.

Le problème n'est pas comparable à celui de la transmission de l'énergie par les roues dentées ; dans ce dernier cas, la régularité de l'énergie transmise est très importante, parce que le contact entre le profil d'une dent et le profil conjugué de l'aile dure pendant plusieurs alternances ; l'amplitude du balancier est notablement influencée par les engrenages ; or, si l'amplitude du balancier varie, les facteurs créant un défaut d'isochronisme influenceront la période du balancier, c'est-à-dire la marche de la montre.

Transmission de l'énergie pendant l'action de la roue sur la palette d'entrée de l'ancre. — Soit un échappement à ancre suisse à surfaces d'impulsion planes. Représentons (fig. 322) la dent au commencement et à la fin de l'impulsion sur la palette d'entrée. La pression normale N (ou N') est perpendiculaire au plan d'impulsion de la palette, tandis que la force de frottement $N\varphi$ (ou $N'\varphi$) est dirigée suivant le plan d'impulsion. M_1 est le moment moteur agissant sur la roue, M_2 , le moment de la force qui maintient l'ancre en équilibre. Les équations d'équilibre sont, pour la roue :

$$-N \cdot \overline{O_1 A} - N\varphi \cdot \overline{O_1 B} + M_1 = 0,$$

pour l'ancre :

$$N \cdot \overline{O_2 C} - N\varphi \cdot \overline{O_2 D} - M_2 = 0.$$

calculer M_2 . Cette valeur de M_2 est approximative puisqu'il y a une incertitude au sujet des valeurs de r_1 , r_2 , β et φ ; d'autre part, nous n'avons tenu compte ni des frottements des pivots de la roue et de l'ancre dans les coussinets ni des jeux nécessaires. Cependant le calcul de M_2 est intéressant, parce qu'il donne l'ordre de grandeur. Ainsi, pour une ancre à repos équidistants, pour $M_1 = 1$ dyne-cm et $\varphi = 0,15$, nous trouverions $M_2 = 0,9965$ dyne-cm, au début, et $M_2 = 0,6664$, à la fin de l'impulsion. En négligeant le frottement, nous obtiendrions $M_2 = 1,45$ dyne-cm, au début, et $M_2 = 0,967$, à la fin de l'impulsion. La perte d'énergie due au frottement est, au début et à la fin de l'impulsion, d'environ 31 %.

Transmission de l'énergie pendant l'action de la roue sur la palette de sortie de l'ancre. — Dans la figure 323, la dent et la palette de sortie sont représentées au commencement et à la fin de l'impulsion.

Les équations d'équilibre sont, pour la roue :

$$-N \cdot \overline{O_1 A} - N\varphi \cdot \overline{O_1 B} + M_1 = 0,$$

pour l'ancre :

$$-N \cdot \overline{O_2 C} + N\varphi \cdot \overline{O_2 D} + M_2 = 0.$$

Posons :

$$O_1 E = r_1, \quad O_2 E = r_2, \quad O_2 D = b,$$

$$O_1 O_2 = a = r_1 + r_2, \quad \sphericalangle O_2 EC = \sphericalangle O_1 EA = \beta.$$

Nous trouvons :

$$M_2 = M_1 \frac{r_2 \sin \beta - \varphi b}{r_1 \sin \beta + \varphi (a \cos \beta + b)}. \quad (269)$$

Cette relation existe encore à la fin de l'impulsion, mais les valeurs de r_1 , r_2 et β auront changé, tandis que φ et b auront la même valeur qu'au début de l'impulsion. Il est possible de se contenter de déterminer ces valeurs variables au moyen d'un dessin à grande échelle et bien exécuté.

En faisant abstraction du frottement, la formule (269) devient :

$$M_2 = M_1 \frac{r_2}{r_1} = M_1 \frac{a - r_1}{r_1} = M_1 \left(\frac{a}{r_1} - 1 \right). \quad (270)$$

Du commencement à la fin de l'impulsion r_1 diminue, $\frac{a}{r_1}$ et M_2 augmentent.

L'énergie transmise augmente du commencement à la fin de l'impulsion sur la palette de sortie.

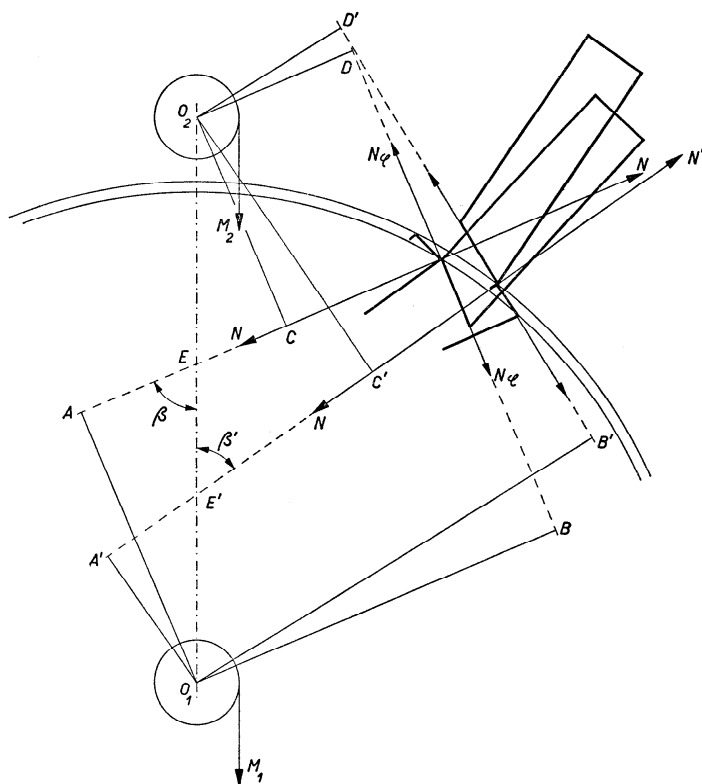


Fig. 323

Pour une ancre à repos équidistant, pour $M_1 = 1$ dyne-cm et $\varphi = 0,15$, nous obtenons les résultats inscrits dans le tableau ci-dessous :

	M_2	M_2 sans frottement	Perte due au frottement
Début de l'impulsion	0,458	0,607	$\sim 25\%$
Fin de l'impulsion	1,042	1,586	$\sim 34\%$

Transmission de l'énergie de la fourchette à la cheville de plateau. —

La cheville de plateau (fig. 324) est conduite dans le sens de la flèche 1 par la paroi RQ de l'entrée de fourchette : le point de contact est en R . La pression normale N est dirigée perpendiculairement à RQ ; avec le frottement $N\varphi$, elle tient en équilibre la force motrice dont le moment

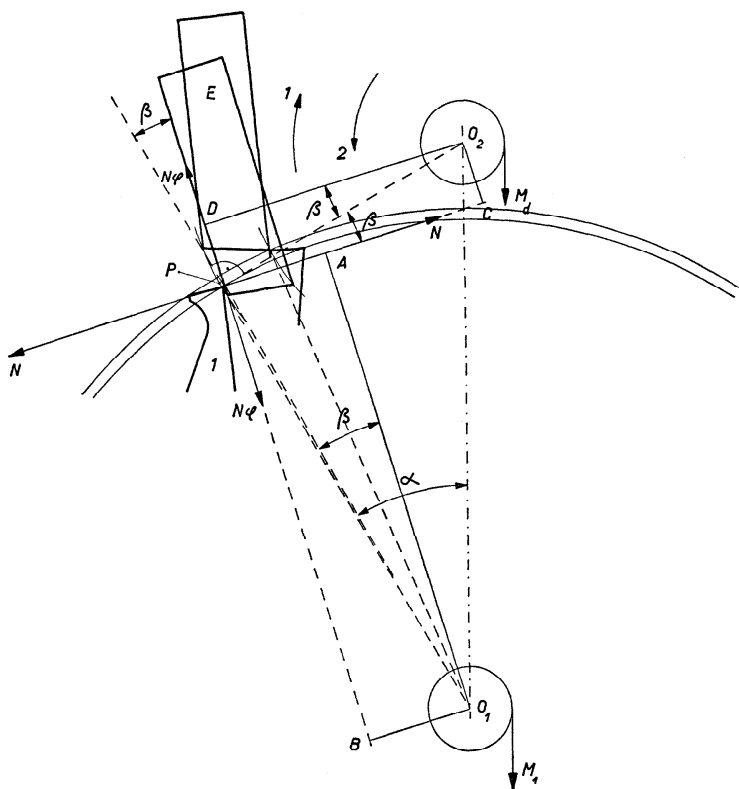


Fig. 325

Appelons α l'angle O_2O_1P ; cet angle vaut 30° si l'échappement est à repos équidistants et si l'ancre embrasse $2\frac{1}{2}$ pas d'une roue de 15 dents. Si $O_2P = R_2$ et $O_1P = R_1$, les équations d'équilibre deviennent :

$$M_1 - NR_1 \cos \beta + N\varphi R_1 \sin \beta = 0 ,$$

$$M_d - NR_2 \sin \beta - N\varphi R_2 \cos \beta = 0 .$$

De ces équations, nous tirons :

$$M_d = M_1 \frac{R_2}{R_1} \frac{\sin \beta + \varphi \cos \beta}{\cos \beta - \varphi \sin \beta}$$

ou

$$M_d = M_1 \frac{R_2}{R_1} \frac{\operatorname{tg} \beta + \varphi}{1 - \varphi \operatorname{tg} \beta} . \quad (273)$$

Dans l'échappement à repos équidistants ($z = 15$) :

$$\frac{R_2}{R_1} = \operatorname{tg} 30^\circ,$$

d'où :

$$M_d = M_1 \operatorname{tg} 30^\circ \frac{\operatorname{tg} \beta + \varphi}{1 - \varphi \operatorname{tg} \beta}. \quad (274)$$

La difficulté du dégagement est fonction de M_1 , de β et de φ . Calculons d'après (274) la dérivée de M_d par rapport à β . Nous trouvons après quelques transformations :

$$\frac{dM_d}{d\beta} = M_1 \operatorname{tg} 30^\circ \frac{1 + \varphi^2}{(\cos \beta + \varphi \sin \beta)^2}.$$

Cette valeur est positive pour toutes les valeurs de β ; donc M_d augmente en même temps que β .

Sur la palette d'entrée le dégagement se fait plus difficilement à la fin ; sur la palette de sortie, c'est au début que le dégagement est le plus difficile.

Les formules (273) et (274) ont été déduites en supposant que le mouvement de l'ancre se fait suivant la flèche 1.

Pour connaître le moment M_a avec lequel l'ancre est attirée contre les butées, il faut supposer que le mouvement de l'ancre se fait suivant la flèche 2 (fig. 325). La force de frottement change de direction ; nous trouvons les formules (275) et (276) en changeant dans (273) et (274) le signe des termes contenant φ . Nous obtenons :

$$M_a = M_1 \frac{R_2}{R_1} \frac{\operatorname{tg} \beta - \varphi}{1 + \varphi \operatorname{tg} \beta} \quad (275)$$

et

$$M_a = M_1 \operatorname{tg} 30^\circ \frac{\operatorname{tg} \beta - \varphi}{1 + \varphi \operatorname{tg} \beta}. \quad (276)$$

Le recul dynamique de la roue d'échappement. — Nous avons calculé l'angle δ dont recule la roue à cause de l'inclinaison de la face de repos de la palette ; nous avons trouvé la formule (259) qui est approximative, mais suffisante :

$$\delta = \varepsilon \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta.$$

Dans le cas d'une ancre embrassant $2\frac{1}{2}$ pas d'une roue de 15 dents et pour un angle de tirage $\beta = 15^\circ$, nous avons :

$$\delta = \varepsilon \operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{tg} 15^\circ.$$

Dans cette formule ε désigne l'angle de repos (angle d'engagement virtuel augmenté du chemin perdu).

Les angles δ et ε sont parcourus dans le même temps par la roue et par l'ancre. Admettons que ces angles ont été parcourus avec des vitesses angulaires ω_r et ω_a constantes. Nous avons :

$$\omega_r = \omega_a \operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{tg} 15^\circ. \quad (277)$$

La vitesse angulaire ω_a dépend de celle de la cheville de plateau qui l'entraîne. La vitesse angulaire ω_b du balancier et celle, ω_a , de l'ancre sont dans le rapport inverse des rayons ϱ_2 et ϱ_3 de la fourchette et de la cheville :

$$\begin{aligned} \omega_a &= \varrho_3, \\ \omega_b &\quad \varrho_2 \end{aligned}$$

soit :

$$\omega_a = \omega_b \frac{\varrho_3}{\varrho_2} = \omega_b \frac{\sin \frac{\lambda_a}{2}}{\sin \frac{\lambda_b}{2}}, \quad (278)$$

où λ_a et λ_b désignent les angles de levée de l'ancre et du balancier.

La vitesse angulaire du balancier est fonction de l'amplitude et de l'élongation au début du dégagement. Cette vitesse est donnée par la formule (124) du chapitre VII :

$$\omega_b = \sqrt{\frac{C}{I}} \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2},$$

que nous mettons sous la forme :

$$\omega_b = \frac{2\pi}{T} \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}.$$

Dans le cas qui nous occupe :

$$\varphi = \frac{\lambda_b}{2},$$

donc :

$$\omega_b = \frac{2\pi}{T} \sqrt{\varphi_0^2 - \left(\frac{\lambda_b}{2}\right)^2}. \quad (279)$$

Rappelons que, dans la formule (279), T désigne la période, φ_0 l'amplitude et λ_b l'angle de levée du balancier.

En introduisant la valeur de ω_b dans les formules (277) et (278), nous trouvons :

$$\omega_a = \frac{2\pi}{T} \sqrt{\varphi_0^2 - \left(\frac{\lambda_b}{2}\right)^2} \frac{\sin \frac{\lambda_a}{2}}{\sin \frac{\lambda_b}{2}} \quad (280)$$

et

$$\omega_r = \frac{2\pi}{T} \sqrt{\varphi_0^2 - \left(\frac{\lambda_b}{2}\right)^2} \frac{\sin \frac{\lambda_a}{2}}{\sin \frac{\lambda_b}{2}} \operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{tg} 15^\circ. \quad (281)$$

A la fin du dégagement, la roue recule avec la vitesse angulaire donnée par la formule (281); à cause de son inertie, elle ne peut pas s'arrêter immédiatement; son mouvement est ralenti par le moment M_1 qui agit sur l'axe de la roue d'échappement.

L'accélération angulaire est égale à $-\frac{M_1}{I_r}$, si I_r désigne le moment d'inertie de la roue.

Le mouvement de la roue sera arrêté après que la roue aura parcouru l'angle δ' de recul dynamique. Nous avons :

$$\delta' = \frac{1}{2} \frac{I_r}{M_1} \omega_r^2. \quad (282)$$

Il est intéressant de calculer δ' pour un cas réel. Admettons les valeurs suivantes :

$$T = 0,4 \text{ s}, \quad \varphi_0 = \frac{3\pi}{2}, \quad \lambda_b = 40^\circ = \frac{2\pi}{9}, \quad \lambda_a = 10^\circ = \frac{\pi}{18},$$

$$M_1 = 120 \text{ dynes-cm}, \quad I_r = 0,0023 \text{ g} \cdot \text{cm}^2.$$

Calculons ω_r d'après (281) :

$$\omega_r = \frac{2\pi}{0,4} \sqrt{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{9}\right)^2} \frac{\sin 5^\circ}{\sin 20^\circ} \operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{tg} 15^\circ = 2,9103 \text{ rad/s}.$$

Appliquons la formule (282); nous trouvons :

$$\delta' = \frac{1}{2} \frac{0,0023}{120} \cdot 2,9103^2 = 8,12 \cdot 10^{-6} \text{ rad} \cong 17''.$$

Le recul total de la roue est égal à $\delta + \delta'$.

Angle parcouru par la roue jusqu'à ce qu'une dent rattrape le plan d'impulsion d'une des palettes. — Après le recul, la roue est entraînée dans le sens normal par la force motrice ; le mouvement de la roue est accéléré et, après un temps t , une dent de la roue rattrape le plan d'impulsion d'une des palettes de l'ancre, elle aussi en mouvement à cause de l'action de la cheville de plateau sur la paroi OP de l'entrée de fourchette. Nous pouvons considérer le mouvement de l'ancre comme un mouvement uniforme de rotation, si la vitesse angulaire de l'ancre est proportionnelle à celle du balancier, qui varie à peine pendant le dégagement. Nous pouvons supposer, sans commettre d'erreur appréciable, que la vitesse angulaire du balancier pendant le dégagement est égale à la vitesse angulaire maximum dont la valeur est :

$$\omega_b = \varphi_0 \sqrt{\frac{C}{I}} = \varphi_0 \frac{2\pi}{T}.$$

La vitesse angulaire de l'ancre est :

$$\omega_a = \omega_b \frac{\sin \frac{\lambda_a}{2}}{\sin \frac{\lambda_b}{2}} = \varphi_0 \frac{2\pi}{T} \frac{\sin \frac{\lambda_a}{2}}{\sin \frac{\lambda_b}{2}}.$$

L'angle α_a parcouru par l'ancre dans le temps t est :

$$\alpha_a = \omega_a t = \varphi_0 \frac{2\pi}{T} \frac{\sin \frac{\lambda_a}{2}}{\sin \frac{\lambda_b}{2}} t,$$

d'où :

$$t = \frac{\alpha_a}{\varphi_0} \frac{T}{2\pi} \frac{\sin \frac{\lambda_b}{2}}{\sin \frac{\lambda_a}{2}}. \quad (283)$$

Le mouvement de la roue est accéléré ; l'accélération angulaire est $\frac{M_1}{I_r}$. Appelons α_r l'angle parcouru par la roue pendant le temps t :

$$\alpha_r = \frac{1}{2} \frac{M_1}{I_r} t^2. \quad (284)$$

En éliminant t entre les équations (283) et (284), nous trouvons :

$$\frac{\alpha_a}{\varphi_0} \frac{T}{2\pi} \frac{\sin \frac{\lambda_b}{2}}{\sin \frac{\lambda_a}{2}} = \sqrt{\frac{2\alpha_r I_r}{M_1}}. \quad (285)$$

L'équation (285) est une relation entre les deux inconnues α_a et α_r . Nous trouvons une autre relation entre les mêmes angles en supposant que leur rapport est égal à celui des angles parcourus par l'ancre et par la roue pendant l'impulsion.

L'angle d'impulsion de l'ancre est égal à l'angle de levée diminué de l'angle d'engagement virtuel, soit $10^\circ - 1^\circ 30' = 8^\circ 30'$.

L'angle d'impulsion de la roue est égal au demi-pas angulaire diminué de l'angle de chute, soit $12^\circ - 1^\circ 30' = 10^\circ 30'$.

Admettons :

$$\frac{\alpha_a}{\alpha_r} = \frac{8^\circ 30'}{10^\circ 30'}$$

ou

$$\alpha_a = \frac{8,5}{10,5} \alpha_r.$$

En introduisant cette valeur de α_a dans l'équation (285), nous obtenons :

$$\frac{8,5}{10,5} \alpha_r \frac{T}{2\pi\varphi_0} \frac{\sin \frac{\lambda_b}{2}}{\sin \frac{\lambda_a}{2}} = \sqrt{\frac{2\alpha_r I_r}{M_1}},$$

d'où nous tirons :

$$\alpha_r = \frac{2I_r}{M_1} \left(\frac{10,5 \cdot 2\pi\varphi_0 \sin \frac{\lambda_a}{2}}{8,5 T \sin \frac{\lambda_b}{2}} \right)^2. \quad (286)$$

L'équation (286) devient, pour les valeurs admises pour le calcul de l'angle de recul dynamique :

$$\alpha_r = \frac{2 \cdot 0,0023}{120} \left(\frac{10,5 \cdot 2\pi \cdot 1,5\pi \sin 5^\circ}{8,5 \cdot 0,4 \sin 20^\circ} \right)^2 = 1^\circ 11' 33''.$$

L'angle de recul de la roue est :

$$\delta + \delta' = 13' 55'' + 17'' = 14' 12''.$$

Le point de rencontre de la dent et du plan d'impulsion de la palette est à $1^{\circ}11'33'' - 14'12'' = 57'21''$ du point de repos. L'impulsion qui devait être de $10^{\circ}30'$ n'est que de :

$$10^{\circ}30' - 57'21'' = 9^{\circ}32'39''.$$

La perte d'impulsion est de 9% environ.

Le rendement de l'échappement à ancre. — Même si l'on fait abstraction de l'énergie absorbée par les frottements des pivots, on constate que l'échappement à ancre est un mécanisme dont le rendement n'est pas bon.

Déjà avant l'impulsion une partie de l'énergie est perdue à cause de la rupture du contact entre la roue et l'ancre.

Les formules (267) et (269) permettent de calculer le moment de force agissant sur l'ancre au commencement et à la fin de l'impulsion sur chacune des palettes. En multipliant le moment moyen par l'angle que décrit l'ancre pendant l'impulsion, on obtient le travail ou l'énergie transmise.

On peut de la même façon calculer au moyen de la formule (271) l'énergie transmise de l'ancre au balancier.

Pour évaluer l'énergie absorbée par le frottement, il suffit de poser $\varphi = 0$ dans les formules mentionnées et de soustraire les premières valeurs des dernières, puis de multiplier cette différence par l'angle décrit.

Mais la perte d'impulsion due au recul de la roue d'ancre et le frottement des dents contre les palettes et de la fourchette contre la cheville de plateau ne sont pas les seules causes du mauvais rendement de l'échappement ; il y faut ajouter les chutes et les chocs, la résistance au dégagement, les frottements des pivots.

Tout compte fait, le balancier reçoit à peine 40% de l'énergie transmise par la roue d'échappement. Pour améliorer le rendement, il faudrait diminuer les chutes, les angles de repos, le coefficient de frottement.

Ce mauvais résultat mécanique de l'échappement à ancre ne doit pas effrayer outre mesure. Il importe en somme peu que le rendement de l'échappement ait une valeur déterminée ; on demande à l'échappement de transmettre au balancier une quantité d'énergie suffisante pour entretenir un mouvement d'amplitude donnée. En supposant que l'énergie dissipée au cours d'une alternance soit constante, on demande à l'échappement de remplacer cette énergie dissipée. Si l'échappement transmettait à chaque alternance la même quantité d'énergie, l'amplitude des oscillations du balancier resterait constante, et le réglage serait bien facilité.

Il n'en est pas ainsi dans la pratique : l'amplitude du balancier varie constamment comme le montrent les diagrammes ; donc l'échappement ne transmet pas toujours la même quantité d'énergie. Mais l'échappe-

ment n'est pas le grand coupable : il transmet l'énergie qu'il reçoit ; or cette dernière est irrégulière à cause des engrenages. Et les diagrammes d'amplitude permettent de déceler la cause des maximums et des minimums ; ils mettent en évidence l'influence très grande de l'engrenage barillet-pignon des minutes, puis l'influence moins grande de l'engrenage roue des minutes-pignon de moyenne, et ainsi de suite pour tous les engrenages. L'influence de l'échappement ne pourrait être visible que dans un diagramme très détaillé et si, par exemple, le travail sur la palette d'entrée était nettement différent du travail sur la palette de sortie.

On peut dire qu'en règle générale, l'échappement à ancre n'est pas responsable des variations d'amplitude du balancier. Si son rendement est faible, il semble bien qu'il soit à peu près constant et c'est en somme tout ce qu'on lui demande.

Mais pour que le rendement reste constant, il faut diminuer les causes d'usure : frottements, chocs, chutes. En améliorant le rendement de l'échappement, on pourra utiliser un ressort moteur moins fort et réduire ainsi les frottements dans le rouage.

L'arrêt sur le plan d'impulsion. — Lorsqu'on remonte une montre arrêtée, il arrive qu'elle ne reprenne sa marche qu'après avoir reçu une secousse. Au moment de l'arrêt, une des dents de la roue d'échappement est appuyée sur le plan d'impulsion ou sur le plan de repos d'une des palettes.

Dans le premier cas, on dit qu'il y a *arrêt sur l'impulsion* ; on utilise aussi l'expression « arrêt au doigt ».

Bien que ce défaut n'influence pas la marche normale de la montre, les horlogers et les acheteurs ne l'acceptent pas ; il faut l'éliminer et, pour cela, voir en quoi il consiste.

On dessine (fig. 326) l'échappement au moment où une dent de la roue est en impulsion sur la palette d'entrée : la cheville de plateau est en contact avec la paroi MN de l'entrée ; le spiral est armé d'un angle α . Soit C le moment élastique du spiral ; celui-ci exerce à l'instant représenté par la figure 326 un moment $C\alpha$ qui tend à ramener la fourchette dans la position correspondant à l'équilibre du balancier (direction de la flèche 1). D'autre part la roue d'échappement tend à faire tourner la fourchette dans le sens de la flèche 2. S'il y a équilibre entre les deux moments, il y a arrêt sur l'impulsion. On a alors :

$$F \cdot \overline{O_2A} = C\alpha \frac{\varrho_2}{\varrho_3}.$$

L'équilibre aura lieu si :

$$\alpha = \frac{F \cdot \overline{O_2A} \cdot \varrho_3}{C\varrho_2}. \quad (287)$$

Mais, si $\alpha > \frac{\lambda_b}{2}$, l'arrêt sur l'impulsion est impossible.

Il faut chercher à rendre α aussi grand que possible; pour cela il faut une grande force motrice (dont dépend la valeur de F), un spiral

faible et un grand rapport $\frac{\varrho_3}{\varrho_2}$, ce

qui signifie que l'angle de levée du balancier doit être réduit autant que possible, si l'angle de levée de l'ancre est donné.

La force motrice en question est celle qui agit sur la roue d'échappement; elle dépend de celle du ressort moteur; le rapport de ces deux forces est influencé par des engrenages défectueux et des frottements trop grands (frottements des pivots dans les coussinets et des dents entre elles). Le moment de F par rapport au centre de l'ancre dépend de l'état des surfaces d'impulsion et de l'inclinaison du plan d'impulsion de la palette.

Tout ce qui diminue la force agissant sur la roue d'échappement favorise l'arrêt sur l'impulsion.

L'angle de levée du balancier ne peut être changé que par le fabricant d'assortiments; pour le diminuer sans altérer ni la distance des centres ni l'angle de levée de l'ancre, il faut augmenter ϱ_3 et raccourcir la fourchette.

Le moment élastique C du spiral ne peut être modifié sans que soit modifié dans le même sens le moment d'inertie I du balancier, puisque ces grandeurs déterminent la période suivant la formule :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C}}.$$

Dans les montres de précision, on prend pour I et C des grandes

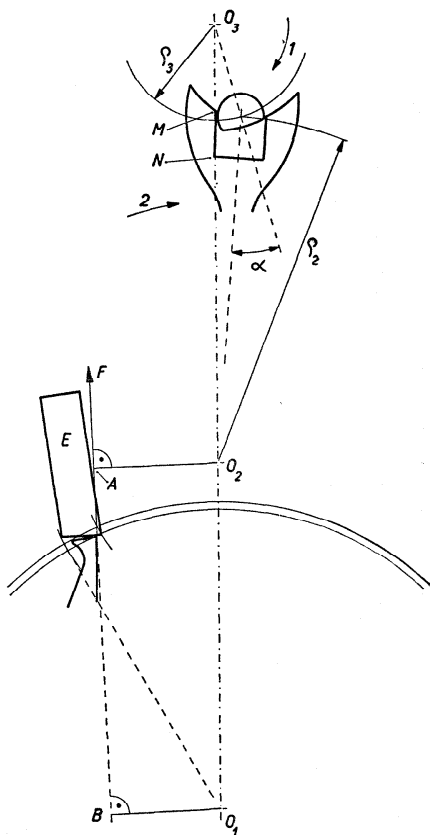


Fig. 326

valeurs ; le risque d'arrêt sur l'impulsion est de ce fait augmenté, mais on choisit aussi un petit angle de levée du balancier.

La formule (287) ne tient pas compte de certains facteurs qu'il importe de mentionner parce qu'on peut les influencer ; ce sont ceux qui entravent la liberté des mobiles comme :

1° le manque de liberté de la cheville dans l'entrée de fourchette (parois rugueuses, entrée trop étroite) ;

2° trop grands moments d'inertie de la roue et de l'ancre ;

3° pivots et pierres mal polis, jeux insuffisants ;

4° graissage défectueux.

L'arrêt sur l'impulsion n'a pas la même fréquence sur les deux palettes, car le moment de force transmis à l'ancre augmente du commencement à la fin de l'impulsion sur la palette de sortie et diminue sur la palette d'entrée. Or, l'arrêt sur l'impulsion se produit vers la fin de l'impulsion ; il a donc une plus forte tendance à se manifester sur la palette d'entrée.

Si la montre n'est pas au repère, c'est-à-dire si, dans la position d'équilibre du spiral, la cheville de plateau ne se trouve pas sur la ligne des centres O_2O_3 , le danger de l'arrêt sur l'impulsion est augmenté sur une palette et diminué sur l'autre.

La force F varie avec l'état de tension du ressort moteur. L'arrêt sur l'impulsion est plus probable quand le ressort de barillet est peu armé. La montre se met en marche dès qu'on la remonte ou bien après quelques tours de la tige de remontoir, aussitôt que la force F a une valeur suffisante pour vaincre la résistance du spiral.

L'arrêt sur le repos. — L'arrêt qui se produit lorsqu'une dent de la roue d'échappement est appuyée contre la face de repos d'une palette provient de l'insuffisance de la force du spiral pour opérer le dégagement.

La fourchette est appuyée contre une des butées ; la cheville de plateau est éloignée de la position d'équilibre du spiral de la moitié de l'angle de levée du balancier. Le spiral est armé de l'angle $\frac{\lambda_b}{2}$; son couple est $C \frac{\lambda_b}{2}$; il agit sur la fourchette avec une force dont le moment par rapport au centre de l'ancre est :

$$C \frac{\lambda_b}{2} \frac{\varrho_2}{\varrho_3}.$$

Le moment de force M_d nécessaire au dégagement est donné par la formule (274) :

$$M_d = M_1 \operatorname{tg} 30^\circ \frac{\operatorname{tg} \beta + \varphi}{1 - \varphi \operatorname{tg} \beta},$$

pour une ancre à repos équidistants embrassant $2\frac{1}{2}$ pas d'une roue d'échappement de 15 dents.

Il n'y aura pas d'arrêt sur le repos si :

$$C \frac{\lambda_b}{2} \frac{\varrho_2}{\varrho_3} > M_1 \operatorname{tg} 30^\circ \frac{\operatorname{tg} \beta + \varphi}{1 - \varphi \operatorname{tg} \beta}. \quad (288)$$

Tout ce qui contribue à augmenter la valeur du premier membre de cette inégalité ou à diminuer la valeur du second rend plus petite la probabilité de l'arrêt sur le repos.

On cherchera à avoir de grandes valeurs pour C , λ_b , $\frac{\varrho_2}{\varrho_3}$, mais il vaut

mieux que M_1 (moment agissant sur la roue d'échappement), l'angle de tirage β et le coefficient de frottement φ soient petits. Certaines conditions qui empêchent l'arrêt sur le repos favorisent l'arrêt sur l'impulsion ; cependant les deux arrêts peuvent être évités. Quelques facteurs favorisent les deux arrêts ; ce sont ceux qui entravent la liberté de l'ancre et de la roue ; ils ont été mentionnés ci-dessus. Les défauts qui viennent d'être signalés dépendent en partie de la force du ressort moteur : un fort ressort favorise l'arrêt sur le repos et contrarie l'arrêt sur l'impulsion.

Soient (fig. 327) les diagrammes des moments de la force de deux ressorts en fonction des heures de marche depuis le dernier remontage. Les ordonnées expriment le moment de la force qui agit sur la roue d'échappement.

La partie hachurée supérieure commence, pour une montre donnée, à la valeur du couple M_1 tirée de la formule :

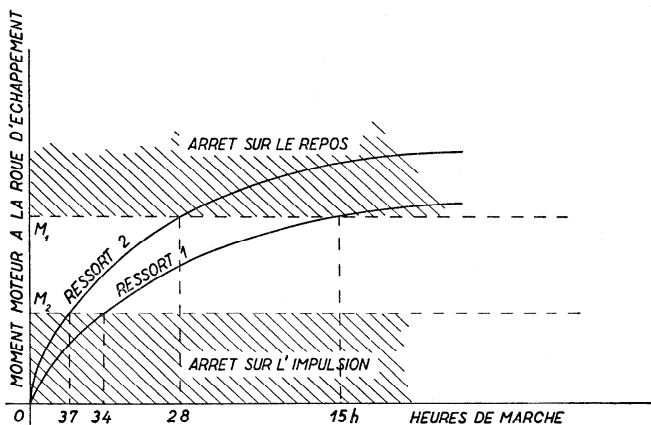


Fig. 327

$$C \frac{\lambda_b}{2} \frac{\varrho_2}{\varrho_3} = M_1 \operatorname{tg} 30^\circ \frac{\operatorname{tg} \beta + \varphi}{1 - \varphi \operatorname{tg} \beta}.$$

Si M_1 est plus grand, l'arrêt sur le repos se produit.

La partie hachurée inférieure se termine à la valeur du couple agis-

sant sur la roue d'échappement au moment où α a la valeur donnée par la formule (287), c'est-à-dire :

$$M_2 = F \cdot \overline{O_1 B} = C\alpha \frac{\varrho_2}{\varrho_3} \frac{O_1 B}{O_2 A}.$$

Si le moment est plus petit que cette valeur, il y a arrêt sur l'impulsion.

La figure montre une région où ni l'un ni l'autre des arrêts ne se produit ; l'étendue de cette région varie suivant la force du ressort ; elle est plus grande pour le ressort 1 que pour le ressort 2.

Dimensions des organes de l'échappement. — Les dimensions des organes de l'échappement sont plus ou moins arbitraires ; elles sont déterminées avant tout par les dimensions du mouvement et par la place disponible à côté du barillet, du rouage et des mécanismes de remontage et de mise à l'heure.

Pour des raisons de commodité ou d'esthétique, on a parfois fait varier la longueur de la fourchette et utilisé la *longue fourchette* qui tournait sur une tige d'ancre située en dehors du cercle décrit par l'extrémité des vis du balancier. Des considérations mécaniques ont fait renoncer à la longue fourchette.

Pendant leur action, les organes de l'échappement exécutent des mouvements de sens différents et à des vitesses variables. Pendant certaines opérations, il y a une grande accélération : c'est le cas lorsqu'une pièce (roue ou ancre) tourne « à vide », c'est-à-dire lorsqu'elle a perdu le contact avec la pièce qu'elle est chargée de conduire, mais en restant sous l'influence de la force du ressort moteur.

Voici pour la roue et l'ancre, la succession des mouvements pendant une alternance.

	Dégagement	Impulsion	Après l'impulsion
Roue	Recul, puis avance accélérée.	Avance moins accélérée.	Avance accélérée (chute), puis avance retardée par le frottement pendant le chemin perdu.
Ancre	Avance par impulsion de la cheville, puis avance accélérée.	Avance moins accélérée.	Avance accélérée (chemin perdu).

Tous ces mouvements ont lieu pendant le dégagement et l'impulsion, c'est-à-dire, pour un balancier dont le mouvement a une amplitude de $270^\circ = \frac{3\pi}{2}$, qui fait 18 000 alternances à l'heure et dont l'angle de levée est de 40° , pendant un temps plus petit que 0,01 s (exactement 0,009 44 s); on comprend la nécessité d'avoir des mobiles ayant peu d'inertie.

Pour diminuer le prix de revient de la montre, on peut être tenté d'utiliser, dans de petites pièces, des assortiments trop grands par rapport au balancier. Les organes de l'échappement ont alors un plus grand moment d'inertie et certaines fonctions en sont affectées; ainsi le recul géométrique de la roue d'ancre pendant le dégagement restera le même, mais le recul dynamique sera plus grand avec une roue de moment d'inertie plus grand.

L'angle de recul dynamique est, d'après (282) :

$$\delta' = \frac{1}{2} \frac{I_r}{M_1} \omega_r^2;$$

il est directement proportionnel à I_r , moment d'inertie de la roue.

Le recul de la roue étant plus prononcé avec une roue plus inerte, l'angle que cette dernière doit parcourir pour rattraper la surface d'impulsion de la palette est d'autant plus grand que l'accélération de la roue est plus faible.

L'accélération angulaire est :

$$\gamma_r = \frac{M_1}{I_r}.$$

L'angle α_r parcouru par la roue est, d'après (286), proportionnel au moment d'inertie I_r de la roue.

L'augmentation de α_r correspond à une perte d'impulsion. L'ancre recevra moins d'énergie; son mouvement sera d'autant plus ralenti qu'elle aura aussi un moment d'inertie plus grand; la fourchette mettra plus de temps pour passer de l'état d'organe mené par la cheville de plateau à celui d'organe menant; l'impulsion sur la cheville sera plus courte. Enfin, le dégagement sera plus difficile, puisqu'il s'agira de faire reculer une roue de plus grand moment d'inertie.

Ces considérations montrent que l'augmentation des moments d'inertie de la roue et de l'ancre n'a que des effets néfastes pour le rendement de l'échappement. Pour maintenir une certaine amplitude des oscillations du balancier, il faut un ressort de barillet plus fort si l'on utilise un assortiment plus grand.

Jusqu'à présent on n'a parlé que du moment d'inertie et non du poids des organes, car ce qui importe dans le mouvement de rotation, ce sont les moments d'inertie.

Cependant le poids augmente le frottement des pivots et accentue ainsi la perte d'énergie.

Le poids d'un mobile et son moment d'inertie ne sont pas des grandeurs proportionnelles ; deux roues peuvent avoir le même poids et des moments d'inertie différents.

Pour diminuer efficacement le moment d'inertie d'un corps, il faut enlever de la matière aussi loin que possible de l'axe de rotation : pour une roue, vers l'extérieur de la roue ; pour l'ancre, vers les palettes ou vers l'extrémité de la fourchette.

Le moment d'inertie du plateau est petit en regard du moment d'inertie du balancier. On n'a pas de raison de le diminuer, car il fait partie du moment d'inertie du balancier-spiral, lequel doit être le plus grand possible.

Les moments d'inertie de la roue et de l'ancre ont naturellement une influence sur les arrêts sur l'impulsion ou sur le repos.

Aujourd'hui les fabricants ont des séries d'assortiments normaux dans lesquelles le technicien choisit ce qui lui convient le mieux en se laissant guider par des considérations telles que la qualité du réglage, la facilité du travail et le prix de revient.

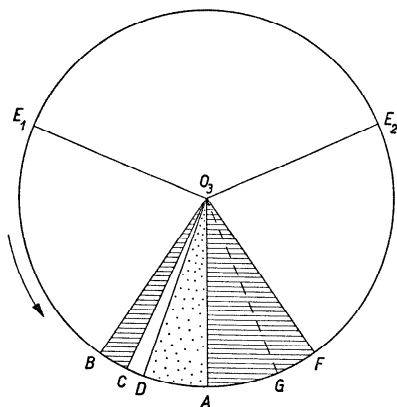


Fig. 328

La durée des fonctions de l'échappement. —

Reprenons (fig. 328) la figure 305 représentant les angles décrits par le balancier durant une alternance. Nous avons défini l'angle de dégagement BO_3C , l'angle CO_3D parcouru entre la fin du dégagement et le début de l'impulsion et l'angle d'impulsion DO_3F . L'angle BO_3F est l'angle de levée λ_b du balan-

cier, donc $\sphericalangle AO_3B = \frac{\lambda_b}{2}$.

L'angle BO_3C dépend de l'angle ε (engagement virtuel plus chemin perdu). Désignons par ϱ_2 et ϱ_3 les distances des centres de rotation de l'ancre et du balancier à la cheville ; nous avons :

$$\sphericalangle BO_3C = \varepsilon \frac{\varrho_2}{\varrho_3} = \varepsilon \frac{\sin \frac{\lambda_b}{2}}{\sin \frac{\lambda_a}{2}}.$$

Pour $\varepsilon = 1^\circ 30'$, $\lambda_b = 40^\circ$, $\lambda_a = 10^\circ$, nous avons :

$$\sphericalangle BO_3C = 5^\circ 53' 10'', 9.$$

L'angle CO_3D est très petit ; il dépend de la force motrice qui anime la roue d'échappement, du moment d'inertie de la roue et de l'ancre, de l'angle de recul de la roue, de la vitesse angulaire du balancier et de l'ébat de cheville.

Enfin l'angle $DO_3F = \lambda_b - \sphericalangle BO_3C - \sphericalangle CO_3D$.

Proposons-nous de déterminer la durée des fonctions de l'échappement (dégagement et impulsion). Nous supposons que durant ces fonctions, la période du balancier n'est pas altérée et que le mouvement reste sinusoïdal. Cette hypothèse n'est pas réalisée dans la montre ; nous obtiendrons des résultats approximatifs qui indiqueront des ordres de grandeur. Dans ces conditions, nous pouvons négliger le petit angle CO_3D et nous obtenons :

$$\sphericalangle DO_3F = \lambda_b - \sphericalangle BO_3C.$$

Si $\lambda_b = 40^\circ$, nous avons :

$$\sphericalangle DO_3F = 34^\circ 6' 49'', 1.$$

L'impulsion avant le point mort vaut :

$$\sphericalangle DO_3A = 14^\circ 6' 49'', 1;$$

l'impulsion après le point mort :

$$\sphericalangle AO_3F = 20^\circ.$$

Pour passer de l'élongation 0 à l'élongation φ , le balancier met un temps t donné par la formule (125) du chapitre VII (p. 13) :

$$t = \sqrt{\frac{I}{C}} \arcsin \frac{\varphi}{\varphi_0}$$

ou

$$t = \frac{T}{2\pi} \arcsin \frac{\varphi}{\varphi_0}.$$

Dans le cas qui nous occupe, le balancier décrit l'angle $BO_3A = 20^\circ$ dans le temps :

$$t = \frac{0,4}{2\pi} \arcsin \frac{20^\circ}{270^\circ} = 0,00475 \text{ s.}$$

L'angle de levée BO_3F est parcouru en 0,00950 s.

Pour décrire l'angle DO_3A , le balancier met un temps :

$$t' = \frac{0,4}{2\pi} \text{ arc sin } \frac{14^\circ 6' 49'',1}{270^\circ} = 0,003 \text{ 33 s.}$$

La durée de l'impulsion est :

$$t + t' = 0,008 \text{ 08 s,}$$

celle du dégagement :

$$t - t' = 0,001 \text{ 42 s.}$$

En admettant que, pendant les fonctions de l'échappement, le mouvement du balancier reste harmonique, nous avons simplifié le problème. En réalité, comme nous le verrons plus tard, le phénomène est plus complexe. Les résultats obtenus pour les durées du dégagement et de l'impulsion suffisent à montrer combien ces fonctions se font rapidement, puisque toute la levée du balancier ne prend pas 0,01 s. On conçoit l'extrême importance d'avoir des mobiles (roue, ancre et balancier) bien libres (jeux et lubrification parfaits) et de moment d'inertie aussi faible que possible. Pendant la durée de 0,01 s, la roue change une fois de sens de rotation et au moins quatre fois de vitesse. Pour le plateau, il n'importe pas qu'il ait un faible moment d'inertie parce qu'il fait partie de l'organe réglant. Son mouvement pendant une alternance est un mouvement accéléré, puis retardé ; durant le dégagement et l'impulsion, la vitesse angulaire varie : elle diminue lors du choc de dégagement et augmente pendant l'impulsion.

Influence de l'échappement à ancre sur la période du balancier. — Ainsi que nous l'avons fait pour l'échappement à cylindre, nous examinons l'influence de l'échappement à ancre sur la période du balancier en déterminant la manière dont la vitesse angulaire du balancier est modifiée par les différentes fonctions de l'échappement. Reprenons la figure 328.

Au cours d'une alternance, un point du balancier parcourt l'arc E_1BAFE_2 ; pendant les parcours E_1B et FE_2 , les temps employés sont normaux. Pendant le dégagement BC , la période est augmentée (résistance avant le point mort) ; pendant la partie DA de l'impulsion avant le point mort, la vitesse angulaire du balancier est augmentée, la période est raccourcie ; l'impulsion après le point mort (parcours AF) provoque du retard, soit une augmentation de la période. Enfin le petit angle CO_3D est parcouru par le balancier sans aucun contact avec l'échappement : le balancier est sous l'influence du spiral, son mouvement est harmonique, mais pas identique à ce qu'il aurait été sans le dégagement ; toutefois, pendant ce trajet CD , il n'y a aucune perturbation due à l'échappement.

Dans la figure, nous avons laissé en clair les secteurs où la période n'est pas modifiée ; nous avons ponctué ceux où la période est diminuée (avance) et hachuré ceux où la période est augmentée (retard).

La grandeur de la perturbation dépend de trois facteurs : l'importance de la cause perturbatrice (résistance au dégagement, impulsion), sa durée d'action et la distance à partir de la position d'équilibre du balancier du point où elle agit.

Nous pouvons admettre que l'avance occasionnée par l'impulsion dans le secteur DO_3A est compensée par le retard, dû également à l'impulsion, dans le secteur AO_3G .

L'influence résultante se compose de deux retards : l'un provoqué par le dégagement (secteur BO_3C), l'autre, par l'impulsion après le point mort, pendant que le balancier décrit le secteur GO_3F . En résumé : *l'échappement à ancre provoque une augmentation de la période ou un retard de la montre.*

Mais une augmentation ou une diminution de la période n'est pas un mal en soi, car nous savons ramener la période à sa valeur normale, par exemple en modifiant la longueur du spiral.

Si la modification de la période est variable, alors la correction n'est plus aussi facile. Or, dans notre cas, la perturbation de la période est d'autant plus grande que la vitesse angulaire du balancier est plus faible, c'est-à-dire que l'amplitude des oscillations est plus petite.

L'échappement à ancre crée un défaut d'isochronisme qui se traduit par un retard aux petites amplitudes.

En particulier, puisque, dans la position verticale de la montre, l'amplitude du balancier diminue notablement, nous aurons, à cause de l'échappement, du *retard au pendu*.

Pour une même amplitude, l'influence de l'échappement peut différer d'une montre à l'autre suivant la plus ou moins grande difficulté du dégagement, c'est-à-dire aussi suivant la force du ressort moteur. Au cours de la journée, le ressort se détend et l'amplitude du balancier diminue. Le dégagement plus facile diminue l'effet de l'échappement sur la période, tandis que cet effet augmente avec la perte d'amplitude.

L'amplitude du balancier dans l'échappement à ancre. — Si, dans une montre munie d'un échappement à ancre, l'amplitude du balancier augmente, il peut se produire un choc de la cheville C contre le dos de la fourchette (fig. 329) : c'est le *rebattement*. A ce moment la fourchette est appuyée contre la butée G_1 , et la cheville est rejetée en arrière suivant la flèche 2, rejet qui amorce l'alternance suivante.

Nous verrons dans un prochain chapitre que la marche d'une montre qui « rebat » est considérablement modifiée.

Le rebattement doit être évité dans toute la mesure du possible : il est provoqué par une secousse qui accélère le mouvement du balancier, par un ressort trop fort ou trop tendu, par un défaut dans les engrenages, la chute, qui entraîne une augmentation momentanée de la force transmise. Nous ne pouvons pas éliminer la première de ces causes ; nous devons construire la montre de façon que les autres n'existent pas et que la première ne puisse que rarement produire le rebattement.

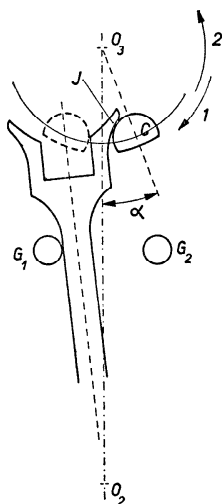


Fig. 329

Celui-ci se produit dès que l'amplitude du balancier est égale ou supérieure à $360^\circ - \alpha$, amplitude que nous appelons l'*amplitude-limite*. L'angle α dépend de la construction et des dimensions de la fourchette et de la cheville qui déterminent le point d'impact J .

Si l'*amplitude réelle* était à peu près égale à l'*amplitude-limite*, le rebattement pourrait se produire très souvent.

Nous verrons plus tard les raisons qui ont incité les horlogers à choisir comme amplitude réelle du balancier de la montre, dans la position horizontale, une amplitude d'environ 270° ou $1,5\pi$ rad. Cette amplitude varie constamment parce que le ressort moteur se détend et parce que la force motrice n'est pas transmise uniformément par les engrenages.

Dans les montres dites « automatiques » où le ressort est remonté par les secousses du poignet, la diminution de l'amplitude du balancier due à la détente du ressort n'est pas régulière puisque l'état de tension du ressort dépend des mouvements du porteur de la montre. Normalement, dans ces montres, le ressort ne se détend pas autant que dans les montres à remontage ordinaire, donc l'amplitude du balancier varie moins au cours d'une journée : les défauts d'isochronisme ont moins d'influence sur la marche de la montre.

Etude expérimentale de l'échappement à ancre. — Les fonctions de l'échappement à ancre se font en moins de $0,01$ s : il est impossible de voir fonctionner un échappement à cette vitesse. Pourtant il serait intéressant de se rendre compte de ce qui se passe réellement, car la théorie de ce mécanisme aux multiples fonctions ne peut pas tenir compte de tous les facteurs tels que le rebondissement ou les vibrations de certaines pièces après un choc, les jeux, les imperfections des organes.

Il est aujourd'hui possible d'étudier expérimentalement les mouvements rapides au moyen du cinématographe. Il faut naturellement

pouvoir prendre des vues se succédant à une très grande rapidité puisque le dégagement de la roue d'échappement, par exemple, se fait en 0,0014 s. Pour étudier ce phénomène au moyen de 20 vues successives, il faut un appareil capable de prendre 15 000 vues par seconde, ce qui n'est pas impossible aujourd'hui, puisqu'on est arrivé à la vitesse de 100 000 prises de vues à la seconde.

La méthode stroboscopique. — La méthode stroboscopique est aussi utilisée pour l'étude des mouvements rapides et périodiques tels que ceux de l'échappement.

Soit OA (fig. 330) un bras mobile autour de O et tournant dans le sens de la flèche 1 avec une vitesse angulaire constante; supposons, pour fixer les idées, que cette vitesse soit de 1 tour par seconde.

Si nous sommes dans une chambre obscure, nous n'apercevrons pas le bras mobile; si un éclair très bref illumine la chambre, nous verrons le bras en une position quelconque, par exemple en OA . Si l'éclair instantané se reproduit exactement toutes les secondes, nous verrons toujours le bras mobile en OA et nous aurons l'impression qu'il n'a pas bougé.

Augmentons l'intervalle entre deux éclairs consécutifs; au lieu d'être de 1 seconde, il est de

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ seconde. Si au moment de l'éclair que nous appelons l'éclair 0,

le bras est aperçu en OA , il sera en OA_1 lorsque se produira l'éclair 1, en OA_2 à l'éclair 2, et ainsi de suite. Le bras semblera tourner dans le sens de la flèche 1 avec une vitesse uniforme si la vitesse réelle de OA est constante et si les éclairs se suivent à intervalles réguliers. La vitesse apparente est plus petite que la vitesse réelle, puisque OA semble décrire un angle $AOA_1 = \delta^\circ$ en $\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ seconde, tandis qu'en réalité il décrit pendant le même temps un angle de :

$$360^\circ + \delta^\circ = 2\pi + \frac{\delta\pi}{180} \text{ rad.}$$

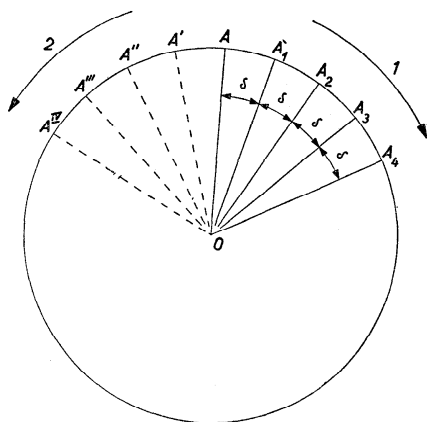


Fig. 330

La vitesse angulaire apparente est :

$$\frac{\delta}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{n \delta}{n + 1} \text{ degrés/s} = \frac{n}{n + 1} \frac{\delta \pi}{180} \text{ rad/s},$$

tandis que la vitesse angulaire réelle est :

$$\frac{360 + \delta}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{n(360 + \delta)}{n + 1} \text{ degrés/s}.$$

Mais δ est l'angle décrit par OA en $\frac{1}{n}$ seconde à la vitesse angulaire de 360° par seconde, donc :

$$\delta = \frac{360^\circ}{n}, \quad n\delta = 360^\circ = 2\pi \text{ rad}.$$

La vitesse angulaire apparente de OA est donc :

$$\frac{360}{n + 1} \text{ degrés/s}, \quad \frac{2\pi}{n + 1} \text{ rad/s}, \quad (289)$$

et la vitesse angulaire réelle :

$$360 \text{ degrés/s}, \quad 2\pi \text{ rad/s}.$$

Nous pouvons choisir n .

Si l'intervalle entre deux éclairs consécutifs est $\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ seconde, nous verrons le bras mobile successivement en OA , OA' , OA'' , OA''' , etc. ; le bras nous semblera tourner dans le sens de la flèche 2, bien qu'en réalité il se meuve en sens contraire.

L'action d'une certaine dent de la roue d'échappement sur une des palettes de l'ancre se répète toutes les 6 secondes, si la roue a 15 dents et si le balancier exécute 5 alternances à la seconde.

Si la roue est bien ronde et bien taillée, nous pouvons admettre qu'après chaque oscillation (ou après deux alternances) une dent de la roue a, par rapport à la même palette, la même position que la dent précédente. Nous pourrions étudier l'action d'une dent sur une certaine palette au moyen d'un stroboscope dont la période serait voisine de T (ou de 0,4 s dans la plupart des montres).

Dans les stroboscopes, une plaque mobile munie de fentes équidistantes laisse passer la lumière d'un faisceau lumineux. Si la plaque est animée d'un mouvement uniforme de rotation, le passage d'une fente produira un éclair d'autant plus bref que la fente est plus étroite et que

PIÈCE 11 $\frac{1}{4}$ POSITION VERTICALE

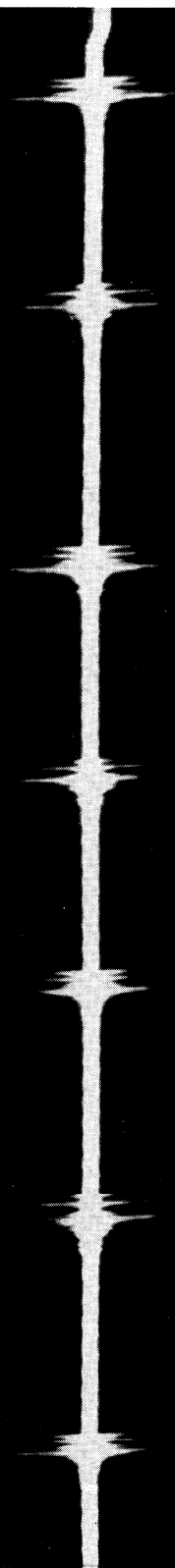


Fig. 331

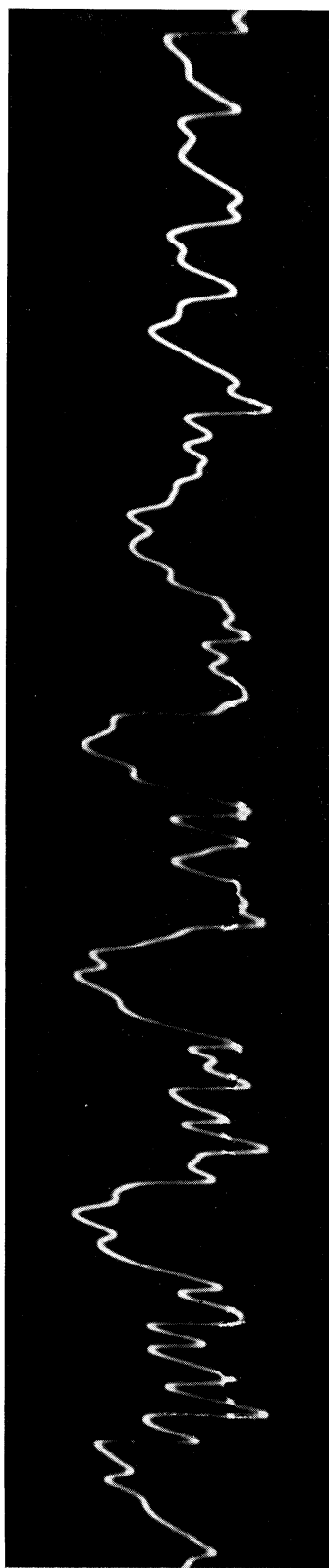


Fig. 333

la vitesse de rotation de la plaque est plus grande. En modifiant le nombre de fentes et la vitesse de rotation du disque, il est possible de régler l'intervalle entre deux éclairs, c'est-à-dire la vitesse angulaire apparente du mouvement observé.

Les bruits de la montre. — Le tic-tac d'une montre est constitué par les bruits résultant des chocs qui se produisent dans l'échappement au cours de son fonctionnement normal; ce n'est donc pas un bruit unique puisqu'il résulte des 5 chocs que nous avons mentionnés précédemment.

Les bruits partiels sont excessivement courts et très rapprochés les uns des autres; ils ne sont pas tous de même intensité.

L'analyse de ces bruits pourrait donner quelques renseignements sur leur intensité, leur pureté, leur succession; elle pourrait révéler des bruits insolites dus à des défauts qu'il conviendrait de rechercher et d'éliminer.

On étudie les bruits en leur faisant produire des effets qui leur sont proportionnels et en enregistrant les phénomènes provoqués.

Ainsi en captant les bruits sur un microphone, on provoque des variations de l'intensité d'un courant, plus ou moins grandes suivant l'intensité du bruit. On enregistre l'intensité du courant au moyen d'un *galvanomètre* (ou *oscillographe*) très sensible, dans lequel oscille une pièce portant un miroir qui réfléchit un rayon lumineux sur une bande sensible animée d'un mouvement uniforme. On peut ainsi obtenir des diagrammes du genre de celui qui est représenté par la figure 331 (pl. XI).

Pour que le miroir du galvanomètre suive les fluctuations du courant, il faut que la pièce mobile ait un très petit moment d'inertie, c'est-à-dire que sa période propre soit très petite.

On utilise maintenant plutôt l'*oscillographe à rayons cathodiques* qui n'a aucune pièce matérielle mobile, donc aucune inertie. Cet oscillographe se compose, en principe, d'abord d'un tube de Braun (fig. 332) contenant un émetteur d'électrons *g*; ceux-ci sont concentrés en un faisceau mince dirigé vers le fond du tube garni d'un écran fluorescent. Chaque fois qu'un électron atteint l'écran, un point lumineux que l'on peut photographier indique le point d'impact.

Avant d'atteindre le fond du tube, les électrons passent entre deux paires de plaques déflextrices parallèles; dans la première paire, les plaques sont horizontales, dans la seconde, elles sont verticales. Si les plaques ne sont pas électrisées, les électrons venant de *g* atteindront l'écran en suivant la trajectoire rectiligne dessinée en pointillé. Si les plaques horizontales reçoivent le courant amplifié d'un microphone, elles dévient les électrons vers le haut ou vers le bas: le point d'impact, c'est-à-dire le point lumineux sur l'écran, sera déplacé de la même façon. Si ce sont les

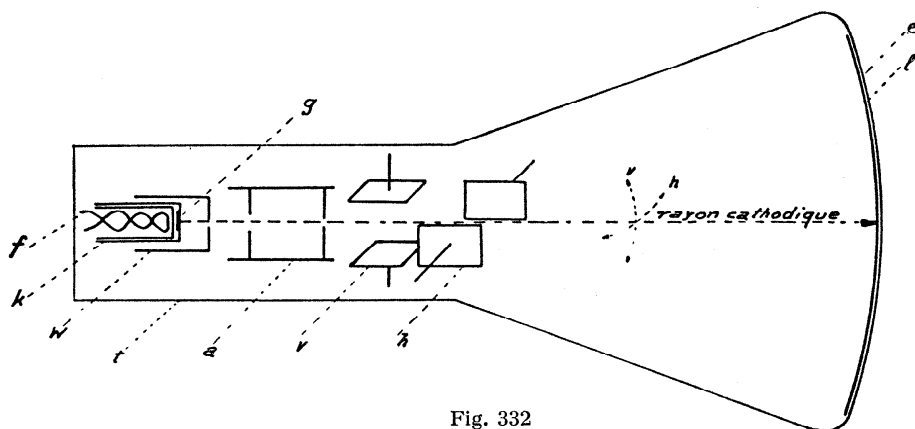


Fig. 332

plaques verticales qui sont chargées, le déplacement du point lumineux aura lieu vers la droite ou vers la gauche. On s'arrange de façon que l'un des déplacements possibles soit proportionnel au courant du microphone ou du bruit enregistré, tandis que l'autre est proportionnel au temps. On obtient un diagramme tel que celui de la figure 331 (pl. XI).

On enregistre le tic-tac de la montre dans les appareils à mesurer la marche instantanée des montres (voir chapitre VII, p. 58).

L'interprétation des diagrammes de l'oscillographe. — Les bruits produits dans une montre ne proviennent pas uniquement des chocs de l'échappement. Le frottement de la cheville de plateau contre l'entrée de la fourchette, d'une dent de la roue contre une face d'une palette pendant le dégagement ou pendant l'impulsion, le frottement des pivots contre les parois des coussinets, surtout si ces pivots sont rugueux ou à facettes, les vibrations de la roue, de l'ancre ou du spiral produisent des bruits imperceptibles à nos oreilles, mais qui peuvent être enregistrés par un microphone très sensible.

Pendant les fonctions de l'échappement, l'ancre est sollicitée de différentes manières; elle est poussée vers le balancier pendant l'impulsion et vers la roue pendant le dégagement; pendant l'arc supplémentaire, elle est poussée de côté. A cause du jeu, les pivots de la tige d'ancre se déplacent suivant les fonctions, engendrant ainsi des chocs et des sons très faibles, mais qui peuvent être décelés par un oscillographe.

Les pivots de l'arbre de la roue et ceux de l'arbre du balancier se déplacent aussi au cours de chaque alternance.

Les bruits sont des ondes fortement amorties qui se superposent; l'oscillographe enregistre l'onde résultante. Le diagramme est compliqué

et son interprétation, c'est-à-dire la séparation des différents bruits enregistrés, n'est pas facile.

En schématisant le résultat obtenu, on obtient une image telle que celle de la figure 333 (pl. XI) qui, dans les montres à ancre, se reproduit à chaque alternance.

Les figures réellement obtenues sont beaucoup plus compliquées ainsi que le montrent les diagrammes des figures 334, 335 (pl. XII) et 335 a (pl. XIII) enregistrés par M. Borer.

L'intensité des chocs, celle des bruits et l'amplitude des vibrations sont proportionnelles; si les maxima des ondes sont très prononcés, les chocs et, avec eux, les pertes d'énergie sont importants. Si les ondes sont marquées de façon qu'on reconnaisse facilement le schéma de la figure 333, c'est que les bruits secondaires occasionnés par les frottements et les vibrations sont faibles.

On peut calculer le temps qui s'écoule entre deux fonctions marquées par des maxima si l'on connaît la vitesse de déroulement du film.

Les bruits secondaires seront aussi enregistrés. S'ils se produisent pendant les fonctions de l'échappement, ils seront difficilement décelables; s'ils ont lieu pendant que le balancier décrit l'arc supplémentaire, c'est-à-dire pendant 95% de la durée d'une alternance, ils sont nettement séparés sur le diagramme et facilement accessibles à l'examen.

En modifiant certaines sécurités (jeux, chutes, repos), en créant certains défauts, par exemple des facettes sur les pivots, on arrivera peut-être à situer sur le diagramme l'effet de certains facteurs.

Moyens d'analyser le diagramme des bruits de la montre. — L'interprétation des diagrammes dont nous venons de parler n'est possible qu'à condition de savoir comment les fonctions de l'échappement s'accomplissent. Mais nous pouvons hésiter et nous demander si, à un certain moment, il y a rebondissement de l'un des organes ou si une fonction a lieu avant ou après une autre. Est-il vrai, comme on l'entend parfois dire, qu'au premier contact, celui de la cheville contre une paroi de l'entrée de la fourchette, la cheville rebondit? Ou bien est-ce que la chute de la dent contre la face de repos d'une palette précède le choc de la fourchette contre la butée?

L'étude mathématique de ces phénomènes fournit des indications utiles.

Nous allons donner un exemple en essayant de voir ce qui se passe après le choc qui marque le début du dégagement. La cheville aborde la fourchette avec la vitesse angulaire ω_1 ; la fourchette est au repos: sa vitesse angulaire ω_2 est nulle.

Pour calculer les vitesses angulaires ω'_1 et ω'_2 des deux mobiles immédiatement après le choc, utilisons les formules (242 g) et (242 h):

$$\omega'_1 = \omega_1 - \frac{1 + \varepsilon}{1 + \frac{I_1}{I_2} K^2} (\omega_1 + K\omega_2), \quad \omega'_2 = \omega_2 - \frac{1 + \varepsilon}{1 + \frac{I_2}{I_1} \frac{1}{K^2}} \left(\frac{1}{K} \omega_1 + \omega_2 \right).$$

Dans ces formules I_1 et I_2 désignent les moments d'inertie des deux corps, ε le coefficient d'élasticité, qui est égal à zéro pour les corps mous, à 1 pour les corps parfaitement élastiques, et K le rapport $\frac{\rho}{r}$ des distances du point d'impact aux centres de rotation. Les vitesses sont comptées positivement quand les corps vont à la rencontre l'un de l'autre.

Ces formules deviennent, *pour les corps mous* :

$$\omega'_1 = \omega_1 - \frac{1}{1 + \frac{I_1}{I_2} K^2} (\omega_1 + K\omega_2), \quad \omega'_2 = \omega_2 - \frac{1}{1 + \frac{I_2}{I_1} \frac{1}{K^2}} \left(\frac{1}{K} \omega_1 + \omega_2 \right),$$

pour les corps parfaitement élastiques :

$$\omega'_1 = \omega_1 - \frac{2}{1 + \frac{I_1}{I_2} K^2} (\omega_1 + K\omega_2), \quad (290)$$

$$\omega'_2 = \omega_2 - \frac{2}{1 + \frac{I_2}{I_1} \frac{1}{K^2}} \left(\frac{1}{K} \omega_1 + \omega_2 \right). \quad (291)$$

Supposons que la cheville de plateau et la fourchette soient des corps parfaitement élastiques : pour la question du rebondissement, c'est l'hypothèse la plus défavorable. Utilisons les formules (290) et (291) en désignant le moment d'inertie du balancier par I_b et celui de l'ancre par I_a . Nous avons, puisque $\omega_2 = 0$:

$$\omega'_1 = \omega_1 - \frac{2}{1 + \frac{I_b}{I_a} K^2} \omega_1, \quad (292)$$

$$\omega'_2 = - \frac{2}{1 + \frac{I_a}{I_b} \frac{1}{K^2}} \frac{1}{K} \omega_1. \quad (293)$$

Or, d'après la formule (124) du chapitre VII :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{C}{I_b}} \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2} = \frac{2\pi}{T} \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}.$$

Fig. 334

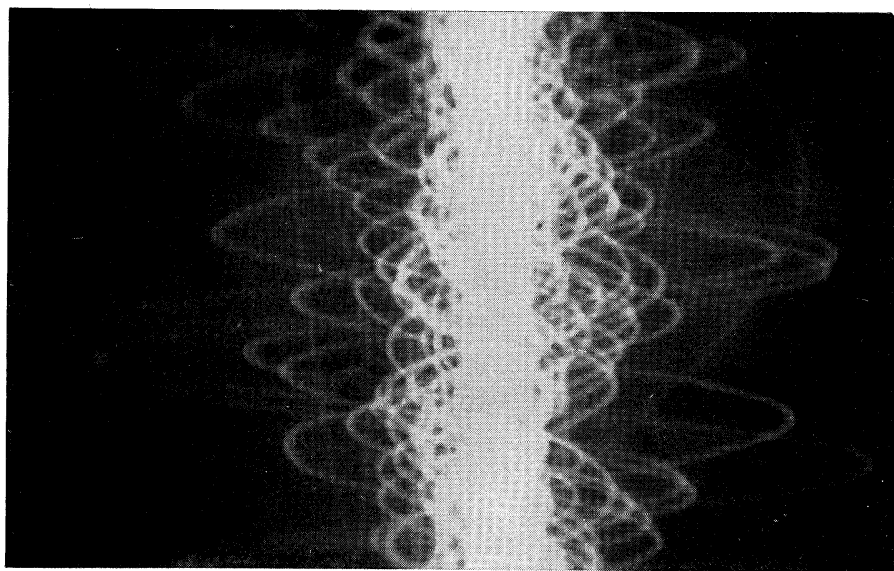
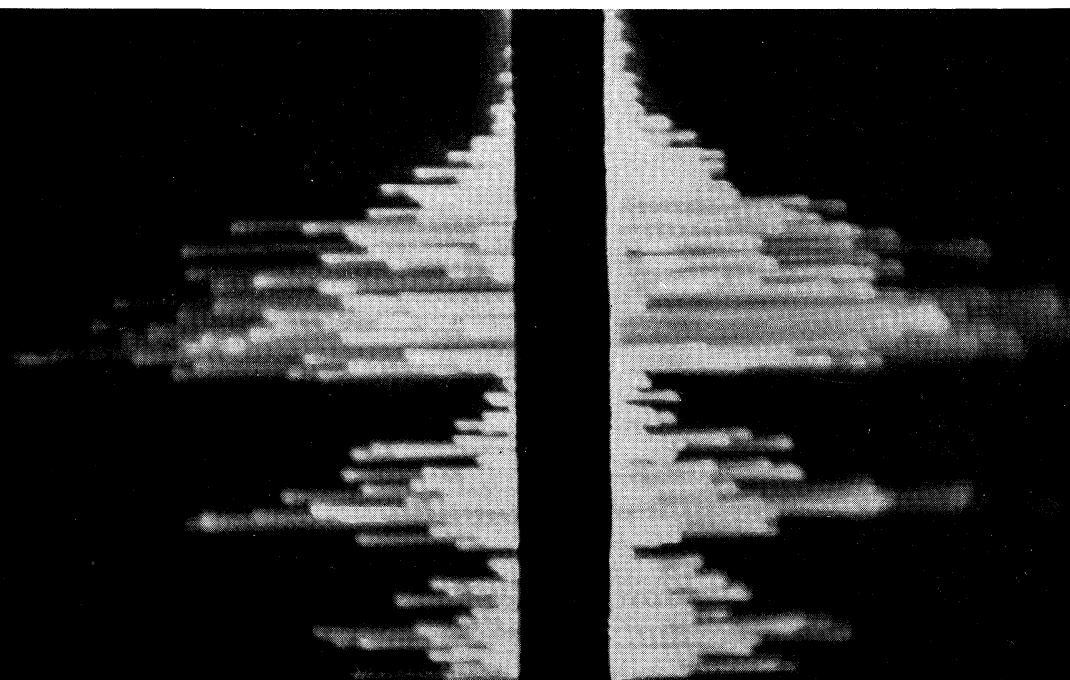


Fig. 335



Pl. XII

Rappelons que, dans cette formule, C désigne le moment élastique du spiral, φ_0 l'amplitude, φ l'élongation du balancier au moment du choc et T la période du balancier-spiral.

Les formules (292) et (293) deviennent :

$$\omega'_1 = \frac{2\pi}{T} \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2} \left[1 - \frac{2}{1 + \frac{I_b}{I_a} K^2} \right], \quad (294)$$

$$\omega'_2 = - \frac{2\pi}{T} \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2} \frac{2}{1 + \frac{I_a}{I_b} \frac{1}{K^2}} \frac{1}{K}. \quad (295)$$

La résistance de l'ancre au mouvement que tend à lui imprimer la cheville ne provient pas seulement de son moment d'inertie I_a , mais aussi de la pression de la dent contre la face de repos d'une des palettes.

Le moment de la force nécessaire pour dégager la roue est, d'après (274) :

$$M_d = M_1 \operatorname{tg} 30^\circ \frac{\operatorname{tg} \beta + f}{1 - f \operatorname{tg} \beta},$$

formule dans laquelle M_1 désigne le moment de la force motrice par rapport à l'axe de la roue d'échappement, β l'angle de tirage et f le coefficient de frottement (nous désignons ici ce coefficient par f pour ne pas créer de confusion avec l'élongation représentée par φ). Cette valeur de M_d est valable pour une ancre à repos équidistants.

La résistance au dégagement correspond à une augmentation du moment d'inertie de l'ancre qui, de I_a , devient I'_a :

$$I'_a > I_a.$$

Appelons F (fig. 336) la force qui tend à mouvoir la fourchette et qui provient de la cheville. Son moment par rapport au centre O_2 de l'ancre est $F\varrho_2$. La somme des moments agissant sur l'ancre est :

$$F\varrho_2 - M_d.$$

Ces moments impriment à l'ancre une accélération angulaire γ' :

$$\gamma' = \frac{F\varrho_2 - M_d}{I_a}. \quad (296)$$

Nous pourrions obtenir la même accélération en faisant abstraction de M_d et en modifiant le moment d'inertie :

$$\gamma' = \frac{F\varrho_2}{I'_a}. \quad (297)$$

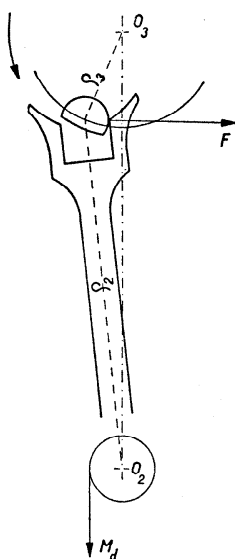


Fig. 336

Donc :

$$\frac{FQ_2}{I'_a} = \frac{FQ_2 - M_d}{I_a},$$

d'où :

$$I'_a = I_a \frac{FQ_2}{FQ_2 - M_d} = I_a \frac{1}{1 - \frac{M_d}{FQ_2}}. \quad (298)$$

La valeur de F est très difficile à déterminer. En effet, le choc de deux corps est un phénomène complexe que l'on considère comme formé de deux parties : dans la première, le corps percutant déforme le corps percuté ; dans la seconde, c'est le corps percuté qui, reprenant sa forme primitive, réagit contre l'autre corps. En déterminant la perte d'énergie cinétique ou la perte de la quantité de mouvement du premier corps, il est possible d'évaluer le travail absorbé ou l'impulsion ; mais, dans ces deux grandeurs, la durée du phénomène intervient ; or, cette durée est inconnue.

Nous pouvons admettre que FQ_2 est grand par rapport à M_d , de sorte que nous ne commettons pas d'erreur appréciable en posant, dans les calculs qui nous occupent :

$$I'_a = I_a.$$

Le choc fait-il rebondir la cheville de plateau ? — A première vue cela semble invraisemblable, car la cheville de plateau et le balancier ont un grand moment d'inertie et sont animés au moment du choc d'une vitesse angulaire considérable ; il n'est guère concevable que cette grande énergie cinétique puisse être absorbée par la fourchette dont le moment d'inertie est petit.

Calculons ω'_1 . Pour qu'il y ait rebondissement, il faudrait que ω'_1 soit de signe contraire à ω_1 . D'après (294) :

$$\omega'_1 = \frac{2\pi}{T} \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2} \left[1 - \frac{2}{1 + \frac{I_b}{I_a} K^2} \right].$$

La cheville sera rejetée en arrière si ω'_1 est négatif, c'est-à-dire si :

$$\frac{2}{1 + \frac{I_b}{I_a} K^2} > 1.$$

Cette inégalité ne peut subsister que si :

$$1 + \frac{I_b}{I_a} K^2 < 2 \quad \text{ou} \quad \frac{I_b}{I_a} K^2 < 1.$$

En réalité ce n'est jamais le cas, puisque la valeur de I_a vaut de $\frac{1}{50} I_b$ à $\frac{1}{100} I_b$, et que K est généralement compris entre 3 et 4. *Le choc ne fait pas rebondir la cheville.*

Y a-t-il rupture de contact entre la cheville et la fourchette après le choc? — Pour que cette rupture de contact ait lieu, il faut que la vitesse de la fourchette soit plus grande que celle de la cheville.

La vitesse de la fourchette est $\omega'_2 \varrho_2$; celle de la cheville est $\omega'_1 \varrho_3$. Il y a rupture de contact si :

$$\omega'_2 \varrho_2 > \omega'_1 \varrho_3.$$

D'après (294) et (295) :

$$\begin{aligned} \omega'_2 \varrho_2 &= - \frac{2\pi}{T} \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2} \frac{2}{1 + \frac{I_a}{I_b} \frac{1}{K^2}} \frac{1}{K} \varrho_2, \\ \omega'_1 \varrho_3 &= \frac{2\pi}{T} \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2} \left[1 - \frac{2}{1 + \frac{I_b}{I_a} K^2} \right] \varrho_3. \end{aligned}$$

Admettons les valeurs suivantes :

$$I_a = 0,0023 \text{ g-cm}^2, \quad I_b = 0,23 \text{ g-cm}^2, \quad \lambda_a = 10^\circ, \quad \lambda_b = 40^\circ,$$

$$K = \frac{\varrho_2}{\varrho_3} = \frac{\sin \frac{\lambda_b}{2}}{\sin \frac{\lambda_a}{2}} = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 5^\circ} = \frac{0,3420}{0,0872} \cong 4.$$

Posons :

$$\frac{2\pi}{T} \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2} = C' = \text{constante};$$

nous avons, en tenant compte du fait que $\frac{1}{K} \varrho_2 = \varrho_3$:

$$\begin{aligned} \omega'_2 \varrho_2 &= - C' \frac{3200}{1601} \varrho_3 = - C' \varrho_3 \frac{3200}{1601}, \\ \omega'_1 \varrho_3 &= C' \left[1 - \frac{2}{1601} \right] \varrho_3 = C' \varrho_3 \frac{1599}{1601}. \end{aligned}$$

Dans le cas envisagé, la vitesse de la fourchette après le choc est environ 2 fois plus grande que celle de la cheville : la fourchette est violemment projetée en avant et abandonne la cheville.

En réalité, la vitesse de la cheville est plus grande et celle de la fourchette plus petite que celles que nous venons de calculer, car nous avons supposé que le moment d'inertie de l'ancre était I_a , tandis qu'il est égal à I'_a , en raison de la résistance de la roue d'échappement.

Les mouvements de la cheville et de la fourchette après le choc. — Les deux mobiles, cheville et fourchette, se meuvent dans le même sens, la fourchette devant la cheville. Le mouvement de la fourchette et celui de la cheville peuvent être considérés comme des mouvements uniformément variés, c'est-à-dire d'accélération constantes pendant le court instant qui sépare le choc du moment où la cheville rattrape la fourchette.

Le mouvement de la fourchette est retardé, car aucune force n'agit sur l'ancre si ce n'est la pression de la dent de la roue qui s'oppose au dégagement ; le moment de cette pression est M_d . Le mouvement de la cheville est accéléré par la force du spiral dont le moment est $C\varphi$.

L'accélération (négative) de la fourchette est :

$$\gamma = -\frac{M_d}{I_a}.$$

Après le temps t , la vitesse angulaire ω''_2 de l'ancre est :

$$\omega''_2 = \omega'_2 + \gamma t = \omega'_2 - \frac{M_d}{I_a} t.$$

Pendant ce temps t , la fourchette décrit un angle α :

$$\alpha = \omega'_2 t - \frac{1}{2} \frac{M_d}{I_a} t^2. \quad (299)$$

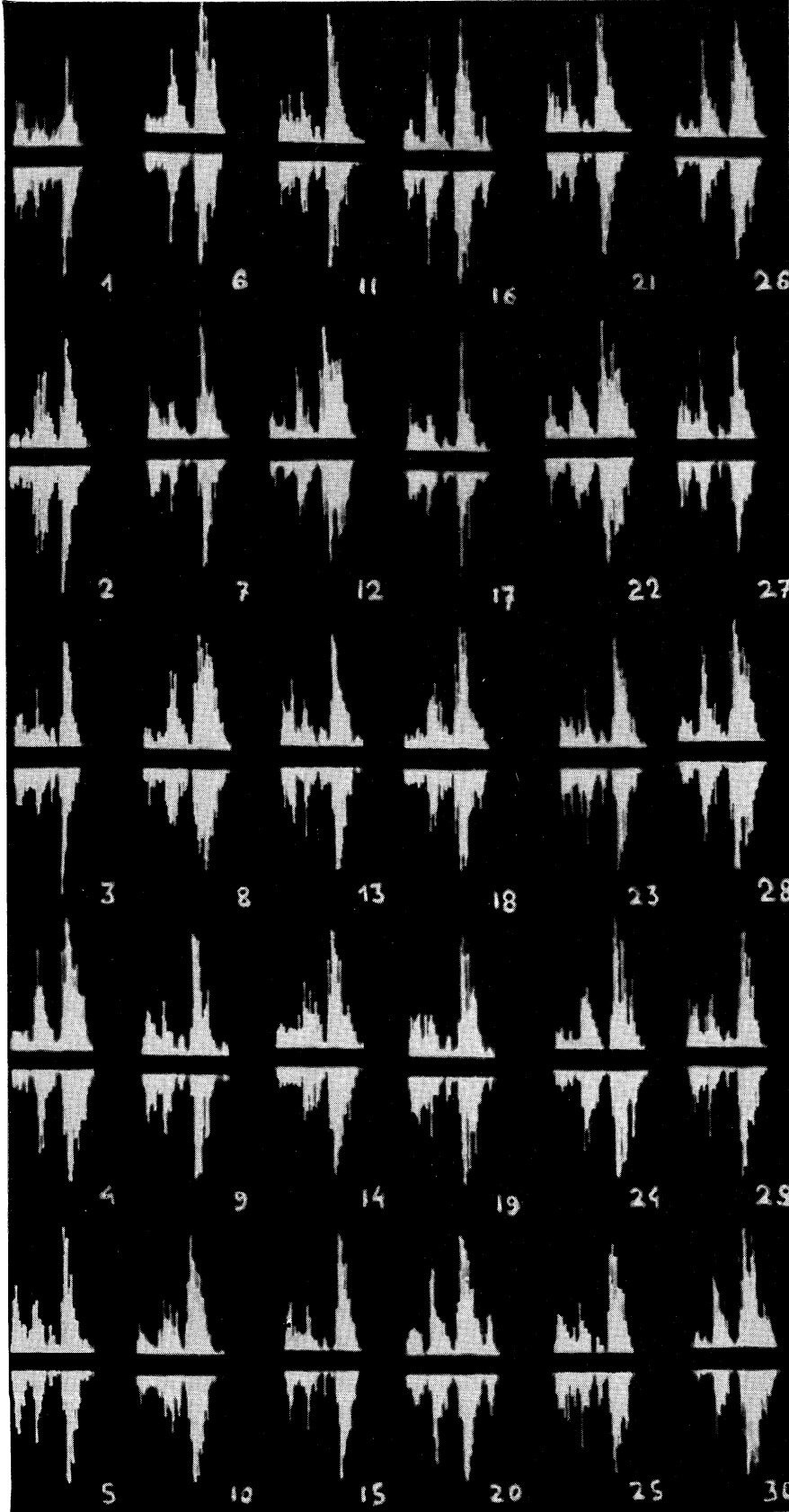
L'accélération de la cheville est égale à :

$$\frac{C\varphi}{I_b},$$

et l'angle β décrit par la cheville pendant le temps t a pour valeur :

$$\beta = \omega'_1 t + \frac{1}{2} \frac{C\varphi}{I_b} t^2. \quad (300)$$

Si t représente le temps qui s'écoule entre le choc et l'instant où la che-



PL. XIII

Fig. 335 a

ville rattrape la fourchette, le chemin parcouru par les deux mobiles dans le temps t est le même ; donc :

$$\alpha \varrho_2 = \beta \varrho_3. \quad (301)$$

Les équations (299), (300) et (301) permettent de calculer les trois inconnues α , β et t .

On trouve, après élimination de α et de β :

$$t = \frac{2(\varrho_2 \omega'_2 - \varrho_3 \omega'_1)}{\frac{C\varphi}{I_b} \varrho_3 + \frac{M_d}{I_a} \varrho_2}.$$

Le rapport $\frac{\varrho_2}{\varrho_3}$ est constant pour un cas donné :

$$\frac{\varrho_2}{\varrho_3} = \frac{\sin \frac{\lambda_b}{2}}{\sin \frac{\lambda_a}{2}} = K.$$

En introduisant K dans l'expression de t , on trouve :

$$t = \frac{2(K\omega'_2 - \omega'_1)}{\frac{C\varphi}{I_b} + K \frac{M_d}{I_a}}. \quad (302)$$

Cette valeur de t permet de calculer facilement α et β au moyen des équations (299) et (300).

Calculs pour un cas concret. — Proposons-nous de calculer les vitesses, les angles parcourus et le temps t qui sépare le premier choc du moment où la cheville rattrape la fourchette. Nous partons des données suivantes :

amplitude $\varphi = 270^\circ = 1,5\pi$ rad ,

élongation au moment du choc $\varphi = 20^\circ = \frac{\pi}{9}$ rad ,

$T = 0,4$ s , $I_b = 0,23$ g-cm² , $I_a = 0,0023$ g-cm² ,

$\lambda_a = 10^\circ$, $\lambda_b = 40^\circ$, $M_1 = 120$ dynes-cm ,

angle de tirage $\beta = 15^\circ$,

coefficient de frottement $f = 0,15$.

Au moment du premier choc, la vitesse angulaire de la cheville est :

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{0,4} \sqrt{\left(1,5\pi\right)^2 - \left(\frac{\pi}{9}\right)^2} = 73,819 \text{ rad/s},$$

celle de la fourchette est :

$$\omega_2 = 0.$$

Après le choc, la vitesse angulaire de la cheville est, d'après (290) :

$$\omega'_1 = 73,73 \text{ rad/s} ;$$

d'après (291), celle de la fourchette, est :

$$\omega'_2 = 36,887 \text{ rad/s}.$$

Le moment élastique du spiral est :

$$C = \frac{4\pi^2 I_b}{T^2} = 56,7502 \text{ dynes-cm/rad},$$

d'où :

$$C\varphi = 19,8096 \text{ dynes-cm},$$

$$\frac{C\varphi}{I_b} = 86,1286 \text{ rad/s}^2.$$

Pour calculer l'accélération angulaire de la fourchette, il faut d'abord déterminer M_d d'après la formule (274) :

$$M_d = M_1 \operatorname{tg} 30^\circ \frac{\operatorname{tg} \beta + f}{1 - f \operatorname{tg} \beta} = 30,169 \text{ dynes-cm},$$

d'où :

$$\frac{M_d}{I_a} = 13\,117 \text{ rad/s}^2.$$

Enfin la formule (302) donne

$$t = 0,0028 \text{ s},$$

si nous admettons $K = 4$.

Le temps t est plus grand que la durée totale des fonctions de l'échappement. *La cheville ne rattrape pas la fourchette.*

Avant que la rencontre des deux mobiles ait lieu, le dégagement est déjà effectué et c'est au contraire la deuxième paroi de la fourchette qui atteindra la cheville pour lui donner l'impulsion nécessaire à l'entretien du mouvement du balancier.

Durée réelle du dégagement. — Il est possible de calculer la durée du dégagement qui se fait d'après le mouvement imprimé à l'ancre par le choc de la cheville de plateau. Il suffit de calculer t d'après la formule

(299) dans laquelle α est égal à l'angle de repos (engagement virtuel plus chemin perdu), c'est-à-dire à l'angle de dégagement.

Admettons $\alpha = 1^{\circ}30' = \frac{\pi}{120}$ rad. La durée t_1 du dégagement peut être déduite de l'équation :

$$\frac{\pi}{120} = 36,887 t_1 - \frac{1}{2} 13\,117 t_1^2,$$

dont les solutions sont :

$$t_1 = 0,000\,83\text{ s}, \quad t_1' = 0,0054\text{ s}.$$

De ces deux solutions, seule la première nous intéresse. Le mouvement de la fourchette sous l'influence du choc de la cheville et du moment résistant M_a provenant de la roue d'échappement est un mouvement en avant fortement amorti. Au bout d'un certain temps le mouvement en avant cesse ; la fourchette s'arrête, puis revient en arrière sous l'influence du moment M_a (qui, à ce moment, deviendra le moment M_a de la formule (276)). Ainsi la durée réelle du dégagement est :

$$t_1 = 0,000\,83\text{ s},$$

c'est-à-dire presque 2 fois moins que la valeur trouvée en supposant que le mouvement du balancier n'est pas modifié par les fonctions de l'échappement et que la cheville conduit gentiment la fourchette.

Lors de la projection violente de la fourchette, il y a danger d'un contact intempestif de la corne de la fourchette et de la cheville ; ce contact n'est pas inévitable, puisque le mouvement de la cheville est accéléré, tandis que celui de la fourchette est amorti. Cependant la possibilité d'un tel contact fait comprendre la grande importance de l'ébat de cornes.

Confirmation expérimentale des résultats de l'analyse mathématique. —

L'analyse mathématique des fonctions de l'échappement aidera certainement à déchiffrer le diagramme des bruits de la montre. Il faut cependant retenir que cette analyse ne peut se faire qu'en simplifiant le problème. Nous avons négligé les frottements des pivots, les changements de la position relative des organes provoqués par les jeux, les défauts d'exécution des pièces, etc. Les résultats obtenus ne sont donc pas valables dans tous les cas, mais uniquement pour les données envisagées.

Les chercheurs doivent essayer de trouver un moyen expérimental de contrôler les résultats de l'étude mathématique. Un de ces moyens pourrait être le stroboscope qui permet de ralentir à peu près à volonté les mouvements des organes de l'échappement.

Nous n'avons qu'effleuré le problème ; l'étude mathématique complète sort du cadre de cet ouvrage.

Les défauts de l'échappement à ancre. — Il n'est pas surprenant que, dans un mécanisme aussi délicat et dont les fonctions sont si multiples, on rencontre de nombreux défauts dus à des vices de construction ou à des imperfections dans l'exécution. Ce n'est pas ici le lieu de les envisager tous : on les trouve décrits dans les traités d'échappements s'adressant particulièrement aux praticiens ; ces traités indiquent aussi les moyens de corriger ou d'atténuer ces défauts.

A titre d'exemple, nous citerons cependant un défaut pour montrer le moyen de le corriger sans en créer un autre.

L'échappement est trop faible quand l'angle d'engagement virtuel est trop petit, parce que la distance des centres de la roue et de l'ancre est trop grande par rapport aux dimensions des deux mobiles, ou que les palettes de l'ancre sont trop courtes.

On peut corriger ce défaut en sortant une des palettes. On a vu en effet qu'en augmentant le repos sur une palette, on l'augmente automatiquement sur l'autre si l'on conserve le même chemin perdu.

Mais quelle palette convient-il de sortir ? En sortant une palette, on modifie l'angle de tirage ; en augmentant l'angle d'engagement, on accroît l'angle de tirage sur la palette d'entrée et on le diminue sur la palette de sortie. Si l'angle de tirage est déjà très grand sur la palette d'entrée, il vaut mieux sortir la palette de sortie ; s'il est petit sur la palette de sortie, il est préférable de sortir la palette d'entrée.

Il faut aussi tenir compte des angles de chutes. Si la chute intérieure est plus grande que l'extérieure, il vaut mieux sortir la palette de sortie.

En déplaçant une palette, on modifie non seulement l'angle d'engagement, mais aussi les angles de tirage, de chute, de chemin perdu.

Il est parfois utile de donner à l'une des palettes une autre inclinaison, ce qui est possible parce qu'elle a généralement un peu de jeu dans son ajustement dans le corps de l'ancre ; on peut ainsi égaliser les chutes, mais on modifie en même temps l'angle de tirage. Le choix de la palette dont on veut modifier l'inclinaison doit être guidé par l'examen des répercussions de cette modification sur le tirage et sur les chutes.

La mise d'échappement. — En plaçant le spiral sur le balancier, la virole doit être orientée de façon que le spiral soit complètement détendu lorsque le centre de la cheville de plateau est sur la ligne O_2O_3 reliant les centres de l'ancre et du balancier. La montre est alors « d'échappement » ou « l'échappement est au repère ». S'il ne l'est pas, il faut tourner la virole jusqu'à ce que la cheville soit dans l'entrée de la fourchette dont

la baguette est à égale distance des butées ; la cheville ne doit pas avoir tendance à se rapprocher d'une des butées.

Si l'échappement n'est pas au repère, la position d'équilibre du balancier est déplacée par rapport aux fonctions de l'échappement. La répartition des angles de dégagement et d'impulsion est modifiée. Nous pouvons avoir, par exemple, une répartition des angles comme celle qui est représentée dans la figure 337 ; nous avons envisagé un cas extrême afin de mieux marquer l'effet sur la durée d'alternance du balancier-spiral.

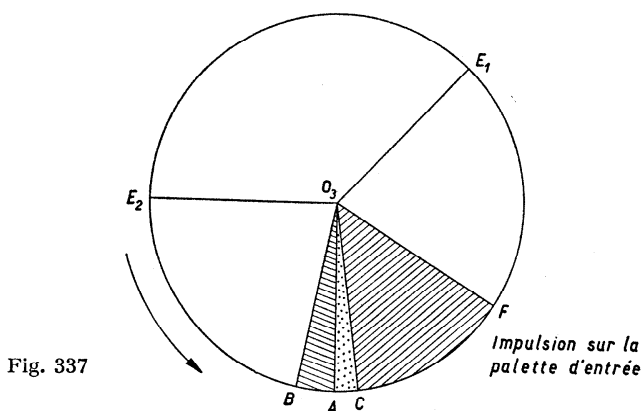


Fig. 337

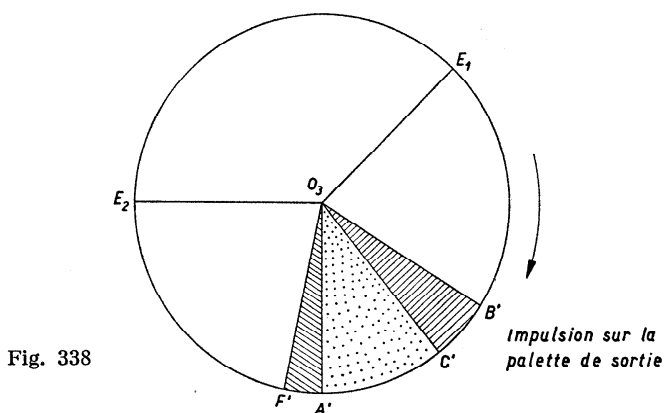
Nous supposons que la position d'équilibre est atteinte pendant le dégagement ; BO_3C est l'angle de dégagement sur la palette d'entrée : il représente le secteur pendant lequel le contact entre la cheville et la fourchette est rompu, mais la période est modifiée parce que la vitesse de la cheville a été subitement réduite. L'impulsion commence en C et dure jusqu'à ce que le balancier ait décrit l'angle CO_3F . Il y a augmentation de la période dans les secteurs hachurés BO_3A et CO_3F , diminution dans le secteur pointillé AO_3C .

L'influence sur la période n'est pas la même pour les deux palettes ; la figure 338 montre que dans l'alternance qui suit celle dont nous avons parlé, les angles de dégagement et d'impulsion ne sont pas répartis comme précédemment.

Il suffit de comparer les figures 337 et 338 pour se rendre compte que deux alternances consécutives n'ont pas la même durée. L'effet d'une fonction, comme le dégagement par exemple, est différent d'une alternance à l'autre ; dans l'une il se fait plus près de la position d'équilibre du spiral que dans l'autre ; son influence sur la durée de l'alternance est plus grande si le dégagement se fait plus loin de la position d'équilibre.

Les arrêts sur l'impulsion ou sur le repos ne seront pas les mêmes sur les deux palettes ; dans le cas des figures 337 et 338, l'arrêt sur l'impulsion se produira très probablement sur la palette d'entrée et n'aura pas lieu sur la palette de sortie.

Le dégagement se fait, sur les deux palettes, à des vitesses différentes. Lorsque le dégagement a lieu à plus vive allure, l'angle de recul dynamique de la roue d'ancre est augmenté ainsi que l'angle parcouru par la roue pour atteindre le plan d'impulsion d'une palette. Dans le cas que nous avons exposé, la perte d'impulsion est plus grande sur la palette d'entrée que sur la palette de sortie.



Les machines à déterminer la marche instantanée des montres donnent des diagrammes tels que ceux des figures 220 a, b c et d (p. 59), constitués souvent par deux lignes parallèles. L'une est l'enregistrement d'un bruit sur la palette d'entrée, l'autre d'un bruit sur la palette de sortie ; les deux lignes devraient coïncider si l'échappement était au repère et si, sur les deux palettes, le même bruit était enregistré, par exemple, celui qui résulte du choc de la baguette de la fourchette contre la butée. L'horloger dispose ainsi d'un moyen de vérifier la mise d'échappement.

Cependant il faut être prudent avant d'émettre un jugement, car la séparation des deux lignes peut provenir de l'enregistrement d'un bruit sur une palette et d'un autre bruit sur l'autre palette. Dans ce cas, l'amplification des bruits peut jouer un certain rôle.

CHAPITRE XII

L'ÉCHAPPEMENT A DÉTENTE

Analogies et différences fondamentales avec l'échappement à ancre. — L'échappement à détente inventé au XVIII^e siècle par Pierre Le Roy est contemporain de l'échappement à ancre ; c'est un échappement libre puisqu'il laisse au balancier une liberté entière pour parcourir les arcs supplémentaires aux fonctions de l'échappement.

Pour obtenir cette liberté du balancier, il faut arrêter la roue d'échappement par une pièce indépendante du balancier.

Comme l'échappement à ancre, l'échappement à détente se compose de trois organes dont deux sont nécessairement la roue et une pièce solidaire du balancier destinée à recevoir l'impulsion. Le troisième organe est chargé d'arrêter la roue ; dans l'échappement à détente, il n'a que cette fonction, tandis que, dans l'échappement à ancre, il doit, de plus, transmettre l'énergie motrice de la roue à l'organe régulateur.

Dans l'échappement à ancre, le balancier reçoit une impulsion à chaque alternance ; dans l'échappement à détente, il n'y a qu'une impulsion à chaque oscillation composée d'une alternance « muette » et d'une alternance « active ». L'échappement à détente est un échappement « à coup perdu ».

Les organes de l'échappement à détente. — Les trois organes de cet échappement sont : la *roue d'échappement*, le *plateau avec la palette d'impulsion* (solidaire du balancier) et la *détente*, chargée d'arrêter la roue et commandée par la *palette de dégagement* portée par un *plateau* chassé sur l'arbre du balancier.

Les formes de ces organes sont aujourd'hui fixées. Pour la roue et pour les palettes, il n'y a guère de différence d'une pièce à l'autre. Par contre, la détente n'a pas toujours la même forme et l'on utilise aujourd'hui les formes suivantes : la *détente longue bascule*, la *détente courte bascule* et la *détente ressort*. Dans les deux premières constructions, la

détente est pivotée ; elle est constamment rappelée vers une position, dite position de repos, par un petit ressort spiral dont une extrémité est attachée à une virole fixée sur l'arbre de la détente, tandis que l'autre extrémité est fixe ; ce petit ressort agit comme le spiral qui tend à ramener le balancier dans sa position d'équilibre. Dans les détentes à ressort, un ressort droit sollicite la détente vers la position de repos.

La roue d'échappement est en laiton durci, en alliage d'or ou en maillechort ; les plateaux d'impulsion et de dégagement sont en acier trempé, tandis que les palettes d'impulsion et de dégagement sont en rubis ou en saphir. Les palettes sont légèrement graissées.

Les dents de la roue d'échappement n'ont qu'une face active, le plan AB (fig. 339), qui est le plan de repos et contient la surface d'impulsion ; celle-ci

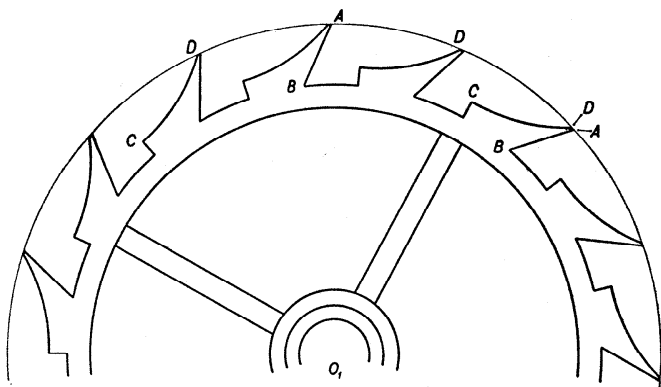


Fig. 339

se réduit à peu près à la pointe de la dent représentée en A. Un petit plat AD donne plus de solidité à la pointe de la dent. Le dos DC est formé de façon à éviter tout contact entre cette surface et le bord du grand plateau. La roue doit avoir un moment d'inertie faible, tout en restant assez solide pour donner des impulsions à la cadence de 216 000 par jour pour une montre dont le nombre d'alternances à l'heure est de 18 000.

L'échappement à détente est utilisé dans des montres très soignées et particulièrement dans les chronomètres de marine ; dans ces pièces le balancier a un grand moment d'inertie et doit exécuter des oscillations de grande amplitude ; pour entretenir ce mouvement, il faut une énergie assez importante, transmise au balancier par les dents de la roue d'échappement. La solidité des dents de la roue est donc une qualité fondamentale.

La palette de dégagement rencontre dans sa course l'extrémité d'un

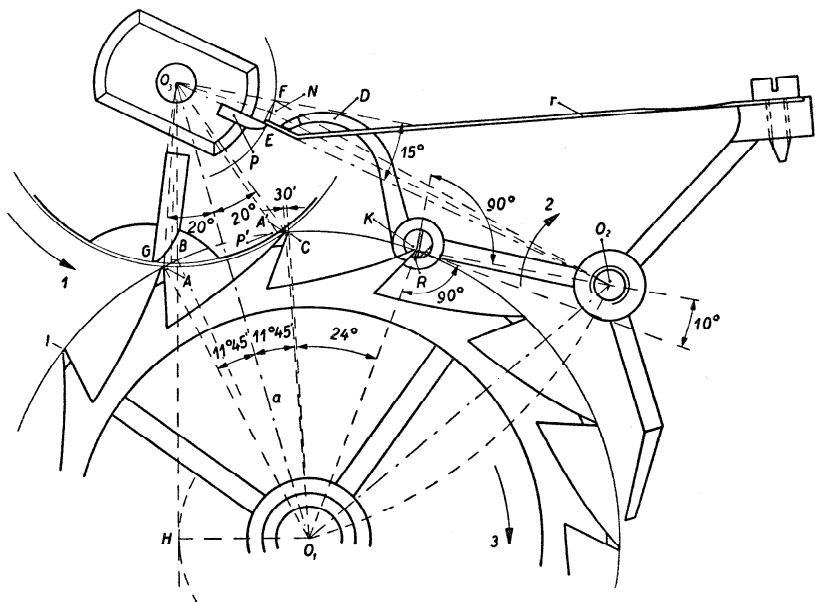


Fig. 340

ressort en or. Quand la palette se meut dans un certain sens, le ressort cède; il ne se produit qu'une légère perturbation du mouvement et de la période du balancier; cette perturbation est d'autant plus petite que le ressort en or cède plus facilement. Quand la palette se meut dans le sens opposé, le ressort en or ne cède pas et toute la détente est entraînée; la pièce d'arrêt, solidaire de la détente, s'écarte de la roue qui est libérée et peut donner l'impulsion au balancier.

Fonctionnement de l'échappement à détente. — Pendant que le balancier décrit l'arc supplémentaire dans la période descendante de l'alternance, la roue est arrêtée, parce que la dent K (fig. 340) est appuyée

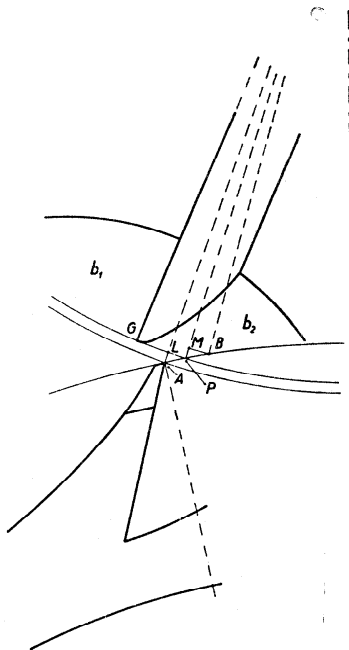


Fig. 340 a

contre le repos R , butée en rubis portée par la détente à longue ou à courte bascule ou bien à ressort. La détente est maintenue dans cette position soit par un ressort spiral, soit par le ressort qui constitue la détente. Le balancier se meut dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

La palette d'impulsion G solidaire du balancier passe devant la dent A sans la toucher. A peine engagée dans l'espace situé entre les dents A et C , la palette de dégagement p rencontre l'extrémité E du ressort en or r , appuyée contre une partie surélevée du bras D de la détente. Celle-ci est mobile autour du point O_2 qui est son centre de pivotement dans les échappements à détente bascule ou autour du point de flexion du ressort dans la détente à ressort. La palette p entraîne D dans le sens de la flèche 2, et ce déplacement libère la roue d'échappement qui commence à tourner dans le sens de la flèche 3. En ce moment, la palette G se trouve devant la dent A qui tombe sur G et donne l'impulsion au balancier. Entre temps, la palette p a abandonné le ressort en or r et la détente a été ramenée par son propre ressort ou par le ressort spiral dans sa position normale, et dès que la dent C rencontre le repos R , la roue est immobilisée. Le balancier continue à tourner dans le sens de la flèche 1 jusqu'à ce que son mouvement soit arrêté par la résistance croissante du spiral.

Au retour, la palette p rencontre de nouveau l'extrémité E du ressort en or r , mais celui-ci cède et le balancier peut poursuivre sa course sans aucune entrave, puisque la palette G passera entre les dents A et I sans les toucher. A part la très faible résistance du ressort r au passage de la palette p , rien ne dérange le mouvement du balancier.

La liberté du balancier est plus grande dans l'échappement à détente que dans l'échappement à ancre.

Tracé de l'échappement à détente. — Proposons-nous de dessiner un échappement à détente courte bascule. Nous expliquerons plus loin les considérations qui déterminent la position du centre de la bascule, l'orientation du plan de repos, la position relative des palettes, la meilleure orientation du ressort de dégagement.

Traçons une droite sur laquelle nous marquons deux points O_1 et O_3 tels que $O_1O_3 = a$, O_1 étant la projection de l'axe de la roue et O_3 celle de l'axe du balancier (fig. 340).

De chaque côté de O_1O_3 , construisons des angles de $11^\circ 45'$ soit la moitié de la différence entre le pas angulaire de la roue et l'épaisseur e du bout de la dent :

$$p_a = \frac{360^\circ}{15} = 24^\circ, \quad e = 30', \quad \frac{24^\circ - 0^\circ 30'}{2} = 11^\circ 45'.$$

De chaque côté de O_3O_1 et à partir de O_3 portons des angles de 20° égaux à la moitié de l'angle de levée du balancier. Nous déterminons ainsi les points A et A' sur les côtés des angles de $11^\circ 45'$. Traçons le cercle (O_1, O_1A) , trajectoire des pointes des dents de la roue.

Faisons, sur O_3A , $AL = 0,05$ mm (fig. 340a); c'est le jeu compris entre la trajectoire de la palette d'impulsion et les dents de la roue, puis traçons la trajectoire (O_3, O_3L) de l'extrémité de la palette d'impulsion. Cette trajectoire coupe celle des dents de la roue en P et P' .

Admettons que la pointe d'une dent doit empiéter de 0,05 mm sur la face de la palette à l'instant où commence l'impulsion. Dessinons $MP = 0,05$ mm (fig. 340a) et décrivons la circonférence (O_3, O_3M) qui coupe la trajectoire des pointes des dents en B .

Menons O_1H perpendiculaire à O_3B prolongé. L'angle d'impulsion est égal à BO_3P' ; l'angle d'inclinaison de la face d'une dent est O_1BH .

Le point de repos K (fig. 340) est à $36^\circ 15'$ de O_3O_1 . En K , menons une perpendiculaire au rayon O_1K et portons un angle de 10° en dehors de la tangente au point K ; traçons un arc de cercle (O_3, O_3O_1) qui coupe la ligne des 10° en un point O_2 , projection de l'axe de la détente.

Le profil rectiligne de la palette de repos est sur une droite passant par K et perpendiculaire à KO_2 . La longueur $KR = 0,10$ mm indique la pénétration du repos dans le cercle de la roue.

Pendant le dégagement, le ressort en or doit parcourir un angle double de l'angle de repos afin que la roue soit certainement dégagée. Donc à partir de O_3O_2 et avec O_2 comme sommet, traçons un angle double de l'angle de repos. Nous admettons, en outre, que l'angle de dégagement du balancier vaut 15° . Cet angle peut varier de 15 à 20° :

$$\sphericalangle O_3O_2F = 2(\sphericalangle KO_2R), \quad \sphericalangle O_2O_3F = 15^\circ.$$

Par F , traçons la trajectoire de l'extrémité de la palette de dégagement. Dessinons un arc de cercle (O_2, O_2F) jusqu'à son intersection avec la ligne O_3O_2 . Nous obtenons la pénétration du ressort en or sur la palette de dégagement. Cette pénétration vaut dans notre cas 0,06 mm. La position relative des deux palettes doit être telle que la palette d'impulsion soit en B à la fin du dégagement. A ce moment, la palette de dégagement se trouve au point N . Il suffit de reporter un angle BO_3G égal à l'angle EO_3N . Nous obtenons ainsi la position de la palette d'impulsion, au moment où la palette de dégagement va entrer en fonction.

Les choes et les chutes. — Pendant l'alternance active, le balancier se meut suivant la flèche 1. La palette p rencontre l'extrémité E du ressort en or r : c'est le premier choc. Après la libération de la roue, la dent A

tombe sur la palette G : c'est le second choc, par lequel débute l'impulsion. A peine le dégagement terminé, la détente est ramenée dans sa position normale, d'où un troisième choc contre une pièce fixe de la montre, qui limite la course de la détente. Après l'impulsion, la dent C tombe sur le repos R , d'où un quatrième choc.

Pendant l'alternance muette, il ne se produit que le choc de la palette p de dégagement contre l'extrémité E du ressort en or r .

Les chocs altèrent la période sauf les troisième et quatrième qui se passent en dehors du balancier. Ils sont parfois précédés d'une chute, c'est-à-dire d'un angle parcouru « à vide » par la roue d'échappement. Il y a une chute avant que commence l'impulsion, donc avant le second choc : c'est la *chute d'entrée*. Une seconde chute, la *chute de sortie*, se produit avant que la dent C atteigne le repos R . Les chutes doivent être réduites autant que possible car elles représentent des pertes d'énergie.

Angle de levée du balancier et dimensions de la roue et du grand plateau. — Les angles d'impulsion du balancier et de la roue sont deux angles théoriques utilisés pour le calcul de certaines dimensions. Ces angles sont décrits pendant l'impulsion d'une dent de la roue d'échappement sur la palette G , à la condition qu'il n'y ait ni chute ni sécurité.

L'angle d'impulsion théorique du balancier (ou angle de levée) est souvent de 40° ; celui de la roue est de 24° si la roue a 15 dents. D'après ces angles, on peut calculer les rayons de la roue et du plateau d'impulsion à partir de la distance a des centres de la roue et du balancier (fig. 341).

Pour renforcer la partie active des dents de la roue d'échappement, on termine celles-ci par un petit plat AD (fig. 339) qui occupe un espace angulaire de $30'$.

Soit O_1O_2A un triangle ayant un côté égal à a et dont les angles en O_1 et O_3 sont $\frac{p_a - 30'}{2}$ et $\frac{1}{2} \lambda_b$, p_a désignant le pas angulaire de la roue. Pour une roue de 15 dents,

$$p_a = \frac{360^\circ}{15} = 24^\circ.$$

Le troisième sommet A du triangle détermine le rayon R_1 de la roue et le rayon théorique R_3 de la grande palette.

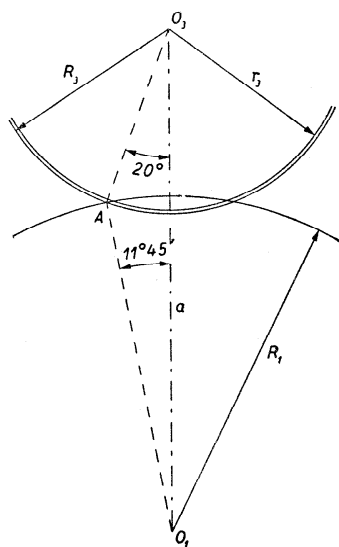


Fig. 341

Si l'on adoptait cette valeur de R_3 , l'extrémité de la palette risquerait, à cause des jeux nécessaires des pivots, de frôler la pointe des dents ou même de buter contre celle-ci. Le rayon théorique doit être diminué d'une quantité supérieure à deux ébats de pivots. Pour un jeu de 1,25 mm il faut réduire R_3 d'au moins 2,5 mm.

Le plateau d'impulsion ou grand plateau joue encore un autre rôle que celui de support de la palette P . Si un choc écarte le repos R (fig. 340), la roue d'échappement est libérée et se met à tourner. Elle ne pourra tourner que d'un petit angle, car la pointe de la dent A rencontre bientôt le bord du grand plateau. Ce bord ne doit donc pas être très éloigné; dans les conditions normales son rayon doit être égal à $R_3 - 0,05$ mm.

Les formules suivantes permettent de calculer les différentes dimensions. Soit r_3 le rayon réel de la palette et r'_3 le rayon réel du grand plateau, λ_b et λ_r les angles de levée du balancier et de la roue. On a :

$$R_1 = a \frac{\sin \frac{1}{2} \lambda_b}{\sin \frac{1}{2} (\lambda_b + \lambda_r - 30')} \quad (303)$$

ou, pour les valeurs admises plus haut :

$$R_1 = a \frac{\sin 20^\circ}{\sin 31^\circ 45'}.$$

On a aussi :

$$R_3 = a \frac{\sin \frac{1}{2} (\lambda_r - 30')}{\sin \frac{1}{2} (\lambda_b + \lambda_r - 30')}, \quad (304)$$

soit

$$R_3 = a \frac{\sin 11^\circ 45'}{\sin 31^\circ 45'}.$$

Si j désigne le jeu normal d'un pivot dans son coussinet :

$$r_3 = R_3 - 2j \quad (305)$$

et

$$r'_3 = R_3 - 4j. \quad (306)$$

La chute d'entrée. — Pour la sécurité du fonctionnement, il faut qu'à la fin du dégagement, la palette P se trouve en avant de la pointe A de la dent (fig. 342).

Nous admettons que le point de rencontre de la dent et de la palette se trouve en B à l'intersection de la circonférence décrite par la pointe des dents et de celle du grand plateau dont le rayon est r'_3 . L'angle de chute est $\angle AO_1B$; nous pouvons le calculer d'après le triangle BO_1O_3 dont nous connaissons les trois côtés.

Si p désigne le demi-périmètre du triangle, nous avons :

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2} \angle BO_1O_3 &= \sqrt{\frac{(p-a)(p-R_1)}{aR_1}} \quad (307) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(R_1+r'_3-a)(r'_3+a-R_1)}{aR_1}}. \end{aligned}$$

L'angle γ de chute est égal à :

$$\gamma = \angle AO_1O_3 - \angle BO_1O_3.$$

La fin du dégagement est déterminée par la position de la palette de dégagement p , donc la chute d'entrée dépend de la position relative des deux palettes.

La chute d'entrée que nous venons de déterminer est celle que nous

aurions eue en conduisant lentement le balancier ; nous l'appellerons la *chute statique*. En réalité, au moment de la chute, le balancier est animé d'une très grande vitesse angulaire ; d'autre part, la roue se met en mouvement à la fin du dégagement avec une vitesse angulaire égale à zéro. L'angle de chute réel ou angle de chute dynamique est plus grand que celui que nous avons calculé. Nous verrons plus loin le moyen de l'évaluer.

La chute de sortie. — Si le rayon de la palette était égal à R_3 , il n'y aurait pas de chute de sortie. Puisque ce rayon est égal à $r_3 < R_3$, la palette est abandonnée par la dent en C' et non en C (fig. 342).

L'angle de chute est $\gamma' = \angle C'O_1C$.

L'angle $\angle C'O_1O_3$ peut être calculé, puisque nous connaissons les trois côtés du triangle $C'O_1O_3$:

$$\sin \frac{1}{2} \angle C'O_1O_3 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(R_1+r_3-a)(r_3+a-R_1)}{aR_1}} \quad (308)$$

et

$$\gamma' = \angle CO_1O_3 - \angle C'O_1O_3.$$

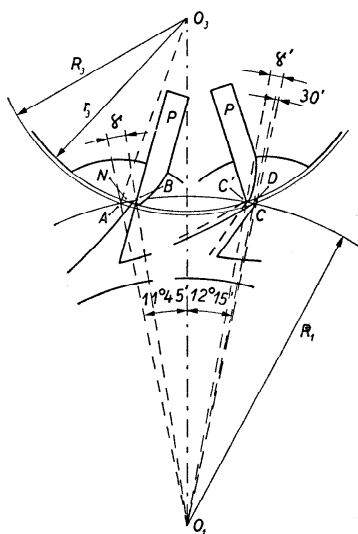


Fig. 342

Les angles de chute γ et γ' sont fonctions de a , R_1 , r_3 et r'_3 . Pour que les angles de chute soient indépendants des dimensions, il faudrait que r_3 et r'_3 soient proportionnels à a (ou à R_1), c'est-à-dire que le jeu j varie avec les dimensions. En effet, posons :

$$R_1 = Ka, \quad r_3 = K'a,$$

K et K' étant des constantes. La formule (308) devient :

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2} C'O_1O_3 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(Ka + K'a - a)(K'a + a - Ka)}{a \cdot Ka}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(K + K' - 1)(K' + 1 - K)}{K}}. \end{aligned}$$

Alors l'angle $C'O_1O_3$ est indépendant de a . Il en sera de même pour l'angle BO_1A .

En pratique, il n'est pas possible de faire le jeu des pivots proportionnel aux dimensions R_1 et a ; il faut se résigner à avoir des chutes variables avec la distance des centres de la roue et du balancier.

L'angle d'impulsion de la roue est égal à :

$$\sphericalangle BO_1O_3 + \sphericalangle O_3O_1C' = \sphericalangle BO_1C'.$$

Mais cet angle n'est pas l'angle réel d'impulsion, puisque nous savons que l'angle BO_1O_3 est trop grand.

Pour le balancier nous pouvons reconnaître trois angles de levée :

1° $\sphericalangle AO_3D$, l'angle de levée théorique ;

2° $\sphericalangle BO_3C'$, l'angle de levée compte tenu de la chute statique ;

3° un angle inférieur à BO_3C' correspondant à la chute réelle, l'angle de levée réel.

Position du centre de la détente. — La position du centre de la détente ne peut pas être quelconque bien que sa distance aux centres de la roue et du balancier puisse varier dans de grandes proportions.

Choisissons la distance b du centre du balancier à celui de la détente ; nous avons désigné par a la distance O_1O_2 qui sépare les centres de la roue et du balancier.

Posons :

$$b = na,$$

n étant un facteur de proportionnalité qui peut varier de 0,8 à 1,5. Ce facteur peut être choisi à volonté. L'avantage d'une faible valeur de n

Si le centre de la bascule est en O_2 sur la tangente en A au cercle (O_1, R_1) , il faut décrire l'angle AO_2B pour faire pénétrer A de la quantité d dans le cercle. L'angle AO_2B devient $AO_2'D$ ou $AO_2''C$ si le centre de la détente est en O_2' ou en O_2'' . Cet angle diminue lorsque O_2 s'éloigne de A . Pour faciliter le dégagement, il faut réduire l'angle AO_2B , mais sans compromettre la sécurité du fonctionnement.

Lorsque, dans l'échappement à détente bascule, le centre de la détente est en O_2 , la pression de la dent appuie le pivot de la bascule contre le coussinet; elle ne tend à faire tourner la bascule ni dans un sens ni dans l'autre. Si le centre est en O_2' la pression se décompose en deux forces dont l'une, AN , est dirigée vers O_2' et l'autre, AO , tend à faire tourner la bascule dans le sens de la flèche 1 et à l'éloigner du cercle (O_1, R_1) . Si le centre de la bascule est en O_2'' , la composante AQ perpendiculaire à AO_2'' tend à ramener la détente à l'intérieur du cercle (O_1, R_1) (flèche 2).

Il vaut mieux que le centre de la bascule soit entre O_2 et O_2'' , mais pas trop loin de O_2 , afin de ne pas augmenter outre mesure l'angle de dégagement.

Le tirage. — Si le centre de la bascule est près de O_2 (fig. 343), la composante AQ est petite et incapable d'assurer le repos. Pour augmenter la sécurité, on donne au plan de repos de la pièce d'arrêt une inclinaison telle que la pression normale sollicite elle-même la bascule vers le cercle (O_1, R_1) .

Dans la figure 344, A est le point de repos, O_1 et O_2 les centres de la roue et de la bascule. Si l'on désigne par N la pression normale au plan de repos AC , son moment par rapport à O_2 est négatif et égal à $N \cdot \overline{O_2E}$. Soient $AO_2 = \varrho$, M_1 le moment moteur par rapport à O_1 , M_2 le moment résistant en O_2 . Les équations d'équilibre de la roue et de la bascule sont :

$$M_1 - N \cdot \overline{O_1F} - \varphi N \cdot \overline{O_1G} = 0,$$

$$M_2 - N \cdot \overline{O_2E} + \varphi N \cdot \overline{O_2H} = 0$$

ou

$$M_1 - NR_1 \cos \beta - \varphi NR_1 \sin \beta = 0,$$

$$M_2 - N\varrho \sin \gamma + \varphi N\varrho \cos \gamma = 0.$$

De ces dernières équations, on tire :

$$M_2 = M_1 \frac{\varrho}{R_1} \frac{\sin \gamma - \varphi \cos \gamma}{\cos \beta + \varphi \sin \beta}. \quad (309)$$

Pour que la détente soit attirée, il faut que M_2 soit positif, donc :

$$\sin \gamma > \varphi \cos \gamma, \quad \text{tg } \gamma > \varphi.$$

Mais si α désigne l'angle de frottement, $\varphi = \operatorname{tg} \alpha$. Pour que $M > 0$, il faut que $\gamma > \alpha$.

En admettant $\varphi = 0,15$, on a $\alpha = 8^{\circ}32'$; pour $\varphi = 0,2$, $\alpha = 11^{\circ}20'$.

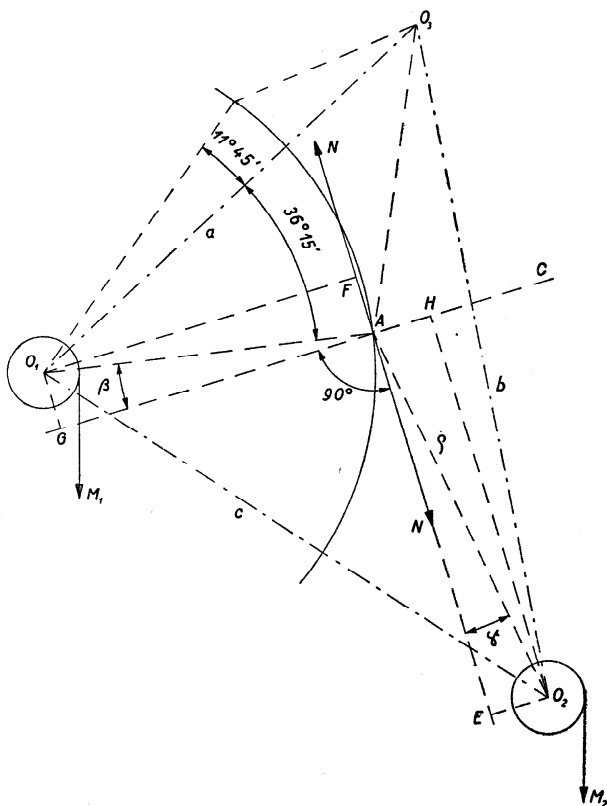


Fig. 344

La valeur de M_2 dépend aussi de celle de β , mais on n'a pas d'intérêt à augmenter M_2 , puisqu'on ne désire pas rendre le dégagement trop difficile. Il suffit que M_2 soit positif, car l'attraction principale de la détente se fait par le ressort spiral ou par le ressort de détente. Pour chercher à donner au dénominateur de la formule (309) sa plus grande valeur, on posera :

$$\cos \beta + \varphi \sin \beta = y.$$

Il est facile de voir que y est maximum pour $\beta = \alpha$. En effet :

$$\frac{dy}{d\beta} = -\sin \beta + \varphi \cos \beta.$$

Cette dérivée s'annule pour $\operatorname{tg} \beta = \varphi$. La dérivée seconde :

$$\frac{d^2 y}{d\beta^2} = -\cos \beta - \varphi \sin \beta$$

étant négative pour $\operatorname{tg} \beta = \varphi$ ou $\beta = \alpha$, il s'agit bien d'un maximum. Ainsi, en faisant :

$$\beta = \gamma = \alpha,$$

on aura une valeur de M_2 positive, mais très petite.

La question du tirage se pose différemment dans l'échappement à ancre et dans celui à détente. Dans le premier, la position de repos de l'ancre doit être assurée par la pression de la dent de la roue contre le plan de repos d'une palette. Dans l'échappement à détente, le repos est maintenu ou ramené dans sa position normale par la pression de la dent de la roue et surtout par l'action du ressort de la détente ou celle du ressort spiral de la bascule. Cette action du ressort devrait suffire. Pour que la fonction se fasse sûrement, il est nécessaire que le tirage provoqué par la pression de la dent agisse dans le même sens que le ressort de détente ou le ressort spiral ; jamais il ne doit agir en sens contraire.

On conçoit que les solutions du problème du tirage dans l'échappement à détente puissent être nombreuses : de là, les différences que l'on rencontre d'un constructeur à l'autre, soit dans la position du point de pivotement de la détente, soit dans la direction du plan de repos.

La solution adoptée doit tenir compte de l'efficacité du tirage, de la pénétration du repos, de la valeur de l'angle de dégagement et de la résistance au dégagement.

Le dégagement. — Lors du dégagement, la détente est l'organe moteur et la roue, l'organe résistant. Les équations d'équilibre sont, d'après la figure 344 :

$$M_1 - NR_1 \cos \beta + \varphi NR_1 \sin \beta = 0,$$

$$M_2 - Nq \sin \gamma - \varphi Nq \cos \gamma = 0,$$

d'où l'on tire :

$$M_2 = M_1 \frac{q}{R_1} \frac{\sin \gamma + \varphi \cos \gamma}{\cos \beta - \varphi \sin \beta}. \quad (310)$$

Le dégagement est facile quand M_2 est petit, c'est-à-dire quand $\cos \beta - \varphi \sin \beta$ est grand.

Le dénominateur est maximum pour $\beta = -\alpha$.

D'après (309) et (310) le moment de la force d'attraction et celui de la force nécessaire au dégagement sont proportionnels à $\frac{q}{R_1}$.

Augmenter la distance du point de repos au centre de la détente revient à augmenter le tirage, mais aussi la force nécessaire au dégagement de la roue. Cette dernière force doit être, en général, faible. Un dégagement difficile ne présente des avantages que dans les cas rares où une secousse tend à écarter le repos de la roue; il engendre un défaut d'isochronisme qui augmente avec la difficulté du dégagement. Il n'y a donc aucun intérêt à augmenter la valeur de ϱ , c'est-à-dire à éloigner beaucoup le centre de la détente.

Positions relatives des centres de pivotement des trois organes. — Appelons les distances $O_1O_3 = a$, $O_2O_3 = b$, $O_1O_2 = c$ et posons $b = an$. Les données sont a , b , les angles de levée λ_r et λ_b , ainsi que le nombre z des dents de la roue. Posons :

$$\lambda_r = 24^\circ, \quad \lambda_b = 40^\circ, \quad z = 15.$$

Proposons-nous de déterminer c et ϱ .

Dans le triangle O_1O_3A (fig. 344), nous connaissons a , $O_1A = R_1$ et l'angle :

$$O_3O_1A = 11^\circ 45' + 30' + 24^\circ = 36^\circ 15'.$$

Nous pouvons calculer :

$$AO_3 = \sqrt{R_1^2 + a^2 - 2aR_1 \cos 36^\circ 15'} \quad (311)$$

et

$$\sin O_1AO_3 = \frac{a \sin 36^\circ 15'}{AO_3}. \quad (312)$$

Dans le triangle AO_2O_3 , nous connaissons les côtés b et AO_3 et l'angle

$$O_3AO_2 = 360^\circ - O_1AO_3 - (90^\circ + 2\alpha);$$

nous calculons ϱ comme suit :

$$\sin AO_2O_3 = \frac{AO_3 \sin O_2AO_3}{b}, \quad (313)$$

$$\varrho = AO_3 \frac{\sin (O_2AO_3 + AO_2O_3)}{\sin AO_2O_3}. \quad (314)$$

Enfin dans le triangle O_1AO_2 , nous avons :

$$c = \sqrt{R_1^2 + \varrho^2 - 2\varrho R_1 \cos (90^\circ + 2\alpha)}$$

ou

$$c = \sqrt{R_1^2 + \varrho^2 + 2\varrho R_1 \sin 2\alpha}. \quad (315)$$

Calculons les dimensions d'un échappement à détente courte bascule en admettant, ainsi que les Grossmann l'ont fait, $n = 1$. Nous conservons les données :

$$\begin{aligned} \lambda_r &= 24^\circ, & \lambda_b &= 40^\circ, & z &= 15, & \varphi &= 0,15, \\ \text{d'où :} & & a &= 8^\circ 32', & a &= b = 1. \end{aligned}$$

Les formules (303), (311) à (315) donnent :

$$\begin{aligned} R_1 &= 0,649\,97, & AO_3 &= 0,611\,67, \\ \sphericalangle O_1AO_3 &= 104^\circ 49' 40'', & \sphericalangle AO_2O_3 &= 36^\circ 15', \\ \varrho &= 0,546\,55, & c &= 0,9642. \end{aligned}$$

Distance entre le centre du repos et le centre de la détente. — Représentons (fig. 345) les centres de la roue, de la détente et de la pièce d'arrêt ainsi que le point de contact A de la dent et du plan de repos.

Appelons r le rayon de la pièce d'arrêt dont le centre est en C et e la pénétration. Dans le triangle O_2CA :

$$\sphericalangle O_2AC = 90^\circ - \alpha.$$

$O_2A = \varrho$ est calculable au moyen de la formule (314); donc :

$$O_2C = \sqrt{\varrho^2 + (r - e)^2 - 2\varrho(r - e)\sin\alpha}. \quad (316)$$

Calcul de la chute d'entrée réelle. — Nous avons déjà calculé l'angle de chute γ que nous avons appelé l'angle de chute statique.

L'angle de chute réel est déterminé par la position du point de rencontre d'une dent de la roue d'échappement et de la palette d'impulsion P . La détermination de ce point de rencontre est un problème analogue à celui que nous avons résolu dans l'échappement à ancre. Ici la question est plus simple, puisqu'il n'y a ni recul géométrique ni recul dynamique de la roue.

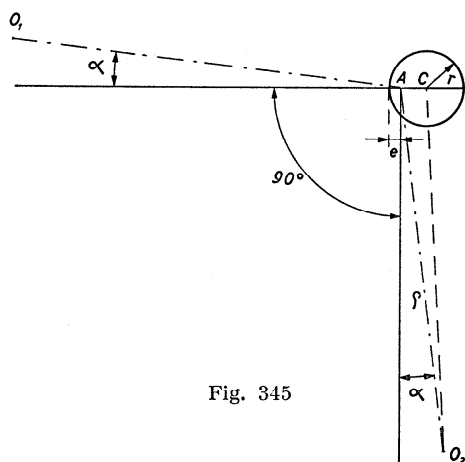


Fig. 345

A la fin du dégagement, la roue a une vitesse nulle, tandis que la palette se meut avec une vitesse croissante qui dépend de l'élongation.

Simplifions le problème en supposant qu'entre la fin du dégagement et la rencontre de la dent avec la palette, celle-ci a une vitesse angulaire constante ω . Cette hypothèse ne conduit pas à des résultats absurdes parce que la durée t de la chute est très petite.

L'angle δ parcouru par la palette pendant la chute est :

$$\delta = \omega t. \quad (317)$$

Pour la roue, nous ferons une seconde hypothèse : le moment moteur M_1 agissant sur la roue est constant pendant la chute. La roue prend un mouvement uniformément accéléré dont l'accélération vaut :

$$\gamma = \frac{M_1}{I_r},$$

si I_r désigne le moment d'inertie de la roue.

L'angle η parcouru par la roue pendant la chute est :

$$\eta = \frac{1}{2} \gamma t^2 = \frac{1}{2} \frac{M_1}{I_r} t^2. \quad (318)$$

Dans les équations (317) et (318), t désigne la même durée. L'élimination de t conduit à une relation entre les angles δ et η :

$$\eta = \frac{1}{2} \frac{M_1}{I_r} \frac{\delta^2}{\omega^2}.$$

Cette équation qui contient les inconnues η et δ ne peut être résolue que si nous admettons une valeur pour le rapport $\frac{\eta}{\delta}$.

Pendant que le balancier décrit l'angle de levée λ_b , la roue parcourt un angle égal au pas angulaire $p_a = \frac{360^\circ}{z}$. Admettons :

$$\frac{\eta}{\delta} = \frac{p_a}{\lambda_b}$$

Nous aurons finalement :

$$\eta = \frac{2 I_r \omega^2}{M_1} \left(\frac{p_a}{\lambda_b} \right)^2. \quad (319)$$

L'équation (319) donne une valeur approximative de η , car elle est basée sur la supposition :

$$\frac{\eta}{\delta} = \frac{p_a}{\lambda_b}$$

qui n'est vraie que si l'un des organes conduit l'autre.

Le calcul indique cependant de quels facteurs l'angle de chute réel η dépend. Or, η a une valeur assez importante que les Grossmann estiment plus grande que 5° , c'est-à-dire environ 20% de p_a . Le constructeur a intérêt à réduire l'angle de chute réel, donc à diminuer le moment d'inertie de la roue. L'augmentation de l'angle de levée du balancier est aussi de nature à réduire l'angle de chute, puisque λ_b devient plus grand et ω plus petit. Un rouage bien en ordre, qui ne diminue pas la valeur de M_1 , est aussi susceptible de diminuer η .

Les organes du dégagement. — Le dégagement de la roue est opéré par la palette p de dégagement (petite palette) et un ressort très faible en or qui entraîne la détente.

Le ressort en or r est fixé sur la détente, soit sur le ressort de détente, soit, dans la courte bascule par exemple, sur un bras B de la bascule

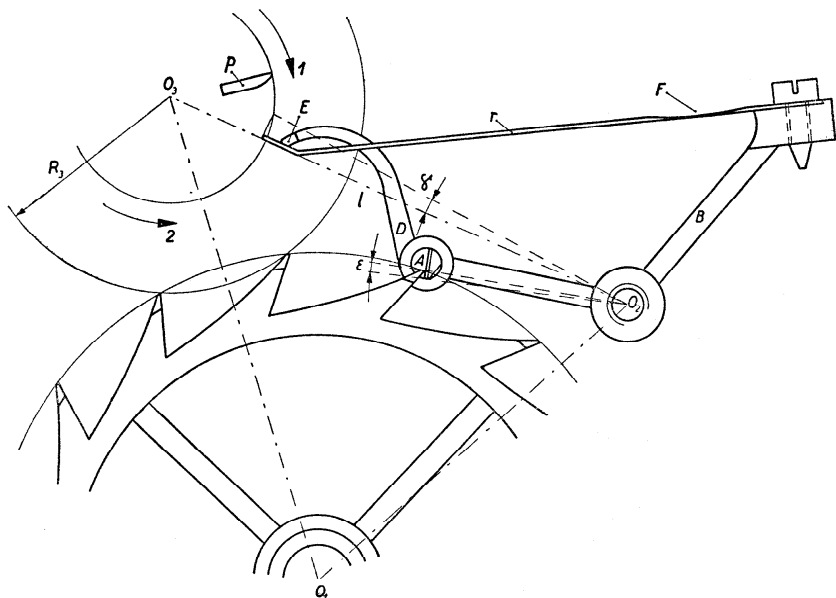


Fig. 346

(fig. 346) ; son extrémité est appuyée en E contre une partie saillante du bras D de la bascule. Pendant l'alternance muette (flèche 1), la palette p écarte l'extrémité du ressort r qui fléchit autour de son point de flexion, lequel se trouve à peu près en F . Au cours de l'alternance suivante, p rencontre de nouveau l'extrémité de r ; à cause de la saillie E , le ressort

ne cède pas, mais entraîne la détente et dégage ainsi la roue d'échappement.

La longueur du ressort en or r dépend du rayon arbitraire de la palette p . On choisit le rayon de p égal à environ $0,6 r_3$ de la grande palette P .

La pénétration de r dans le cercle décrit par la palette p doit être assez grande pour que le dégagement s'opère avec sécurité, c'est-à-dire que l'on doit avoir :

$$\gamma > \varepsilon, \quad \varrho\gamma > e,$$

si ϱ désigne la distance entre le centre O_2 de la détente et le point de repos A et e la pénétration du repos dans le cercle de la roue.

Il ne faut pas exagérer la pénétration du ressort r , puisque cette pénétration détermine la durée du dégagement et l'importance de la perturbation de la période du balancier.

Pendant l'alternance muette, le contact entre p et r doit être aussi court que possible.

Avec une longueur donnée du ressort r , on peut avoir un contact plus ou moins long suivant la position du point de flexion du ressort par rapport à la ligne O_2O_3 . Les arcs décrits par l'extrémité du ressort sont très différents (fig. 347) suivant que le point de flexion est en F_1 ou en F_2 .

Pendant le dégagement, l'angle de contact a pour sommet le centre de la détente (centre de pivotement de la bascule ou point de flexion du ressort dans la détente ressort). L'extrémité du ressort r ne décrit des arcs symétriques de part et d'autre de la position de repos que si le centre de flexion du ressort en or coïncide avec le centre de la détente ; mais cette dernière condition n'est jamais remplie.

L'extrémité du ressort en or pénètre plus efficacement dans le cercle de la palette p si le ressort est dirigé vers O_3 (fig. 348), suivant la bissectrice de l'angle O_2O_3F . Le centre de flexion du ressort devrait se trouver en F pour que les arcs décrits par l'extrémité du ressort pendant le dégagement et pendant l'alternance muette soient symétriques et courts.

Dès que le dégagement est terminé, le repos doit être ramené rapidement dans sa position normale par le petit ressort spiral, par le ressort de détente ou parfois, dans la longue bascule, par le ressort en or dont le prolongement peut se déplacer entre deux butées assez rapprochées l'une de l'autre. Le ressort de rappel doit être armé dans la position de repos.

L'engagement du repos dans le cercle de la roue est réglé par une butée.

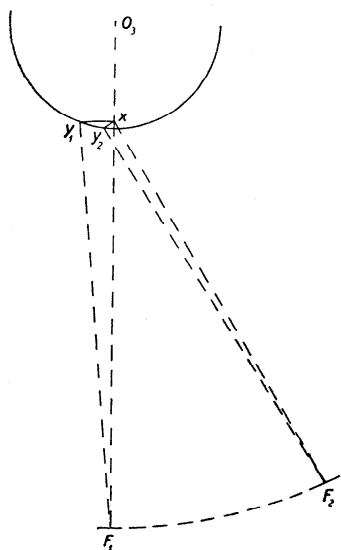


Fig. 347

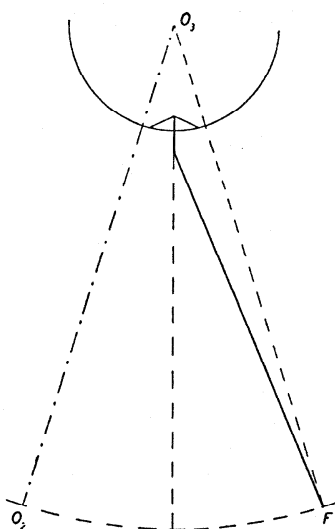


Fig. 348

L'échappement ne tient pas le repos. — Si, après l'impulsion, la dent *K* de la roue (fig. 340) ne rencontre pas le plan de repos *R*, la dent *A* butera contre le bord du grand plateau et, au retour du balancier, tombera dans le vide b_1 (fig. 340a) situé devant la palette *G*; celle-ci fera reculer la roue qui finalement sera de nouveau appuyée contre le bord du grand plateau. Lorsque le balancier aura de nouveau son mouvement suivant la flèche 1, la dent *A* tombera dans le vide b_2 et passera devant la palette sans donner d'impulsion. Mais à ce moment, la palette de dégagement a de nouveau écarté le repos et la dent *I* peut donner une impulsion au balancier. Le retour trop lent du repos permet à la roue de décrire deux pas angulaires (au lieu d'un) pendant une oscillation.

Les causes de ce phénomène peuvent être : un ressort de rappel de la détente trop faible ou trop peu armé, une détente de trop grand moment d'inertie ou un chemin exagéré de la détente après le dégagement pour atteindre sa position de repos. Les corrections sont faciles à indiquer : armer le ressort de rappel, alléger la détente ou raccourcir le ressort en or. Mais en armant le ressort de rappel, on augmente la difficulté du dégagement, donc la perturbation de la période du balancier.

La détente peut être écartée de sa position de repos par un choc. Lorsqu'une dent tombe sur le bord du grand plateau, le danger d'arc-boutement est d'autant plus grand que l'angle de levée du balancier est petit.

Amplitude du balancier. — Dans l'échappement à détente, aucun organe ne limite l'amplitude du balancier. Si ce dernier reçoit une secousse qui augmente sa vitesse angulaire, il peut faire plus d'un tour.

Si l'accélération a lieu pendant l'alternance muette, la palette de dégagement écartera une seconde fois le ressort en or, ce qui n'aura de répercussion ni sur la détente ni sur la roue. Le mouvement continuera jusqu'au moment où le spiral sera suffisamment armé pour arrêter le balancier et le ramener vers sa position d'équilibre. Au retour, il se produira deux dégagements et deux impulsions ; la roue fera deux sauts pendant l'alternance active.

Lorsque le choc accélérateur a lieu pendant l'alternance active, il peut aussi se produire un second dégagement suivi d'une seconde impulsion : le balancier doit alors surmonter la résistance d'un spiral déjà armé de plus de 2π radians ; il sera bientôt ramené vers sa position d'équilibre et tout redeviendra normal. Lors de la secousse, deux dents ont passé au lieu d'une ; l'aiguille des secondes prend une avance qui peut atteindre à peu près une demi-période.

On évite cet inconvénient, grave pour une montre de grande précision, en attachant à la courbe du spiral un index qui se place devant deux goupilles fixées au coq, dès que l'amplitude du balancier dépasse une certaine valeur. Lorsque l'amplitude du balancier est normale, une goupille portée par le bras du balancier passe dans l'espace limité par les goupilles du coq : si l'amplitude est trop grande, l'index barre le passage entre ces goupilles.

L'amplitude normale du balancier dans la position horizontale de la montre est de $270^\circ = 1,5\pi$ rad.

Position relative des palettes. — Lorsque la palette de dégagement p (fig. 349) a entraîné la détente et libéré la roue d'échappement, la dent 1 s'échappe ; la roue prend un mouvement accéléré et la dent 3 tombe sur la palette P animée d'un mouvement très rapide dans le sens de la flèche 1. Si l'on conduit le balancier lentement avec une cheville, la rencontre de la dent 3 et de P se fait au point d'intersection des circonférences (O_1, R_1) et (O_3, r_3) . Quand la montre marche, la rencontre de 3 et de P a lieu à droite du point d'intersection des deux circonférences, à cause de la grande vitesse angulaire du balancier. On a calculé l'angle de chute réel. L'impulsion se trouve en réalité plus courte, et sa durée dépend évidemment de l'angle α formé par les palettes.

En diminuant α , on rapproche la palette P de la ligne des centres O_1O_3 au moment du dégagement ; l'angle de chute d'entrée est augmenté et l'angle d'impulsion diminué ; on modifie ainsi la répartition de l'impulsion de part et d'autre de la position d'équilibre. L'influence de l'échap-

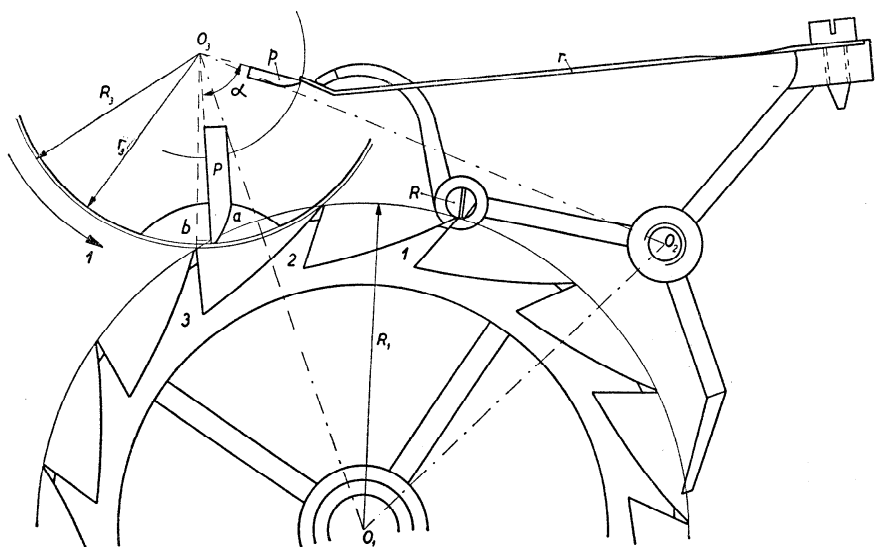


Fig. 349

pement sur la période, et la période elle-même, ne sont plus les mêmes.

Diminuer l'impulsion, c'est aussi diminuer le rendement de l'échappement. On cherche à augmenter α , mais on ne peut pas dépasser une certaine valeur pour laquelle la dent 3 passera juste avant la palette et tombera dans le vide a : il y aura alors une impulsion irrégulière contre le plateau.

Pour obtenir certains résultats, les régleurs modifient l'angle α sans se soucier de la valeur de l'angle de chute et du rendement de l'échappement.

Influence de l'échappement à détente sur la période. — Cette influence n'est pas la même sur la durée de deux alternances consécutives. Elle ne dépend, pour l'alternance muette, d'une part que de la force et de la longueur du ressort en or, d'autre part que de la position de la palette p de dégagement par rapport à la position d'équilibre au moment de la rencontre entre p et r . Le ressort en or offre une certaine résistance — très faible d'ailleurs — qui, agissant pendant la partie « descendante » de l'alternance, augmente la durée d'alternance. Pour réduire cette influence au minimum, il faut utiliser un ressort très faible et diminuer autant que possible la durée du contact entre p et r . La figure 350 représente schématiquement ce qui se passe pendant l'alternance muette : O_3A est la posi-

tion d'équilibre; le mouvement se fait de E_2 à A puis E_1 suivant la flèche 1; O_3B et O_3C sont les positions du balancier au moment où p aborde, puis quitte le ressort en r . Le balancier est gêné dans sa course seulement pendant le parcours du secteur BO_3C .

L'alternance active est beaucoup plus influencée par l'échappement. Le balancier parti de O_3E_1 (fig. 351) se meut suivant la flèche 2; il rencontre un premier obstacle en O_3B : la palette p rencontre le ressort en r et entraîne jusqu'en O_3C la détente qui résiste. Après le dégagement et pendant la chute d'entrée, le balancier est libre de tout contact

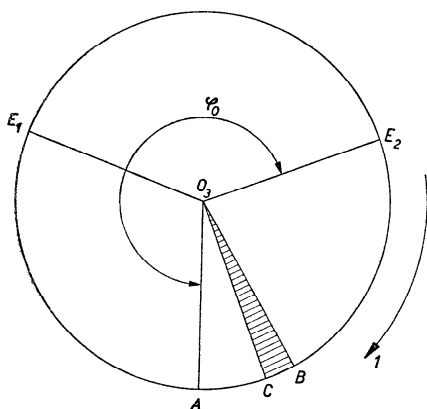


Fig. 350

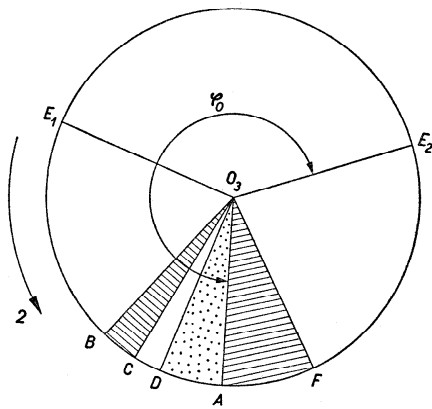


Fig. 351

avec la roue ou avec la détente. Enfin en O_3D commence l'impulsion qui se termine en O_3F ; elle est inégalement répartie de part et d'autre de la position d'équilibre du balancier. L'effet sur la période est indiqué dans les figures 350 et 351: dans les secteurs hachurés, il se produit un retard (augmentation de la période), tandis que, dans les secteurs ponctués, il y a de l'avance.

L'effet global de l'échappement à détente est une augmentation de la période, donc un retard.

Ce retard n'aurait aucun inconvénient s'il était constant; malheureusement il dépend aussi de l'amplitude, de sorte que *l'échappement à détente crée un défaut d'isochronisme*. Le retard est d'autant plus grand que l'amplitude φ_0 du balancier est plus petite; les horlogers disent qu'il y a du retard aux petits arcs.

Qu'arrive-t-il quand on modifie l'angle α formé par les deux palettes? Si α est diminué, tandis que la position d'équilibre du balancier n'est pas

modifiée, la chute réelle est augmentée ; l'impulsion avant le point mort est plus courte ; en somme, on a augmenté le retard dû à l'échappement et accentué le défaut d'isochronisme. On ne diminuera l'angle α des palettes que pour corriger une avance aux petits arcs.

Position des organes de l'échappement quand le spiral est détendu. —

En déplaçant la position d'équilibre du spiral, c'est-à-dire en tournant la virole du spiral sans rien toucher aux deux plateaux, on modifie la période du balancier, puisqu'on modifie la répartition des angles des figures 350 et 351 par rapport à la position de repos O_3A . Dans l'échappement à détente, on peut déplacer un peu la position d'équilibre du spiral, parce que deux alternances successives ne sont pas identiques. Dans l'échappement à ancre, la position d'équilibre du spiral est donnée parce que le dégagement et l'impulsion doivent se produire de même façon dans deux alternances successives.

L'échappement à détente, comme tous les échappements à alternance muette (ou à coup perdu), a de l'arrêt au doigt : il ne se met pas en marche tout seul. Il faut imprimer au balancier une rotation qui oblige la palette de dégagement à entraîner la détente et à libérer la roue qui peut alors donner une impulsion au balancier. Mais il est nécessaire que ce mouvement initial soit faible : *dans la position d'équilibre du spiral, la palette de dégagement ne doit pas être très éloignée du ressort en or*. Elle ne doit cependant pas être trop près de ce ressort, car alors une faible secousse pourrait occasionner un déplacement du ressort en or au moment où le spiral serait trop peu armé pour opérer le dégagement ; une seconde secousse plus forte serait nécessaire pour mettre la montre en marche.

L'inconvénient que constitue l'obligation de mettre la montre en marche en lui imprimant un mouvement de rotation suffisant pour opérer le premier dégagement est, en soi, peu grave. Mais si la montre reçoit une secousse qui annule la vitesse du balancier tout près du point mort, elle s'arrête et ne repart pas, jusqu'à ce qu'une autre secousse imprime au balancier une accélération suffisante pour dégager la roue.

On s'arrange pour que la position des organes, au point mort du spiral, soit celle de la figure 352, où l'on a dessiné, en pointillé, les positions des palettes à la fin du dégagement. L'angle des palettes est :

$$\alpha = \sphericalangle CO_3D = \sphericalangle C'O_3D'.$$

Cet angle peut être quelque peu modifié.

Au début du dégagement, le spiral est armé de l'angle $EO_3D = \beta$; son moment par rapport à O_3 est $C\beta$, et la force qu'il exerce en E

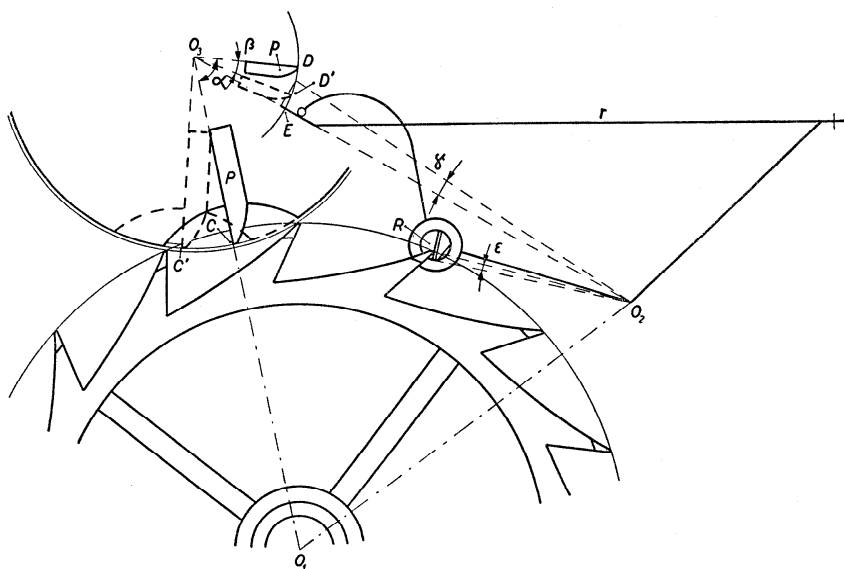


Fig. 352

vaut :

$$\frac{C\beta}{\frac{3}{5}r_3}.$$

Le moment de cette force par rapport à O_2 doit être plus grand que le moment nécessaire au dégagement dont la valeur est donnée par (310). Appelons l la distance O_2E ; le spiral est capable de libérer la roue si :

$$\frac{C\beta}{\frac{3}{5}r_3} l > M_1 \frac{\varrho}{R_1} \frac{\sin \gamma + \varphi \cos \gamma}{\cos \beta - \varphi \sin \beta}.$$

Avantages et inconvénients de l'échappement à détente. — Les organes et les fonctions de cet échappement sont moins compliqués que ceux de l'échappement à ancre; les formes des organes n'offrent pas de grandes difficultés d'exécution. Le balancier a plus de liberté dans l'échappement à détente, ce qui explique les excellents résultats de réglage obtenus avec les pièces à détente. Cet échappement exige peu ou pas d'huile aux palettes, si la roue est en un métal tendre (laiton, alliage d'or, maillechort).

Les inconvénients de ce dispositif sont l'arrêt au doigt et la possibilité du « galop », c'est-à-dire du passage de deux dents pendant la même oscillation.

L'échappement à détente est très sensible à certains défauts d'exécution ; les jeux des pivots doivent être petits, le ressort doit être faible et de longueur suffisante pour que le dégagement se fasse avec sécurité ; le ressort spiral ou le ressort de détente ne seront pas trop armés, si l'on veut éviter un dégagement difficile et une grande perturbation de la période ; pour la même raison, il est bon de diminuer le moment d'inertie de toutes les pièces composant la détente. Diminuer le moment d'inertie de la roue d'échappement, c'est réduire la chute d'entrée et la perte d'énergie qui en résulte.

A cause de sa sensibilité aux chocs, l'échappement à détente ne convient pas bien pour les montres portées ; il est, par contre, excellent pour les chronomètres de marine.

CHAPITRE XIII

LES PERTURBATIONS DE LA PÉRIODE DU BALANCIER-SPIRAL

Les facteurs modifiant la période du balancier-spiral. — La période T du balancier-spiral est donnée par la formule :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C}},$$

dans laquelle I désigne le moment d'inertie du balancier par rapport à l'axe de rotation et C le moment élastique du spiral.

Tout ce qui modifie I ou C , ou ces deux grandeurs à la fois, a une influence sur T .

La valeur de T est exacte si le mouvement du balancier est harmonique, c'est-à-dire si la résultante des forces qui provoquent le mouvement est constamment proportionnelle à l'élongation. Les causes qui introduisent des forces supplémentaires non proportionnelles à l'élongation détruisent le mouvement harmonique, modifient la période et rendent celle-ci dépendante de l'amplitude.

Parmi les plus importants facteurs susceptibles de modifier T , citons : 1^o les frottements, 2^o l'échappement, 3^o les secousses, 4^o les défauts d'équilibre du balancier, 5^o les défauts d'équilibre de l'ancre, 6^o les défauts d'équilibre du spiral, 7^o le jeu du spiral entre les goupilles de la raquette, 8^o les modifications de l'élasticité du spiral, 9^o les variations de la température, 10^o la force centrifuge, 11^o l'inertie du spiral, 12^o les variations de la pression atmosphérique, 13^o les champs magnétiques.

Le moment d'inertie du balancier est modifié par les facteurs 9^o, 10^o, 11^o et 12^o ; les facteurs 7^o, 8^o et 9^o altèrent le moment élastique du spiral, tandis que les facteurs 1^o, 2^o, 3^o, 4^o, 5^o, 6^o et 13^o détruisent le mouvement harmonique du balancier en faisant intervenir des forces non proportionnelles à l'élongation φ .

Lorsqu'une force supplémentaire est proportionnelle à φ , le mouvement du balancier-spiral reste harmonique ; le moment élastique C du spiral n'est plus le seul moment actif : la période du balancier est influencée, mais les oscillations restent isochrones ; *une force supplémentaire et constante, proportionnelle à l'élongation, n'est pas considérée comme un facteur perturbateur de la période, puisque nous pouvons facilement compenser son effet en modifiant le moment d'inertie du balancier ou le moment élastique du spiral.*

Dans ce chapitre, nous étudierons l'effet de chacun des facteurs énumérés sur la période du balancier-spiral que nous supposons soumis à la force de rappel du spiral et au facteur considéré.

Les frottements. — Les frottements qui peuvent influencer le mouvement du balancier sont ceux des pivots de l'arbre du balancier dans les coussinets ; ceux qui se produisent dans l'échappement — pivots de l'ancre et de la roue, entrée de fourchette et cheville, dent de la roue et palette — agissent certes sur la période du balancier, mais leur effet est compris dans l'influence globale de l'échappement ; enfin le frottement des lames du ressort moteur, celui des dents et des pivots des roues dentées modifient l'amplitude des oscillations du balancier et permettent ainsi à tous les défauts d'isochronisme de se manifester.

Au chapitre VII (p. 63), nous avons examiné l'influence sur la période d'un frottement continu et constant ; un tel frottement ne modifie pas la période du balancier-spiral libre, mais affecte beaucoup l'amplitude. En diminuant l'amplitude, il fait jouer les facteurs qui influencent l'isochronisme ; indirectement il modifie la marche de la montre ; cet effet est plus particulièrement la cause des difficultés de réglage d'une montre dans les positions horizontale et verticale.

Dans le même chapitre (p. 69), nous avons étudié l'influence d'un frottement proportionnel à la vitesse angulaire du balancier et avons constaté que tant que ce frottement est faible, son effet sur la période est très petit, mais qu'aussitôt qu'il atteint une certaine valeur son influence augmente très rapidement. Dans ce cas, non seulement la période est modifiée, mais aussi l'amplitude, avec les conséquences que nous avons signalées.

Puisque le mouvement du balancier est amorti par le frottement, il y a un déplacement de la position d'équilibre ; les parties de l'alternance — avant et après le point mort — ne sont pas égales et le retard provoqué dans la demi-alternance descendante n'est pas compensé par l'avance que le frottement produit dans la demi-alternance ascendante.

En réalité, l'amortissement est annulé par l'impulsion de l'échappement qui introduit, comme nous l'avons vu dans les chapitres précédents, une perturbation assez complexe de la période.

L'influence indirecte des frottements est donc prépondérante. Ceux-ci doivent être réduits autant que possible partout où ils se produisent dans la montre.

Des essais ont été faits pour remplacer le glissement par le roulement en utilisant les roulements à billes. A côté de la diminution de la valeur absolue du frottement, cette construction présenterait l'avantage d'égaliser le frottement dans les positions horizontale et verticale de la montre, donc de faciliter le réglage du plat au pendu.

L'échappement. — Ce que nous avons dit de l'influence de l'échappement sur la période dans les chapitres IX, X, XI et XII nous dispense d'en parler plus longuement ici. Cette influence est loin d'être négligeable, et, malheureusement, nous ne pouvons pas l'éliminer ; nous devons nous contenter de la réduire en diminuant les frottements et l'impulsion en facilitant le dégagement et en mettant l'impulsion aussi près que possible de la position d'équilibre du balancier.

Les secousses. — Une montre portée reçoit, chaque jour, un nombre appréciable de secousses qui peuvent modifier momentanément la vitesse angulaire du balancier.

Au chapitre VII (p. 89), nous avons calculé la modification de la période due à une percussion instantanée qui fait passer la vitesse angulaire du balancier de ω à $\omega + d\omega$, lorsque l'élongation est φ et pour une amplitude égale à φ_0 ; nous avons trouvé la formule (189) :

$$\Delta t = \frac{I}{C} \frac{\varphi d\omega}{\varphi_0^2}.$$

Suivant le signe de φ et de $d\omega$, nous aurons une diminution ou une augmentation de la période, donc une avance ou un retard de la montre.

Les secousses altèrent la période du balancier-spiral suivant leur intensité et leur direction, c'est-à-dire selon leur effet sur la vitesse angulaire du balancier, ainsi que selon la valeur de l'élongation au moment où elles agissent. La formule (189) montre clairement l'avantage des grandes amplitudes du balancier.

Il n'est possible de prévoir ni le nombre ni l'intensité ni la direction des secousses : leur influence échappe au calcul.

Le rebattement. — Certaines secousses peuvent augmenter la vitesse angulaire du balancier à un point tel que, dans l'échappement à ancre, la cheville de plateau vient buter contre le dos de la fourchette appuyée contre une des butées ; c'est le *rebattement* dont on sait qu'il provoque une forte avance de la montre.

Ce phénomène est assez fréquent ; il n'est pas seulement dû à des chocs,

mais peut être aussi produit par un ressort moteur trop fort ou trop tendu, ou par des engrenages défectueux ayant le défaut connu sous le nom de « chute ».

La trop grande force du ressort moteur peut provenir de dimensions mal calculées ; en ce cas, il faut remplacer le ressort par un autre plus faible. Elle peut aussi être provoquée par une tension anormale créée par le cliquet qui agit sur le rochet au moment où le ressort est complètement armé ; on évite ce danger en utilisant un arrêlage qui empêche de donner au ressort la tension maximum dont il est capable. Au lieu de l'arrêlage, on emploie aujourd'hui plus généralement les encliquetages à fort recul, qui permettent une légère détente du ressort complètement armé.

Enfin la théorie et la pratique des engrenages indiquent ce qu'il faut faire pour éviter le défaut de la chute.

Le rebattement altère considérablement la période du balancier et peut modifier sensiblement la marche d'une montre.

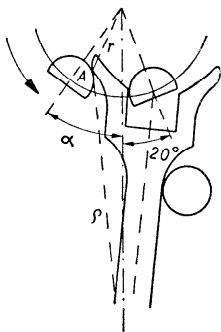


Fig. 353

Quelle est l'importance de cette perturbation ?

Si l'on suppose (fig. 353) la fourchette appuyée contre la butée et que l'on dessine la cheville de plateau en A, au moment où elle rencontre le dos de la fourchette, le rayon de la cheville fait alors un angle α avec la ligne des centres ; l'élongation du balancier est, à ce moment, $360^\circ - \alpha = \varphi$.

Si, à un instant donné, l'amplitude φ_0 est plus grande que φ , il y a rebattement.

Au moment du choc, le balancier est arrêté et rejeté en arrière.

La durée de la demi-alternance « ascendante » est raccourcie, puisque le balancier n'a pas pu terminer sa course normale.

La demi-alternance « descendante » qui suit le choc est aussi plus courte, puisqu'elle commence au moment où le balancier a déjà la vitesse avec laquelle la cheville a été rejetée par la fourchette.

Durée de la demi-alternance « ascendante ». — Soit T la période du balancier de moment d'inertie I accouplé à un spiral de moment élastique C ; on a :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C}}.$$

Pour passer de l'élongation 0 à l'élongation φ , le balancier met le temps t ; or, d'après la formule (125) du chapitre VII :

$$t = \sqrt{\frac{I}{C}} \arcsin \frac{\varphi}{\varphi_0},$$

où φ_0 désigne l'amplitude d'un balancier que rien ne gênerait dans sa course. La durée de la demi-alternance ascendante est, dans le cas du rebattement, égale à t ; elle aurait dû être $\frac{T}{4}$.

La perturbation ΔT_1 de la demi-alternance ascendante est :

$$\Delta T_1 = t - \frac{T}{4} = - \sqrt{\frac{I}{C}} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\varphi}{\varphi_0} \right)$$

ou, en remplaçant $\sqrt{\frac{I}{C}}$ par $\frac{T}{2\pi}$:

$$\Delta T_1 = - \frac{T}{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\varphi}{\varphi_0} \right). \quad (320)$$

Soit ω_1 la vitesse angulaire du balancier au moment du choc de la cheville contre le dos de la fourchette, c'est-à-dire au moment où l'élongation du balancier est φ ; on a, d'après (124) :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{C}{I}} \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2} = \frac{2\pi}{T} \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}.$$

Durée de la demi-alternance « descendante ». — Après le choc, le balancier a une vitesse angulaire ω'_1 qui n'est égale à ω_1 que si les corps (fourchette et cheville) sont parfaitement élastiques. La vitesse ω'_1 correspond à l'élongation φ et à une amplitude φ'_0 qui est pour l'instant inconnue. On peut écrire :

$$\omega'_1 = \frac{2\pi}{T} \sqrt{\varphi'^2_0 - \varphi^2},$$

d'où l'on tire :

$$\varphi'_0 = \sqrt{\varphi^2 + \omega'^2_1 \frac{T^2}{4\pi^2}}. \quad (321)$$

Pour passer de l'élongation φ à l'élongation 0 (ou de l'élongation 0 à l'élongation φ), le balancier emploie un temps t' qui peut être calculé dès que l'on connaît la vitesse angulaire ω'_1 du balancier après le choc :

$$t' = \sqrt{\frac{I}{C}} \arcsin \frac{\varphi}{\varphi'_0} = \frac{T}{2\pi} \arcsin \frac{\varphi}{\varphi'_0}.$$

La perturbation de la demi-alternance descendante est :

$$\Delta T_2 = t' - \frac{T}{4} = - \frac{T}{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\varphi}{\varphi'_0} \right). \quad (322)$$

Perturbation relative de la durée d'alternance. — La perturbation de la durée d'alternance est :

$$\Delta T_1 + \Delta T_2 = -\frac{T}{2\pi} \left(\pi - \arcsin \frac{\varphi}{\varphi_0} - \arcsin \frac{\varphi}{\varphi'_0} \right).$$

La perturbation relative de la durée d'alternance est la même que la perturbation relative de la période, donc :

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{1}{2\pi} \left(\pi - \arcsin \frac{\varphi}{\varphi_0} - \arcsin \frac{\varphi}{\varphi'_0} \right). \quad (323)$$

Cette formule permet de calculer facilement la variation de la marche diurne d'après la formule (146).

Pour utiliser la formule (323), il faut connaître φ'_0 que l'on calcule au moyen de (321), formule qui contient la vitesse angulaire ω'_1 inconnue.

Vitesse angulaire du balancier après le choc. — Dans le chapitre IX, nous avons trouvé la formule (242 g) :

$$\omega'_1 = \omega_1 - \frac{1 + \varepsilon}{1 + \frac{I_1}{I_2} \left(\frac{\varrho}{r} \right)^2} \left(\omega_1 + \frac{\varrho}{r} \omega_2 \right),$$

dans laquelle le moment d'inertie du corps percutant et celui du corps percuté sont désignés par I_1 et I_2 , les vitesses angulaires avant et après le choc par ω_1 et ω'_1 pour le premier corps et par ω_2 et ω'_2 pour le second, les distances du point d'impact aux centres de rotation du balancier et de l'ancre par r et ϱ , enfin le coefficient d'élasticité par ε ($\varepsilon = 0$ pour les corps parfaitement mous et $\varepsilon = 1$ pour les corps parfaitement élastiques).

Dans le cas qui nous occupe $\omega_2 = 0$, puisque la fourchette est appuyée contre une des butées. De plus la fourchette ne peut pas être déplacée : c'est comme si son moment d'inertie I_2 était infiniment grand. La vitesse angulaire ω'_1 a pour expression :

$$\omega'_1 = \omega_1 - \frac{1 + \varepsilon}{1} \omega_1,$$

soit :

$$\omega'_1 = -\varepsilon \omega_1.$$

Ainsi, pour des corps mous, $\omega'_1 = 0$, pour des corps parfaitement élastiques, $\omega'_1 = -\omega_1$.

Pour nous rendre compte de l'importance de la perturbation apportée à la marche des montres par le rebattement, envisageons les données suivantes :

$$T = 0,4 \text{ s}, \quad \varphi = 335^\circ = \frac{335\pi}{180} \text{ rad},$$

$$\varphi_0 = \frac{340\pi}{180} \text{ rad}, \quad \varepsilon = 0,5.$$

Calculons d'abord ω'_1 ; nous obtenons :

$$\omega_1 = 15,927 \text{ rad/s}.$$

Pour $\varepsilon = 0,5$:

$$\omega'_1 = -\frac{\omega_1}{2}.$$

D'après (321), nous pouvons calculer φ'_0 :

$$\varphi'_0 = \sqrt{\varphi^2 + \frac{\omega_1^2}{4} \frac{T^2}{4\pi^2}}.$$

Mais :

$$\frac{\omega_1^2}{4} = \frac{\pi^2}{T^2} (\varphi_0^2 - \varphi^2)$$

et

$$\varphi'_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\varphi_0^2 + 3\varphi^2}.$$

En remplaçant φ et φ_0 par leurs valeurs, nous obtenons :

$$\varphi'_0 = 336^\circ,25$$

et enfin :

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{1}{2\pi} \left(\pi - \arcsin \frac{335}{340} - \arcsin \frac{335}{336,25} \right).$$

En effectuant les calculs, nous trouvons :

$$\frac{\Delta T}{T} = -0,0411,$$

ce qui donne une modification de la marche diurne de :

$$\mu = -(-0,0411) \cdot 86\,400 = +3551 \text{ s} = 59 \text{ m } 11 \text{ s}.$$

Dans les montres, le rebattement ne se produit jamais pendant 24 heures. Mais il peut avoir lieu de façon continue dans les horloges à poids dans lesquelles, par suite d'un poids trop lourd ou d'une mauvaise position du pendule par rapport aux parois latérales du cabinet de l'horloge, la lentille bute contre les deux parois ou contre l'une d'elles.

Si le rebattement dont nous avons calculé l'effet pour 24 heures ne

se produit que pendant une minute, c'est-à-dire pendant 300 alternances, la marche de la montre sera altérée de :

$$300 \cdot \Delta T \cong 4,9 \text{ s.}$$

Il s'agit donc d'une perturbation considérable qui entraîne toujours une avance : sa valeur dépend de l'amplitude φ_0 et de la durée du rebattement.

Lorsque les engrenages sont défectueux, la courbe des amplitudes du balancier a des maxima très prononcés qui se produisent toutes les 5 ou 6 minutes ; ce sont des moments dangereux pour le rebattement. Le danger peut subsister pendant une heure jusqu'à ce que le ressort soit suffisamment détendu ; dans les montres automatiques, où le ressort moteur est complètement remonté pendant une bonne partie de la journée, le rebattement peut être encore plus fréquent.

A première vue, la grande influence du rebattement étonne ; elle est cependant facilement explicable.

La perturbation de la demi-alternance ascendante est due à l'impossibilité pour le balancier d'aller au bout de sa course normale : dans notre cas, la fourchette l'empêche de parcourir les cinq derniers degrés de sa course. C'est un petit parcours, mais à ce moment la vitesse angulaire du balancier est relativement faible : pour une elongation $\varphi = 335^\circ$, $\omega_1 = 15,927 \text{ rad/s}$. Dès ce moment et jusqu'au bout de l'oscillation normale (340°), elle ira en diminuant jusqu'à zéro.

Calculons le temps t que mettrait le balancier pour parcourir ces 5 derniers degrés avec la vitesse angulaire moyenne de 8 rad/s ; nous avons :

$$t = \frac{5\pi}{8 \cdot 180} = 0,010 \, 908 \text{ s.}$$

Cette valeur est voisine de celle $0,010 \, 93 \text{ s}$ que nous aurions trouvée pour ΔT_1 , au moyen de la formule (320).

La formule d'Airy. — Au chapitre VII (p. 85), nous avons étudié la possibilité de calculer la perturbation de la période du balancier-spiral occasionnée par une augmentation instantanée de la vitesse angulaire du balancier. La plupart des facteurs qui modifient le mouvement du balancier provoquent bien une accélération (positive ou négative), mais ils agissent pendant un certain temps, de sorte que la formule (189) n'est plus rigoureusement applicable.

Rappelons cette formule :

$$\Delta t = \frac{I}{C} \frac{\varphi d\omega}{\varphi_0^2}.$$

Ici $d\omega$ désigne une augmentation instantanée de la vitesse angulaire du balancier au moment où ce dernier a l'élongation φ ; I , C , φ_0 sont, comme d'habitude, les symboles du moment d'inertie du balancier, du moment élastique du spiral et de l'amplitude des oscillations.

Supposons maintenant que l'accélération ne se produise pas instantanément, mais dans le temps que prend le balancier pour passer de l'élongation φ_1 à l'élongation φ_2 .

Nous admettons que le facteur perturbateur est assez petit pour ne pas modifier profondément le mouvement oscillatoire harmonique du balancier.

Pendant une fraction dT_1 infiniment courte de la durée d'alternance T_1 , la vitesse angulaire augmente de $d\omega$, lorsque le balancier a l'élongation φ . D'après (189), nous avons :

$$dT_1 = \frac{I}{C} \frac{\varphi d\omega}{\varphi_0^2}.$$

L'effet total ΔT_1 est obtenu par intégration entre les limites φ_1 et φ_2 :

$$\Delta T_1 = \frac{I}{C} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\varphi d\omega}{\varphi_0^2}. \quad (324)$$

Nous pourrions calculer la perturbation ΔT_1 occasionnée par un facteur dès que nous saurons exprimer $d\omega$ en fonction de φ . Or :

$$d\omega = \frac{d^2\varphi}{dt^2} dt = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \frac{dt}{d\varphi} d\varphi. \quad (325)$$

Puisque le mouvement du balancier n'est pas profondément modifié, et en posant :

$$a = \sqrt{\frac{C}{I}} = \frac{\pi}{T_1},$$

nous pouvons écrire :

$$t = \sqrt{\frac{I}{C}} \arcsin \frac{\varphi}{\varphi_0} = \frac{1}{a} \arcsin \frac{\varphi}{\varphi_0}.$$

Par dérivation, nous tirons de là :

$$\frac{dt}{d\varphi} = \frac{1}{a} \frac{1}{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}}.$$

La formule (325) devient :

$$d\omega = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \frac{1}{a} \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}} = \frac{\gamma}{a} \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}},$$

en désignant par γ l'accélération angulaire $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$. La formule (324) devient :

$$\Delta T_1 = \frac{I}{C} \frac{1}{a} \frac{1}{\varphi_0^2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\gamma \varphi d\varphi}{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}}.$$

Mais :

$$\frac{I}{C} \frac{1}{a} = \frac{I}{C} \sqrt{\frac{I}{C}} = \frac{1}{a^3} = \left(\frac{T_1}{\pi}\right)^3,$$

donc :

$$\Delta T_1 = \frac{T_1^3}{\pi^3 \varphi_0^2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\gamma \varphi d\varphi}{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}},$$

formule dont nous tirons la perturbation relative :

$$\frac{\Delta T_1}{T_1} = \frac{T_1^2}{\pi^3 \varphi_0^2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\gamma \varphi d\varphi}{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}}. \quad (326)$$

C'est la *formule d'Airy*; elle n'est applicable qu'au calcul de petites perturbations qui ne modifient pas sensiblement le mouvement du balancier-spiral. Nous pourrions en faire usage dans la plupart des cas que nous allons traiter.

Chaque fois que nous voudrions utiliser la formule d'Airy, nous devons d'abord exprimer l'accélération γ en fonction de φ , puis intégrer entre les limites φ_1 et φ_2 .

Pour calculer la modification μ de la marche diurne, il faut recourir à la formule (146) :

$$\mu = -86\,400 \frac{\Delta T}{T} = -86\,400 \frac{\Delta T_1}{T_1}$$

et dès lors nous pouvons écrire la formule d'Airy sous la forme :

$$\mu = -86\,400 \frac{T_1^2}{\pi^3 \varphi_0^2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\gamma \varphi d\varphi}{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}}. \quad (326a)$$

La puissance réglante du balancier. — La puissance réglante est l'insensibilité du balancier aux facteurs qui tendent à modifier sa période.

Généralement on donne un sens plus restreint à cette expression en réduisant les facteurs perturbateurs à des forces ; on exclut, par exemple, la température qui modifie le moment d'inertie du balancier et le moment élastique du spiral.

Dès qu'on cherche à donner à cette grandeur une expression mathématique, on s'aperçoit qu'il faut considérer plusieurs facteurs qui ne sont pas toujours indépendants les uns des autres ; ces facteurs sont le moment d'inertie du balancier, l'amplitude, la période, l'énergie cinétique maximum du balancier-spiral.

Le régleur connaît déjà de façon intuitive les facteurs dont dépend la puissance réglante d'un balancier-spiral ; il citera, en première ligne, la grandeur, le poids et l'amplitude du balancier ; il donnerait facilement son assentiment à une formule telle que :

$$P = I\varphi_0, \quad (327)$$

P désignant la puissance réglante du balancier.

L'expérience a montré au régleur qu'il est favorable d'avoir un balancier-spiral ayant une grande vitesse angulaire moyenne, c'est-à-dire une période courte, et une grande amplitude.

Mais la formule (327) ne contentera pas le praticien, car elle affirme que deux balanciers de même moment d'inertie, exécutant des oscillations de même amplitude, ont la même puissance réglante *quelle que soit leur période*.

Haag propose la formule :

$$P = \frac{R^2}{T^2}, \quad (328)$$

où R est le rayon de giration du balancier. On s'étonne de ne voir dans la formule (328) ni la masse du balancier ni l'amplitude. Mais la période dépend du premier de ces deux facteurs.

J. et H. Grossmann admettent que la puissance réglante du balancier est proportionnelle au poids (ou à la masse) du balancier, au carré de son rayon de giration et inversement proportionnelle au carré de la période ; ils proposent la formule de définition :

$$P = \pi^2 \frac{mR^2}{T^2} = \frac{\pi^2 I}{T^2}. \quad (329)$$

Dans cette formule, on ne trouve pas non plus l'amplitude.

Si, dans la formule d'Airy :

$$\frac{\Delta T_1}{T_1} = \frac{T_1^2}{\pi^3 \varphi_0^2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\gamma \varphi d\varphi}{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}},$$

on pose :

$$S = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\gamma \varphi d\varphi}{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}},$$

on aura :

$$\frac{\Delta T_1}{T_1} = \frac{T_1^2 S}{\pi^3 \varphi_0^2}.$$

La perturbation est d'autant plus petite que T_1 est petit et que φ_0 est grand. Mais il ne faut pas oublier que la fonction perturbatrice S et parfois l'accélération γ contiennent aussi l'amplitude.

On pourrait définir la puissance réglante du balancier par la formule :

$$P = \left(\frac{\varphi_0}{T_1} \right)^2. \quad (330)$$

On peut essayer de faire intervenir l'énergie cinétique maximum du balancier :

$$W = \frac{1}{2} I \Omega^2 = \frac{1}{2} C \varphi_0^2.$$

A cet effet, on multipliera le numérateur et le dénominateur de la formule (330) par $\frac{1}{2} C$; on obtient :

$$P = \frac{\frac{1}{2} C \varphi_0^2}{\frac{1}{2} C T_1^2} = \frac{2W}{C T_1^2} = \frac{2W}{\pi^2 I}. \quad (331)$$

La puissance réglante serait alors proportionnelle à l'énergie cinétique maximum du balancier, ce qui est logique, et inversement proportionnelle au moment d'inertie du balancier, ce qui est déconcertant. Cependant I intervient aussi dans la valeur de W .

Mais les différentes formules qui définissent P représentent des gran-

deurs de natures différentes ; on le constate en déterminant dans chaque cas les dimensions de P ; celles-ci sont, d'après (327) :

$$[P] = ML^2,$$

d'après (328) :

$$[P] = L^2T^{-2},$$

d'après (329) :

$$[P] = ML^2T^{-2},$$

d'après (330) et (331) :

$$[P] = T^{-2}.$$

Aucune de ces grandeurs n'est une puissance qui s'exprimerait en erg par seconde dans le système C.G.S. et dont les dimensions seraient ML^2T^{-3} . L'expression « puissance réglante » n'est donc pas très heureuse ; il vaudrait mieux parler de *pouvoir réglant* ou de *capacité réglante*, renoncer à en donner une définition exprimable par une formule mathématique et s'en tenir, pour le moment, à la règle des praticiens : *le balancier règle d'autant mieux qu'il a un grand moment d'inertie et il exécute des oscillations rapides de grande amplitude*.

Défauts d'équilibre du balancier. — Considérons un balancier dont le centre de gravité ne coïncide pas avec le centre de rotation. Soit G la position du centre de gravité (fig. 354), lorsque le balancier est au repos ; la position d'équilibre est donnée par le rayon OA . Posons :

$$OG = \lambda, \quad \sphericalangle GOA = \beta.$$

La montre est dans la position verticale. Considérons une position quelconque OB du balancier caractérisée par l'élongation φ ; le centre de gravité se trouve alors en G' , de sorte que :

$$OG' = \lambda, \quad \sphericalangle G'OA = \varphi + \beta.$$

Si le poids du balancier est P , son moment par rapport à O est :

$$- P\lambda \sin(\varphi + \beta).$$

L'équation du mouvement du balancier est donc :

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} + C\varphi + P\lambda \sin(\varphi + \beta) = 0. \quad (332)$$

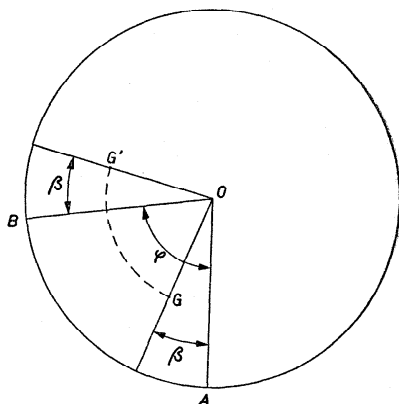


Fig. 354

L'accélération qui résulte de l'excentricité du balancier est :

$$\gamma = - \frac{P\lambda \sin(\varphi + \beta)}{I}.$$

Appliquons la formule d'Airy :

$$\frac{\Delta T_1}{T_1} = - \frac{P\lambda T_1^2}{I\pi^3 \varphi_0^2} \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \frac{\sin(\varphi + \beta) \cdot \varphi d\varphi}{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}}. \quad (333)$$

L'intégrale prend la forme :

$$\cos \beta \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \frac{\sin \varphi \cdot \varphi d\varphi}{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}} + \sin \beta \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \frac{\cos \varphi \cdot \varphi d\varphi}{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}}.$$

La seconde intégrale est nulle, car si nous développons $\cos \varphi$ en série et que nous intégrons, nous verrons que les différents termes s'annulent deux à deux. Il nous reste donc à calculer :

$$\cos \beta \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \frac{\sin \varphi \cdot \varphi d\varphi}{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}}.$$

Développons $\sin \varphi$ en série ; l'intégrale devient :

$$\begin{aligned} & \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \frac{\left[\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots \right] \varphi d\varphi}{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}} \\ &= \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \frac{\varphi^2 d\varphi}{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}} - \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \frac{\varphi^4 d\varphi}{3! \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}} + \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \frac{\varphi^6 d\varphi}{5! \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}} - \dots \quad (334) \end{aligned}$$

Le terme général de cette série contient l'intégrale :

$$S_n = \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \frac{\varphi^{2n} d\varphi}{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}}.$$

Intégrons par parties en posant :

$$u = -\varphi^{2n-1}, \quad dv = \frac{-\varphi d\varphi}{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}},$$

d'où :

$$du = -(2n-1)\varphi^{2n-2}d\varphi, \quad v = \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}.$$

Il viendra donc :

$$\begin{aligned} S_n &= \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} u dv = [uv]_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} - \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} v du \\ &= \left[-\varphi^{2n-1} \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2} \right]_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} + (2n-1) \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \varphi^{2n-2} \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2} d\varphi. \end{aligned}$$

Mais, puisque $\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2} = 0$, pour $\varphi = \pm \varphi_0$, nous avons :

$$S_n = (2n-1) \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \varphi^{2n-2} \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2} d\varphi.$$

Multiplions et divisons par $\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}$:

$$\begin{aligned} S_n &= (2n-1) \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \varphi^{2n-2} \frac{\varphi_0^2 - \varphi^2}{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}} d\varphi \\ &= (2n-1) \varphi_0^2 \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \frac{\varphi^{2n-2} d\varphi}{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}} - (2n-1) \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \frac{\varphi^{2n} d\varphi}{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}}. \end{aligned}$$

Nous avons donc :

$$S_n = (2n-1) \varphi_0^2 S_{n-1} - (2n-1) S_n,$$

d'où nous tirons la formule de récurrence :

$$S_n = \frac{2n-1}{2n} \varphi_0^2 S_{n-1}. \quad (335)$$

Nous aurons successivement :

$$S_0 = \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}} = \left[\arcsin \frac{\varphi}{\varphi_0} \right]_{-\varphi}^{+\varphi_0} = \pi,$$

$$S_1 = \frac{1}{2} \varphi_0^2 S_0 = \frac{\pi}{2} \varphi_0^2,$$

$$S_2 = \frac{3}{4} \varphi_0^2 S_1 = \frac{3\pi}{2 \cdot 4} \varphi_0^4,$$

$$S_3 = \frac{5}{6} \varphi_0^2 S_2 = \frac{3 \cdot 5 \pi}{2 \cdot 4 \cdot 6} \varphi_0^6,$$

...

$$S_n = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-1) \pi}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \varphi_0^{2n}.$$

La série (334) devient :

$$S_1 - \frac{1}{3!} S_2 + \frac{1}{5!} S_3 - \dots = \frac{\pi}{2} \varphi_0^2 - \frac{1}{3!} \frac{3\pi}{2 \cdot 4} \varphi_0^4 + \frac{1}{5!} \frac{3 \cdot 5 \pi}{2 \cdot 4 \cdot 6} \varphi_0^6 - \dots$$

Introduite dans la formule (333), elle donne :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T_1}{T_1} &= - \frac{P \lambda T_1^2}{I \pi^3 \varphi_0^2} \cos \beta \left[\frac{\pi}{2} \varphi_0^2 - \frac{1}{3!} \frac{3\pi}{2 \cdot 4} \varphi_0^4 + \frac{1}{5!} \frac{3 \cdot 5 \pi}{2 \cdot 4 \cdot 6} \varphi_0^6 - \dots \right] \\ &= - \frac{P \lambda T_1^2}{I \pi^2} \cos \beta \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3!} \frac{3}{2 \cdot 4} \varphi_0^2 + \frac{1}{5!} \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \varphi_0^4 - \dots \right]. \end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T_1}{T_1} &= - \frac{P \lambda T_1^2 \cos \beta}{2 \pi^2 I} \left[1 - \frac{\varphi_0^2}{2^2 \cdot 2 \cdot 1^2} + \frac{\varphi_0^4}{2^4 \cdot 3 (1 \cdot 2)^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\varphi_0^6}{2^6 \cdot 4 (1 \cdot 2 \cdot 3)^2} + \frac{\varphi_0^8}{2^8 \cdot 5 (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4)^2} - \dots \right]. \end{aligned} \quad (336)$$

Introduisons la valeur du moment élastique C du spiral :

$$T_1 = \pi \sqrt{\frac{I}{C}}, \quad \frac{T_1^2}{\pi^2 I} = \frac{1}{C};$$

la formule (336) prend la forme :

$$\frac{\Delta T_1}{T_1} = -\frac{P\lambda \cos \beta}{2C} \left[1 - \frac{\varphi_0^2}{2^2 \cdot 2 \cdot 1^2} + \frac{\varphi_0^4}{2^4 \cdot 3(1 \cdot 2)^2} - \frac{\varphi_0^6}{2^6 \cdot 4(1 \cdot 2 \cdot 3)^2} + \frac{\varphi_0^8}{2^8 \cdot 5(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4)^2} - \dots \right]. \quad (337)$$

Les formules (336) et (337) sont équivalentes à celle de Phillips qui, le premier, a résolu ce problème.

Discussion de la formule de Phillips. — Les formules (336) et (337) montrent que la perturbation de la période due à un défaut d'équilibre du balancier est proportionnelle au produit $P\lambda$, au cosinus de l'angle β , et inversement proportionnelle au moment élastique du spiral ; elle dépend aussi de l'amplitude ; le calcul montre que la valeur de la série entre crochets est d'autant plus grande que φ_0 est petit.

Le défaut d'équilibre du balancier crée un défaut d'isochronisme.

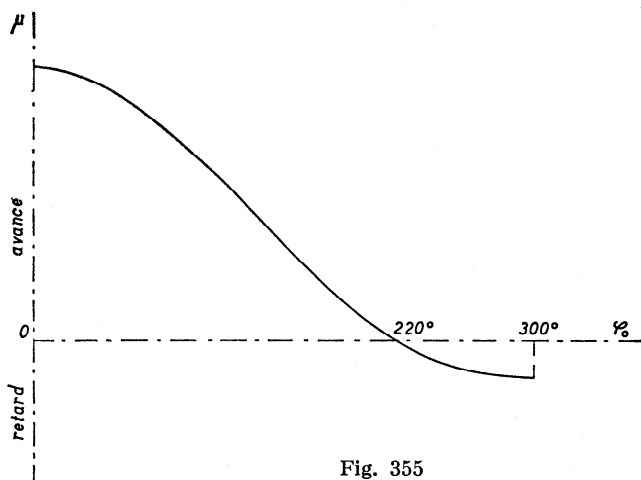


Fig. 355

Le signe de la perturbation dépend de celui de $\cos \beta$ et de celui de la valeur de la série. Pour $0 < \beta < 90^\circ$, $\frac{\Delta T_1}{T_1}$ a le signe contraire à celui de la série. Pour $\beta = \pm 90^\circ$, $\frac{\Delta T_1}{T_1} = 0$; si $\beta > 90^\circ$, $\cos \beta$ est négatif et $\frac{\Delta T_1}{T_1}$ a le même signe que la série entre crochets.

Les Grossmann ont calculé l'influence d'un défaut d'équilibre bien défini sur la période d'un balancier donné ; ils ont supposé $\beta = 0$, c'est-

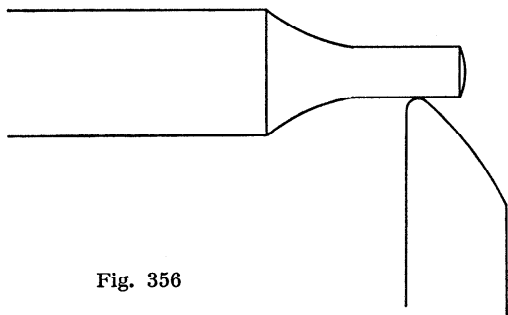
à-dire qu'au repos le centre de gravité du balancier se trouve au-dessous de l'axe supposé horizontal. La courbe de la figure 355 représente la marche diurne μ en fonction de l'amplitude, lorsque φ_0 varie de 0 à 300° ; elle coupe l'axe horizontal en un point correspondant à l'amplitude de 220° environ. Le défaut d'équilibre étudié par les Grossmann provoque une forte avance aux petites amplitudes; cette avance diminue au fur et à mesure que φ_0 augmente; elle s'annule pour $\varphi_0 \cong 220^\circ$, puis se change en retard pour $220^\circ < \varphi_0 < 300^\circ$; si l'amplitude varie, la marche de la montre est modifiée; aux environs de 0° et de 300° , la marche de la montre est peu influencée par une variation de l'amplitude.

Les praticiens cherchent à obtenir une amplitude du balancier voisine de 220° , lorsque la montre est dans une position verticale; ceci correspond à une amplitude de 270 à 300° , lorsque la montre est horizontale. Mais, dans la position horizontale, le défaut d'équilibre du balancier n'altère pas la période. Une amplitude supérieure à 220° a une influence plus faible sur la période qu'une amplitude inférieure à 220° .

Le défaut d'isochronisme provoqué par un défaut d'équilibre du balancier est très important: la marche diurne est modifiée de 39 s lorsque l'amplitude passe de 220 à 180° , dans le cas étudié par les Grossmann.

Si, dans une montre placée verticalement, on constate une variation de la marche indépendante de l'amplitude, on peut dire que cette

Fig. 356



variation ne provient pas d'un défaut d'équilibre du balancier.

Ce défaut n'a aucune influence sur la période: 1° quand la montre est horizontale, 2° quand l'amplitude est d'environ 220° , 3° quand le centre de gravité du balancier au repos est, dans la position verticale de la montre, sur l'horizontale passant par le centre de rotation ($\beta = \pm 90^\circ$; $\cos \beta = 0$).

L'équilibre du balancier est vérifié sur l'*outil aux équilibres* qui se compose de deux lames très bien polies et rigoureusement parallèles; ces lames en acier trempé, en agate ou en rubis ont des arêtes rectilignes et légèrement arrondies; elles peuvent être écartées l'une de l'autre tout en restant parallèles. Elles sont montées sur un support muni de trois pieds dont deux sont des vis de réglage au moyen desquelles on modifie l'inclinaison des arêtes; un niveau à bulle d'air permet de s'assurer de leur horizontalité. Le balancier est placé sur l'outil de façon que ses pivots reposent sur les arêtes des lames (fig. 356). Le balancier

équilibré et posé sur les lames aux arêtes horizontales reste immobile dans toutes les positions; s'il y a un défaut d'équilibre, le balancier tend à prendre la position dans laquelle le centre de gravité est le plus bas possible. Un facteur peut fausser l'opération: le frottement, d'où la nécessité de disposer de lames et de pivots propres et très bien polis et de donner de petites secousses à la table sur laquelle repose l'outil.

L'équilibre du balancier doit être vérifié avec le plateau en place, mais la virole fendue détruira l'équilibre, et le défaut d'isochronisme se manifestera quand la montre sera placée verticalement. Si tout est correct, il faut, pour rétablir l'équilibre et éliminer le défaut d'isochronisme, alléger le balancier à l'opposé de la fente de la virole.

La formule de Phillips contient le facteur C au dénominateur. Le défaut d'équilibre du balancier a d'autant plus d'influence que le moment élastique du spiral (et par conséquent aussi le moment d'inertie du balancier pour la même valeur de la période) est faible. Dans ce cas, le poids P est généralement diminué, mais il n'est pas dit qu'il y ait compensation, car C varie avec le moment d'inertie qui ne dépend pas seulement de la masse (ou du poids), mais aussi du carré du rayon de giration. On peut augmenter I sans modifier P en éloignant la masse de l'axe de rotation.

L'amplitude de 220° est privilégiée: à cette amplitude, le balancier-spiral est insensible aux défauts d'équilibre si gros soient-ils. On pourrait dire que, pour cette amplitude, la « puissance réglante » du balancier est maximum si l'on ne tient compte que des défauts d'équilibre. Le pouvoir réglant du balancier diminue dès qu'on s'éloigne de l'amplitude privilégiée, que ce soit dans un sens ou dans l'autre. Cet exemple explique la difficulté de trouver une définition mathématique de la « puissance réglante ».

La formule de Phillips permet de déceler la position du centre de gravité d'un balancier au repos; elle contient $\cos \beta$ qui varie de $+1$ à -1 ; la valeur absolue maximum correspond à $\beta = 0$ et $\beta = 180^\circ$. Dans ces deux positions et pour une amplitude donnée, la marche de la montre sera la plus grande; elle sera de l'avance dans une position, du retard dans l'autre.

Si l'on observe la montre dans différentes positions verticales, on constate que la marche est la plus forte lorsque le centre de gravité est sur la verticale passant par le centre du balancier; on saura s'il se trouve au-dessus ou au-dessous suivant que la marche est positive (avance) ou négative (retard), et cela compte tenu de la valeur de φ_0 . En effet, si l'amplitude est plus petite que 220° , le centre de gravité au-dessous de l'axe produit de l'avance; il produit du retard lorsque $\varphi_0 > 220^\circ$.

Position du centre de gravité d'un balancier déséquilibré. — Pour déterminer la retouche à faire à un balancier hors d'équilibre, il faut observer

la montre dans la position verticale et dans différents azimuts, pour une amplitude aussi éloignée que possible de 220° .

Désignons les différentes positions verticales d'après la position du pendent :

par	VH	la position	verticale,	pendant	en haut ;
»	VB	»	»	»	en bas ;
»	VD	»	»	»	à droite ;
»	VG	»	»	»	à gauche.

Si $\varphi_0 < 220^\circ$, l'avance est maximum pour $\beta = 0$. Si l'avance maximum est dans la position VD, il faut alléger le balancier dans la partie qui se trouve en bas lorsque la montre a la position VD. Il peut arriver que l'avance maximum se produise dans une position verticale intermédiaire entre deux des positions mentionnées plus haut.

La règle à appliquer par le praticien est : *pour corriger un défaut d'équilibre du balancier, il faut alléger celui-ci dans la partie la plus basse, quand la montre, dans la position verticale, a la plus grande avance (ou le plus faible retard) pour une amplitude inférieure à 220° .*

La marche de la montre placée verticalement pourrait être influencée par un autre facteur qu'un défaut d'équilibre du balancier ; la présence du défaut d'équilibre peut être reconnue parce que l'effet varie suivant la position du pendent.

Nous pouvons écrire la formule de Phillips :

$$\frac{\Delta T_1}{T_1} = K \cos \beta,$$

en posant :

$$K = -\frac{P\lambda}{2C} \left[1 - \frac{\varphi_0^2}{8} + \frac{\varphi_0^4}{192} - \frac{\varphi_0^6}{9216} + \frac{\varphi_0^8}{737280} - \dots \right].$$

Appelons β l'azimut correspondant à la position VH ; pour VD, l'azimut devient $\frac{\pi}{2} + \beta$; pour VB, $\pi + \beta$; pour VG, $\frac{3\pi}{2} + \beta$. La somme des perturbations relatives dans les quatre positions verticales est :

$$\sum \frac{\Delta T_1}{T_1} = K \left[\cos \beta + \cos \left(\frac{\pi}{2} + \beta \right) + \cos (\pi + \beta) + \cos \left(\frac{3\pi}{2} + \beta \right) \right],$$

soit :

$$\sum \frac{\Delta T_1}{T_1} = K (\cos \beta - \sin \beta - \cos \beta + \sin \beta) = 0. \quad (338)$$

Le tourbillon. — Abraham-Louis Breguet a imaginé un dispositif, le « tourbillon », qui compense automatiquement les différences de marche dans les positions verticales. Le perfectionnement apporté par le tourbillon est basé sur la formule (338).

Le balancier-spiral et l'échappement sont dans une cage fixée sur l'arbre du pignon des secondes qui fait un tour en une minute. Si la montre est dans une position debout, le centre de gravité du balancier (s'il était arrêté) passe, au cours d'une minute, par toutes les positions verticales ; d'après (338), il y a donc, chaque minute, compensation parfaite des effets d'un défaut d'équilibre du balancier. Si les différences de

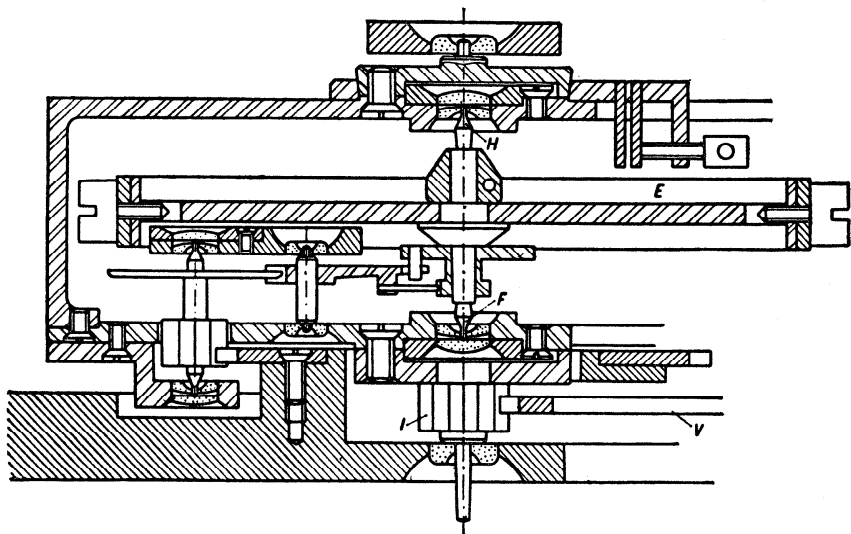


Fig. 357

marche ne sont pas nulles, c'est qu'il y a un ou plusieurs autres facteurs perturbateurs (défaut dans les pierres, trous ou pivots ovales). La roue des secondes est fixe ; vissée sur la platine, elle engrène dans le pignon d'échappement qui, entraîné par la cage, tourne autour de la roue des secondes (fig. 357). Le balancier *E* se trouve à l'intérieur de la cage ; les pivots *H* et *F* de son arbre tournent dans des coussinets solidaires de la cage ; la roue d'échappement et éventuellement l'ancre pivotent à l'intérieur de la cage.

Le fonctionnement est le suivant : le balancier exécute son oscillation ; pendant qu'il décrit l'arc supplémentaire, la cage est immobile, ainsi que l'échappement et le rouage, comme dans les montres ordinaires. La cage est constamment sollicitée par la force motrice agissant sur la

roue moyenne V et sur le pignon des secondes I , mais elle ne peut obéir à cette force, parce que la roue d'échappement est arrêtée contre le plan de repos (bascule, détente ou palette d'ancre). Dès que la roue d'échappement est libérée, la cage tourne d'un certain angle α ; le balancier prend une autre position d'équilibre, mais la cage s'arrête dès que la roue est de nouveau bloquée par la pièce qui porte le plan de repos. Pendant le mouvement de la cage, le pignon d'échappement a été entraîné et a décrit autour de l'axe de la cage (qui est aussi l'axe de la roue des secondes) le même angle α que la cage.

La roue et le pignon d'échappement ont un mouvement de rotation autour de leur axe et un mouvement de rotation autour de l'axe de la cage; les praticiens appellent parfois ce dernier mouvement une translation.

Le tourbillon est un mécanisme délicat et difficile à construire; une des plus grandes difficultés est de faire coïncider les axes de rotation de la cage et du balancier. Il va sans dire que la cage et les pièces qu'elle contient — sauf le balancier — doivent être légères et l'ensemble équilibré aussi bien que possible.

La période du balancier-spiral dans le tourbillon à détente. — Dans l'échappement à détente, le balancier reçoit une impulsion à chaque oscillation; appelons A_h le nombre d'alternances à l'heure; le balancier reçoit en une minute n impulsions:

$$n = \frac{A_h}{2 \cdot 60}.$$

La cage fait un tour en une minute, comme le pignon des secondes; elle tourne d'un angle α à chaque oscillation du balancier:

$$\alpha = \frac{360^\circ}{n} = \frac{360 \cdot 60 \cdot 2}{A_h}.$$

Si $A_h = 18\,000$, nous aurons:

$$\alpha = 2^\circ,4 = 2^\circ 24'.$$

Supposons, pour simplifier les calculs, que l'impulsion commence au moment du passage du balancier au point mort et qu'elle soit instantanée. Admettons que, tant que la position d'équilibre du balancier n'est pas modifiée, la période du balancier est normale et de durée T : c'est la période du balancier d'une montre sans tourbillon.

La durée normale de la demi-alternance descendante est $\frac{T}{4}$. La demi-alternance ascendante sera altérée par le déplacement de la position d'équilibre du balancier.

Dans le tourbillon à détente, la roue d'échappement tourne dans le

sens négatif (sens inverse de celui des aiguilles de la montre); il en va de même de la cage. Au moment où le couple de rappel est nul, il devient brusquement égal à Ca . Pour l'élongation φ (élongation positive dans la demi-alternance ascendante), le couple devient :

$$C(\varphi + \alpha),$$

de sorte que l'équation du mouvement angulaire est :

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} + C(\varphi + \alpha) = 0.$$

L'intégration de cette équation donne :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega = \sqrt{\frac{C}{I}} \sqrt{(\varphi_0^2 - \varphi^2) + 2\alpha(\varphi_0 - \varphi)}.$$

De cette équation, nous tirons :

$$dt = \sqrt{\frac{I}{C}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi_0^2 + 2\alpha\varphi_0 - 2\alpha\varphi - \varphi^2}}.$$

Posons $\varphi_0^2 + 2\alpha\varphi_0 = a$, $2\alpha = b$; nous obtenons :

$$dt = \sqrt{\frac{I}{C}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a - b\varphi - \varphi^2}}$$

et, par conséquent :

$$t = \sqrt{\frac{I}{C}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{a - b\varphi - \varphi^2}}.$$

Faisons la transformation suivante :

$$a - b\varphi - \varphi^2 = a + \frac{b^2}{4} - \left(\varphi + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(a + \frac{b^2}{4}\right) \left[1 - \left(\frac{\varphi + \frac{b}{2}}{\sqrt{a + \frac{b^2}{4}}}\right)^2\right].$$

Pour simplifier, posons :

$$\frac{\varphi + \frac{b}{2}}{\sqrt{a + \frac{b^2}{4}}} = z, \quad a + \frac{b^2}{4} = c^2;$$

nous obtenons :

$$a - b\varphi - \varphi^2 = c^2(1 - z^2).$$

Les deux variables φ et z sont reliées par la relation :

$$\varphi = cz - \frac{b}{2},$$

d'où :

$$d\varphi = cdz.$$

La valeur de t prend la forme :

$$t = \sqrt{\frac{I}{C}} \int \frac{cdz}{c\sqrt{1-z^2}} = \sqrt{\frac{I}{C}} \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

d'où :

$$t = \sqrt{\frac{I}{C}} \arcsin z + \text{constante.}$$

Réintroduisons la variable φ :

$$t = \sqrt{\frac{I}{C}} \arcsin \frac{\varphi + \alpha}{\varphi_0 + \alpha} + \text{constante.}$$

Pour $\varphi = 0$, nous avons $t = 0$. La constante d'intégration vaut donc :

$$- \arcsin \frac{\alpha}{\varphi_0 + \alpha}.$$

La valeur de t est :

$$t = \sqrt{\frac{I}{C}} \left(\arcsin \frac{\varphi + \alpha}{\varphi_0 + \alpha} - \arcsin \frac{\alpha}{\varphi_0 + \alpha} \right).$$

Pour obtenir la durée t_0 de la demi-alternance ascendante, il faut faire $\varphi = \varphi_0$ dans l'équation ci-dessus :

$$t_0 = \sqrt{\frac{I}{C}} \left(\arcsin 1 - \arcsin \frac{\alpha}{\varphi_0 + \alpha} \right) = \sqrt{\frac{I}{C}} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\alpha}{\varphi_0 + \alpha} \right). \quad (339)$$

L'oscillation se compose de trois demi-alternances non altérées et d'une quatrième dont la durée a été modifiée.

La période modifiée par le déplacement de la cage est T' :

$$T' = \frac{3T}{4} + \sqrt{\frac{I}{C}} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\alpha}{\varphi_0 + \alpha} \right),$$

d'où :

$$\Delta T = T' - T = - \sqrt{\frac{I}{C}} \arcsin \frac{\alpha}{\varphi_0 + \alpha} = - \frac{T}{2\pi} \arcsin \frac{\alpha}{\varphi_0 + \alpha}$$

et

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{-\arcsin \frac{\alpha}{\varphi_0 + \alpha}}{2\pi}. \quad (340)$$

La variation μ de la marche diurne vaut :

$$\mu = -86\,400 \frac{-\arcsin \frac{\alpha}{\varphi_0 + \alpha}}{2\pi} = 86\,400 \frac{\arcsin \frac{\alpha}{\varphi_0 + \alpha}}{2\pi}. \quad (341)$$

Les formules (340) et (341) montrent que le déplacement de la cage produit, dans le tourbillon à détente, un défaut d'isochronisme puisque φ_0 intervient.

Calculons μ d'après (341) en supposant que $\varphi_0 = 270^\circ$; l'angle α est (pour $A_h = 18\,000$) :

$$\alpha = 2^\circ 24' = 2,4,$$

d'où :

$$\mu = 86\,400 \frac{\arcsin \frac{2,4}{272,4}}{2\pi} = 121,15 \text{ s.}$$

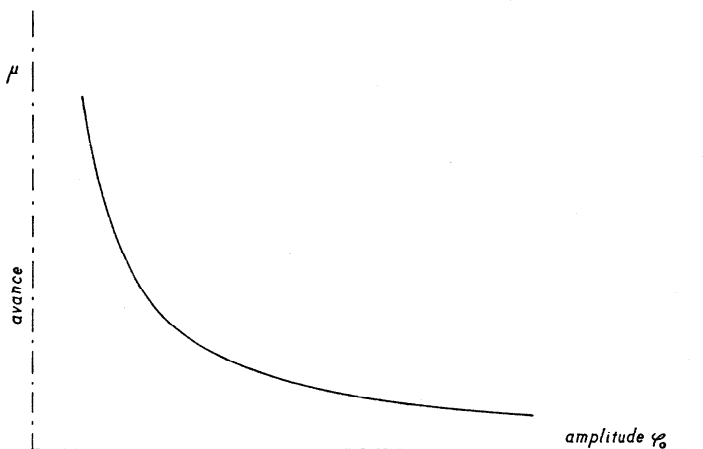


Fig. 358

Le déplacement de la cage fait avancer la montre puisque $T - T'$ est positif ; l'effet augmente dès que φ_0 diminue ; la courbe représentant la marche diurne a l'allure de celle qui est donnée dans la figure 358.

La période du balancier-spiral dans le tourbillon à ancre. — Dans l'échappement à ancre, le balancier reçoit une impulsion à chaque alternance. Le sens du mouvement du balancier varie d'une impulsion à la suivante, tandis que la cage a toujours le même sens de rotation. Une fois, le déplacement de la cage augmente le couple du spiral; il le diminue la fois suivante.

Pour deux alternances successives, les équations du mouvement diffèrent; elles sont :

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + C(\varphi + \alpha) = 0$$

et

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + C(\varphi - \alpha) = 0.$$

La formule (339) donne la durée t_0 de la demi-alternance ascendante dans le cas où le couple de rappel est $C(\varphi + \alpha)$:

$$t_0 = \sqrt{\frac{I}{C}} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\alpha}{\varphi_0 + \alpha} \right).$$

La durée t'_0 de la demi-alternance ascendante correspondant au couple de rappel $C(\varphi - \alpha)$ est donnée par la formule (339) dans laquelle nous remplaçons α par $-\alpha$:

$$t'_0 = \sqrt{\frac{I}{C}} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{-\alpha}{\varphi_0 - \alpha} \right),$$

soit :

$$t'_0 = \sqrt{\frac{I}{C}} \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{\alpha}{\varphi_0 - \alpha} \right).$$

La durée T' de l'oscillation a pour valeur :

$$T' = \frac{T}{2} + \sqrt{\frac{I}{C}} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\alpha}{\varphi_0 + \alpha} + \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{\alpha}{\varphi_0 - \alpha} \right),$$

d'où nous tirons, en remplaçant $\sqrt{\frac{I}{C}}$ par $\frac{T}{2\pi}$:

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2\pi} \left(\arcsin \frac{\alpha}{\varphi_0 + \alpha} - \arcsin \frac{\alpha}{\varphi_0 - \alpha} \right). \quad (342)$$

L'effet du déplacement de la cage sur la période du balancier-spiral dans le tourbillon à ancre est à peu près nul; c'est un très léger retard.

Simplification de la formule de Phillips. — La fonction de φ_0 contenue dans les formules (336) et (337) est une série assez rapidement convergente ; elle reste cependant pénible à calculer.

Keelhoff a donné une formule plus simple en considérant que la fonction de φ_0 peut être exprimée par une série de Fourier qui ne doit contenir que des termes en cosinus, puisque la fonction ne comporte que des termes avec des exposants pairs.

Appelons y la fonction de φ_0 contenue dans les formules (336) et (337) :

$$y = 1 - \frac{\varphi_0^2}{2^2 \cdot 2 \cdot 1^2} + \frac{\varphi_0^4}{2^4 \cdot 3(1 \cdot 2)^2} - \frac{\varphi_0^6}{2^6 \cdot 4(1 \cdot 2 \cdot 3)^2} + \dots$$

Posons :

$$y = A_0 + A_1 \cos m\varphi_0 + A_2 \cos 2m\varphi_0,$$

en nous contentant de trois termes en raison de la convergence rapide de la série.

Nous pouvons déterminer les quatre paramètres A_0 , A_1 , A_2 et m en considérant que la tangente à la courbe $y = f(\varphi_0)$ est horizontale pour $\varphi_0 = 0$ et $\varphi_0 = 300^\circ$:

$$\frac{dy}{d\varphi_0} = 0.$$

Keelhoff obtient finalement la formule :

$$y = 0,3950 + 0,5658 \cos 0,6\varphi_0 + 0,0392 \cos 1,2\varphi_0.$$

La formule de Phillips prend alors la forme :

$$\frac{\Delta T_1}{T_1} = - \frac{P\lambda \cos \beta}{2C} (0,3950 + 0,5658 \cos 0,6\varphi_0 + 0,0392 \cos 1,2\varphi_0),$$

qui est plus accessible au calcul et suffisamment exacte pour les amplitudes qui nous intéressent.

L'équation :

$$0,3950 + 0,5658 \cos 0,6\varphi_0 + 0,0392 \cos 1,2\varphi_0 = 0$$

donne la valeur de l'amplitude pour laquelle les défauts d'équilibre du balancier n'ont plus aucun effet sur la période :

$$\varphi_0 = 223^\circ 30'.$$

Défauts d'équilibre de l'ancre. — Si le centre de gravité de l'ancre ne se trouve pas sur l'axe de rotation, le poids de l'ancre, dans une position verticale de la montre, exerce un couple qui modifie la pression de la fourchette contre la cheville de plateau ; la période du balancier-spiral est altérée. Les anciens horlogers avaient coutume de mettre un contre-poids à la fourchette afin d'équilibrer l'ancre.

Cherchons à fixer l'ordre de grandeur de l'influence d'une ancre non équilibrée sur la période du balancier et sur la marche de la montre. Nous utiliserons la formule d'Airy :

$$\frac{\Delta T_1}{T_1} = \frac{T_1^2}{\pi^2 \varphi_0^2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\gamma \varphi d\varphi}{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}}.$$

Pour appliquer cette formule, il faut déterminer γ , l'accélération angulaire du balancier provoquée par le poids de l'ancre.

Soient (fig. 359) O_2 et O_3 les centres de l'ancre et du balancier. A un certain moment, la cheville de plateau, que, pour simplifier les calculs,

nous supposons réduite à un point, est en C . Le centre de gravité G de l'ancre est à la distance $GO_3 = \lambda$ du centre O_3 de l'ancre et sur une droite qui fait avec la verticale O_2V un angle β . Le moment du poids P de l'ancre par rapport à l'axe O_2 est :

$$P\lambda \sin \beta,$$

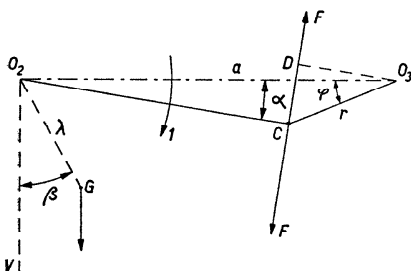


Fig. 359

lorsque l'axe de la fourchette coïncide avec O_2O_3 . Pour une

position quelconque de l'axe de la fourchette, le moment de P est :

$$P\lambda \sin (\beta + \alpha),$$

α étant l'angle qui caractérise la position de la fourchette :

$$\alpha = \sphericalangle O_3O_2C.$$

α est supposé positif quand il est compté dans le sens de la flèche 1 ; il est négatif dans le cas contraire.

Il importe de déterminer le moment de P par rapport à O_3 ; pour cela, cherchons une relation entre l'angle α et l'élongation correspondante φ du balancier.

Le triangle O_2O_3C dans lequel $O_3C = r$, $O_3O_2 = a$, donne :

$$\frac{r}{a} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \varphi)}.$$

Le poids P tend à faire tourner, dans le sens de la flèche 1, la fourchette qui exerce une pression F sur la cheville, laquelle réagit avec une pression égale et de sens contraire ; F est perpendiculaire à O_2C . Le moment de F par rapport à O_2 est égal à celui de P :

$$P\lambda \sin(\beta + \alpha) = Fx,$$

en désignant la distance O_2C par x . Le moment de F par rapport à O_3 est M :

$$M = F \cdot O_3D = Fr \cos(\alpha + \varphi)$$

ou

$$M = \frac{P\lambda}{x} \sin(\beta + \alpha) \cdot r \cos(\alpha + \varphi). \quad (343)$$

Mais :

$$x = \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos \varphi}.$$

Nous avons aussi :

$$\sin \alpha = \frac{r \sin \varphi}{x}, \quad \cos \alpha = \frac{a - r \cos \varphi}{x}.$$

Introduisons ces valeurs dans (343) ; nous avons finalement :

$$M = P\lambda r \frac{[r \sin(\varphi - \beta) + a \sin \beta](a \cos \varphi - r)}{(a^2 + r^2 - 2ar \cos \varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

ou, en posant $\frac{r}{a} = n$:

$$M = P\lambda n \frac{[n \sin(\varphi - \beta) + \sin \beta] \cos(\varphi - n)}{(1 + n^2 - 2n \cos \varphi)^{\frac{3}{2}}}.$$

L'accélération γ qui résulte de l'action du poids P sur la cheville vaut :

$$\gamma = -\frac{M}{I};$$

elle est de même signe que celle qui est provoquée par le spiral.

La formule d'Airy contiendra sous le signe d'intégration l'expression de M , dont le dénominateur a la même valeur pour φ et pour $-\varphi$; il en est de même du facteur $\cos(\varphi - n)$.

Nous allons intégrer entre des limites φ' et $-\varphi'$ égales et de signes contraires (φ' = demi-angle de levée du balancier). Le terme $\sin\beta \cos(\varphi - n)$ donnera un résultat nul, de sorte que la formule d'Airy devient :

$$\frac{\Delta T_1}{T_1} = - \frac{T_1^2}{\pi^3 \varphi_0^2} \frac{P \lambda n^2}{I} \int_{-\varphi'}^{+\varphi'} \frac{\cos(\varphi - n) \sin(\varphi - \beta) \cdot \varphi d\varphi}{(1 + n^2 - 2n \cos \varphi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}}.$$

Mais :

$$\sin(\varphi - \beta) = \sin \varphi \cos \beta - \cos \varphi \sin \beta.$$

Pour la raison invoquée plus haut, le résultat provenant du terme $\cos \varphi \sin \beta$ sera nul, de sorte que la perturbation relative a pour valeur :

$$\frac{\Delta T_1}{T_1} = - \frac{T_1^2}{\pi^3 \varphi_0^2} \frac{P \lambda n^2 \cos \beta}{I} \int_{-\varphi'}^{+\varphi'} \frac{\cos(\varphi - n) \sin \varphi \cdot \varphi d\varphi}{(1 + n^2 - 2n \cos \varphi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}}.$$

Mais φ ne dépasse que rarement 20° ; nous pouvons donc écrire, sans commettre d'erreur grave :

$$\sin \varphi = \varphi; \quad \cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}.$$

Pour 20° , nous avons :

$$\varphi = \frac{\pi}{9} = 0,349, \quad \sin \varphi = 0,325\,57.$$

L'erreur n'est pas négligeable certes, mais le présent calcul a pour but de fixer l'ordre de grandeur de la perturbation et, par là, de justifier l'emploi ou l'abandon du contrepoids.

La grandeur à intégrer devient :

$$\frac{\left(1 - \frac{\varphi^2}{2} - n\right) \varphi^2 d\varphi}{\left[1 + n^2 - 2n\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right)\right]^{\frac{3}{2}} \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}} = \frac{\left(1 - n - \frac{\varphi^2}{2}\right) \varphi^2 d\varphi}{[(1 - n)^2 + n\varphi^2]^{\frac{3}{2}} \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}}.$$

Mais :

$$\frac{1}{[(1-n)^2 + n\varphi^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(1-n)^3} \left[1 + \frac{n\varphi^2}{(1-n)^2} \right]^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{(1-n)^3} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{n\varphi^2}{(1-n)^2} \right].$$

en ne conservant que les deux premiers termes du développement en série du facteur :

$$\left[1 - \frac{n\varphi^2}{(1-n)^2} \right]^{-\frac{3}{2}}.$$

Faisons une simplification analogue pour :

$$\frac{1}{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}} = \frac{1}{\varphi_0} \left[1 - \left(\frac{\varphi}{\varphi_0} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\varphi_0} \left(1 + \frac{\varphi^2}{2\varphi_0^2} \right).$$

La grandeur sous le signe d'intégration devient :

$$\frac{\left(1 - n - \frac{\varphi^2}{2} \right) \left(1 - \frac{3}{2} \frac{n\varphi^2}{(1-n)^2} \right) \left(1 + \frac{\varphi^2}{2\varphi_0^2} \right) \varphi^2 d\varphi}{(1-n)^3 \varphi_0},$$

et, en ne conservant que les deux premiers termes en φ^2 et φ^4 :

$$\frac{1}{(1-n)^3 \varphi_0} \left[\left(1 - n \right) \varphi^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{2n+1}{1-n} - \frac{1-n}{\varphi_0^2} \right) \varphi^4 \right] d\varphi.$$

L'intégrale vaut donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-n)^3 \varphi_0} & \left[\left(1 - n \right) \int_{-\varphi'}^{+\varphi'} \varphi^2 d\varphi - \frac{1}{2} \left(\frac{2n+1}{1-n} - \frac{1-n}{\varphi_0^2} \right) \int_{-\varphi'}^{+\varphi'} \varphi^4 d\varphi \right] \\ & = \frac{1}{(1-n)^3 \varphi_0} \left[\left(1 - n \right) \frac{2\varphi'^3}{3} - \left(\frac{2n+1}{1-n} - \frac{1-n}{\varphi_0^2} \right) \frac{2\varphi'^5}{10} \right]. \end{aligned}$$

La perturbation relative a finalement la valeur :

$$\frac{\Delta T_1}{T_1} = - \frac{2T_1^2 P \lambda n^2 \cos \beta}{\pi^2 (1-n)^3 I} \left(\frac{\varphi'}{\varphi_0} \right)^3 \left[\frac{1-n}{3} - \left(\frac{2n+1}{1-n} - \frac{1-n}{\varphi_0^2} \right) \frac{\varphi'^2}{10} \right]. \quad (344)$$

La présence de $\cos \beta$ dans la formule (344) indique que la perturbation

dépend de la position de la montre; $\cos \beta$ peut varier de $+1$ à -1 . Comme le défaut d'équilibre du balancier, celui de l'ancre rend plus difficile le réglage dans les positions verticales. La présence de φ_0 dans (344) indique que *le défaut d'équilibre de l'ancre crée un défaut d'isochronisme*.

A première vue, nous ne pouvons pas dire si $\frac{\Delta T_1}{T_1}$ est grand ou petit.

Prenons, pour nous en rendre compte, le cas concret traité par les Grossmann (*Horlogerie théorique*, t. II, p. 246). Dans le système C. G. S. les valeurs sont :

$$P = 15,696 \text{ dynes}, \quad \varphi' = 20^\circ = \frac{\pi}{9} \text{ rad}, \quad \varphi_0 = 180^\circ = \pi \text{ rad},$$

$$T_1 = 0,2 \text{ s}, \quad \lambda = 0,05 \text{ cm}, \quad \alpha = 5^\circ = \frac{\pi}{36} \text{ rad},$$

$$\beta = 0, \quad I = 0,3924 \text{ g-cm}^2, \quad n = \frac{\sin 5^\circ}{\sin 25^\circ} = 0,2062.$$

La perturbation relative de l'alternance vaut :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T_1}{T_1} &= - \frac{2 \cdot 0,2^2 \cdot 15,696 \cdot 0,05 \cdot 0,2062^2 \cdot 1}{\pi^3 \cdot 0,7938^3 \cdot 0,3924} \left(\frac{1}{9}\right)^3 \left[\frac{0,7938}{3} - \left(\frac{1,4124}{0,7938} - \frac{0,7938}{\pi^2} \right) \left(\frac{\pi}{9}\right)^2 \frac{1}{10} \right] \\ &= - 0,147 \cdot 10^{-6} = - 0,000 \, 000 \, 147; \end{aligned}$$

elle provoque une variation de la marche diurne :

$$\mu = - 86 \, 400 \frac{\Delta T}{T} = + 0,0127 \text{ s},$$

car :

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta T_1}{T_1}.$$

L'influence du défaut d'équilibre de l'ancre est négligeable même dans le cas le plus défavorable, où $\beta = 0$.

Ce résultat justifie l'abandon du contrepoids à la fourchette. L'influence du poids de l'ancre hors d'équilibre est d'autant plus grande que l'amplitude φ_0 est petite. Nous avons effectué les calculs en admettant $\varphi_0 = \pi$ dans la position verticale de la montre; en réalité, l'amplitude ne descend en dessous de cette valeur que dans les cas exceptionnels où le ressort moteur a perdu une bonne partie de sa force élastique ou lorsque les huiles sont devenues très visqueuses.

Les défauts d'équilibre du spiral. — On conçoit sans peine qu'un spiral dont le centre de gravité n'est pas sur l'axe de rotation influencera, par son poids, la période du balancier-spiral. Le problème est plus compliqué

pour le spiral que pour le balancier, car le spiral se déforme et son centre de gravité se rapproche et s'éloigne constamment de l'axe pendant le mouvement.

Le spiral est attaché par l'une de ses extrémités à la virole solidaire du balancier, par l'autre à une pièce fixe, le pignon. En tournant, le balancier entraîne la virole et une des extrémités du spiral; puisque l'autre extrémité du spiral est fixe, le spiral s'enroule et se déroule. Quand il s'enroule, le nombre des spires augmente de celui des tours exécutés par la virole; les spires se rapprochent les unes des autres; tout le spiral tend à prendre moins de place. Puisque l'extrémité fixée au pignon ne peut pas céder, les spires opposées au pignon se resserrent; le centre de gravité du spiral se rapproche du pignon. Quand le spiral s'ouvre, le centre de gravité s'éloigne du pignon.

Mais où se trouve le centre de gravité d'un spiral au repos? Pour un spiral cylindrique ayant un nombre entier de spires, il se trouve sur l'axe du cylindre sur lequel la lame du spiral a été enroulée, c'est-à-dire sur l'axe de rotation du balancier-spiral si le spiral est bien placé.

Le centre de gravité d'un spiral plat n'est pas si facile à situer.

Le centre de gravité d'une spirale d'Archimède. — Nous admettons que la forme du spiral plat est une spirale d'Archimède, dont l'équation polaire est :

$$r = a\theta$$

r est le rayon vecteur correspondant à l'angle θ que forme ce rayon vecteur avec une direction donnée Ox ; a est une constante dont la valeur est fonction de l'écartement des spires, c'est-à-dire du pas p :

$$a = \frac{p}{2\pi}.$$

Le moment d'une courbe par rapport à un axe est égal à la somme des produits de chaque élément de la courbe par sa distance à l'axe. Considérons des éléments infiniment petits d'une courbe AB (fig. 360); les moments M_x et M_y de la courbe par rapport aux axes Ox et Oy sont :

$$M_x = \int y dl, \quad (345)$$

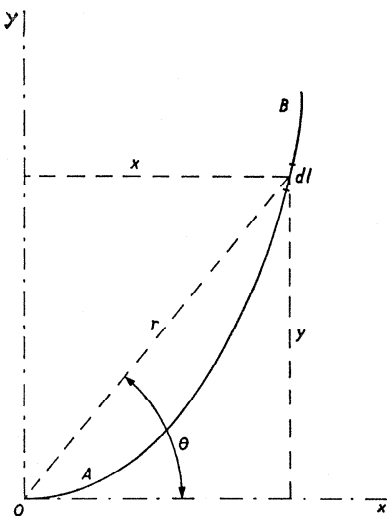


Fig. 360

$$M_y = \int x dl . \quad (346)$$

Le centre de gravité de la courbe a pour coordonnées x_c et y_c ; nous avons donc :

$$x_c L = \int x dl = M_y , \quad y_c L = \int y dl = M_x ,$$

d'où nous tirons :

$$x_c = \frac{M_y}{L} , \quad y_c = \frac{M_x}{L} , \quad (347)$$

formules dans lesquelles L désigne la longueur de la courbe AB . Calculons M_x et M_y pour la spirale d'Archimède. La longueur L de la spirale est donnée par la formule approchée, mais suffisante pour les cas qui nous intéressent :

$$L = \frac{a}{2} \theta^2 ,$$

si la spirale commence à l'origine O des coordonnées et si son extrémité a l'argument θ . Un élément d'arc aura donc pour valeur :

$$dl = a\theta d\theta .$$

Mais :

$$r = a\theta , \quad x = r \cos \theta = a\theta \cos \theta , \quad y = r \sin \theta = a\theta \sin \theta$$

et, par conséquent :

$$M_x = \int y dl = \int a\theta \sin \theta \cdot a\theta d\theta = a^2 \int \theta^2 \sin \theta d\theta .$$

En intégrant par parties, nous obtiendrons :

$$\begin{aligned} M_x &= a^2 \left[-\theta^2 \cos \theta + 2 \int \theta \cos \theta d\theta \right] = a^2 \left[-\theta^2 \cos \theta + 2 \left(\theta \sin \theta - \int \sin \theta d\theta \right) \right] \\ &= a^2 \left[-\theta^2 \cos \theta + 2\theta \sin \theta + 2 \cos \theta \right] . \end{aligned}$$

Nous trouverons de la même façon :

$$M_y = a^2 \left[\theta^2 \sin \theta + 2\theta \cos \theta - 2 \sin \theta \right] .$$

Pour la spirale entière, de $\theta = 0$ à $\theta = \theta_0$, nous avons :

$$\begin{aligned} M_x &= a^2 [-\theta_0^2 \cos \theta_0 + 2\theta_0 \sin \theta_0 + 2 \cos \theta_0], \\ M_y &= a^2 [\theta_0^2 \sin \theta_0 + 2\theta_0 \cos \theta_0 - 2 \sin \theta_0]. \end{aligned}$$

Les coordonnées du centre de gravité sont :

$$x_c = \frac{a^2 [\theta_0^2 \sin \theta_0 + 2\theta_0 \cos \theta_0 - 2 \sin \theta_0]}{\frac{a}{2} \theta_0^2},$$

soit :

$$x_c = 2a \left[\sin \theta_0 + \frac{2 \cos \theta_0}{\theta_0} - \frac{2 \sin \theta_0}{\theta_0^2} \right] \quad (348)$$

et

$$y_c = 2a \left[-\cos \theta_0 + \frac{2 \sin \theta_0}{\theta_0} + \frac{2 \cos \theta_0}{\theta_0^2} \right]. \quad (349)$$

Cherchons les coordonnées du centre de gravité de la spirale par rapport à un système d'axes rectangulaires Ox' et Oy' , dont l'axe Ox' passe par l'extrémité de la spirale ; ceci revient à faire tourner les anciens axes d'un angle égal à θ_0 . Les formules de transformation sont :

$$x' = x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0, \quad y' = -x \sin \theta_0 + y \cos \theta_0.$$

En introduisant dans ces formules les valeurs x_c et y_c données par (348) et (349), nous obtenons :

$$x'_c = \frac{4a}{\theta_0}, \quad (350)$$

$$y'_c = 2a \frac{1 - \theta_0^2}{\theta_0^2}. \quad (351)$$

Les moments de la spirale par rapport aux nouveaux axes sont, d'après (347) :

$$M_{x'} = y'_c L = 2a \frac{1 - \theta_0^2}{\theta_0^2} \cdot \frac{a}{2} \theta_0^2$$

ou

$$M_{x'} = a^2 - a^2 \theta_0^2 = a^2 - r_0^2 \quad (352)$$

et

$$M_{y'} = 2ar_0. \quad (353)$$

Les nouvelles valeurs des coordonnées du centre de gravité de la spirale d'Archimède s'écrivent dès lors comme suit :

$$x'_c = \frac{2ar_0}{L}, \quad (354)$$

$$y'_c = \frac{a^2 - r_0^2}{L}. \quad (355)$$

Le centre de gravité de la spirale d'Archimède ne se trouve pas à l'origine O de la courbe, puisque les coordonnées x'_c et y'_c ne sont pas nulles.

Comment ramener le centre de gravité à l'origine de la courbe? — Pour ramener le centre de gravité en O , nous ajouterons à la spirale d'Archimède une courbe dont les moments par rapport à Ox' et Oy' sont égaux et de signes contraires aux moments de la spirale, donnés par (352) et (353).

Appelons l la longueur de la courbe additionnelle, $m_{x'}$ et $m_{y'}$ les moments de cette courbe par rapport à Ox' et Oy' ; nous avons :

$$m_{x'} = -M_{x'} = r_0^2 - a^2, \quad (356)$$

$$m_{y'} = -M_{y'} = -2ar_0. \quad (357)$$

Si x_{1c} et y_{1c} désignent les coordonnées, par rapport aux axes Ox' et Oy' , du centre de gravité de la courbe supplémentaire, nous aurons les relations :

$$x_{1c} = -\frac{2ar_0}{l}, \quad lx_{1c} = -2ar_0, \quad (358)$$

$$y_{1c} = \frac{r_0^2 - a^2}{l}, \quad ly_{1c} = r_0^2 - a^2. \quad (359)$$

Dans les spiraux plats, a est très petit par comparaison à r_0 ; en effet, considérons un spirale de 14 tours et de rayon $r_0 = 0,4$ cm :

$$\theta_0 = 28\pi, \quad a = \frac{r_0}{\theta_0} = \frac{0,4}{28\pi} = 0,0045 \text{ cm},$$

donc $a \cong 1,1\%$ de r_0 . Dans ce cas :

$$lx_{1c} = -2ar_0 = -0,0036 \text{ cm}^2,$$

$$ly_{1c} = r_0^2 - a^2 = 0,16 - 0,000\,020\,68 \text{ cm}^2.$$

Pour les cas qui intéressent les horlogers, il est possible, sans commettre d'erreur intolérable, de poser :

$$lx_{1c} = 0, \quad (360)$$

$$ly_{1c} = r_0^2. \quad (361)$$

Les coordonnées du centre de gravité de la courbe additionnelle qui ramène à l'origine de la courbe le centre de gravité d'une spirale d'Archimède complète sont donc :

$$x_{1c} = 0, \quad (362)$$

$$y_{1c} = \frac{r_0^2}{l}. \quad (363)$$

Soit (fig. 361) une spirale d'Archimède dont l'origine est en O et l'extrémité en A . L'axe Ox est tangent à la spirale en O . La spirale comprend n tours complets plus un arc d'angle ε :

$$\theta_0 = 2\pi n + \varepsilon.$$

Choisissons un système d'axes de coordonnées rectangulaires Ox' et Oy' , tel que Ox' coïncide avec OA .

D'après (350) et (351), les coordonnées du centre de gravité G de cette spirale sont :

$$x'_c = \frac{4a}{\theta_0}, \quad y'_c = 2a \frac{1 - \theta_0^2}{\theta_0^2} = 2a \left(\frac{1}{\theta_0^2} - 1 \right).$$

Admettons les valeurs :

$$p = 0,22 \text{ cm}, \quad n = 10, \quad \varepsilon = 52^\circ = \frac{52\pi}{180} \text{ rad};$$

nous aurons :

$$a = \frac{p}{2\pi} = 0,035 \, 014 \text{ cm}, \quad \theta_0 = 20\pi + \frac{52\pi}{180} = 63,74 \text{ rad},$$

$$x'_c = 0,002 \, 197 \text{ cm}, \quad y'_c = -0,070 \text{ cm}.$$

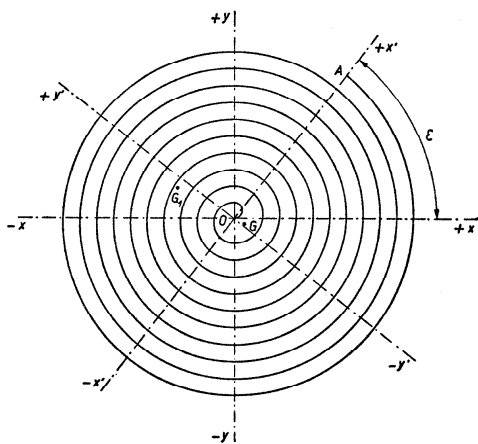


Fig. 361

Le centre de gravité G se trouve dans le 4^e quadrant. La longueur L de la spirale est :

$$L = \frac{a}{2} \theta_0^2 = 71,123 \text{ cm} ;$$

les moments de la spirale par rapport aux axes Ox' et Oy' sont :

$$M_{x'} = y'_c L = -4,9796 \text{ cm}^2, \quad M_{y'} = x'_c L = 0,1563 \text{ cm}^2.$$

Pour ramener le centre de gravité à l'origine au moyen d'une courbe additionnelle de longueur $l = 10,5 \text{ cm}$ par exemple, il faut que les coordonnées du centre de gravité G_1 de la courbe soient :

$$x_{1c} = -\frac{0,1563}{10,5} = -0,015 \text{ cm}, \quad y_{1c} = \frac{4,9796}{10,5} = 0,474 \text{ cm}.$$

G_1 se trouve dans le 2^e quadrant.

Déplacement du centre de gravité d'un spiral pendant le mouvement du balancier. — Pendant le mouvement du balancier, le spiral se tend et se détend ; cette modification de la forme entraîne une modification de la position du centre de gravité, parce que l'une des extrémités du spiral est fixe, tandis que l'autre se déplace en restant toujours à la même distance de l'axe du balancier. Il importe de se rendre compte de l'influence sur la période du balancier-spiral de ce déplacement du centre de gravité.

Pour simplifier, envisageons d'abord un spiral cylindrique attaché au piton qui supporte une grande partie du poids du spiral ; la déformation des spires inférieures (voisines de la virole) doit avoir une répercussion notable sur la période du balancier-spiral dans les positions verticales de la montre.

Pendant l'expansion du spiral, le rayon augmente plus qu'il ne diminue pendant la contraction correspondante.

Soient n le nombre des spires du spiral cylindrique, L la longueur et ϱ_0 le rayon lorsque le spiral est au repos :

$$L = 2\pi n \varrho_0, \quad \varrho_0 = \frac{L}{2\pi n}.$$

Diminuons le nombre de spires d'une unité en faisant tourner le balancier d'un tour ; le rayon devient :

$$\varrho_1 = \frac{L}{2\pi(n-1)} ;$$

il a augmenté de :

$$\varrho_1 - \varrho_0 = \frac{L}{2\pi} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = \frac{L}{2\pi} \frac{1}{n(n-1)}. \quad (364)$$

Par un raisonnement analogue, nous verrions que, lorsque n augmente d'une unité, le rayon diminue de :

$$\varrho_0 - \varrho_2 = \frac{L}{2\pi} \frac{1}{n(n+1)}; \quad (365)$$

en comparant (364) et (365), nous voyons que :

$$\varrho_0 - \varrho_2 < \varrho_1 - \varrho_0. \quad (366)$$

Influence de la position du point d'attache du spiral à la virole. —

Supposons que le point d'attache du spiral à la virole soit en haut, lorsque la montre est debout (fig. 362, position I) et que le balancier-spiral est au repos. A ce moment, le centre de gravité du spiral cylindrique composé d'un nombre entier de spires est en O .

Tournons le balancier-spiral de sorte que la virole prenne la position II : le spiral se resserre, son rayon diminue, le centre de gravité passe de O en a en parcourant la courbe Oa . Quand la virole est en III, le centre de gravité du spiral est en b , puis il passe en c pour la position IV de la virole et enfin en d quand la virole a exécuté un tour complet.

Si nous tournons la virole dans le sens opposé, le spiral s'agrandit ; lorsque la virole aura successivement passé les positions IV, III, II, I, le centre de gravité du spiral aura décrit dans le sens inverse la courbe $dcbao$.

Le balancier-spiral est maintenant dans sa position d'équilibre : continuons à dérouler le spiral, le centre de gravité décrira la courbe $Oab'c'd'$ qui n'est pas tout à fait la courbe symétrique de $Oabcd$, à cause de (366).

Dans la figure 363 nous avons reproduit les deux courbes à une plus grande échelle.

Négligeons l'effet du déplacement du centre de gravité de O en a ou en a' , puisque ce déplacement est très petit.

La montre est dans la position verticale VH ; quand le centre de gravité décrit $Oabcd$, nous sommes dans la demi-alternance « ascendante » ; le poids du spiral en augmente le couple, quand le centre de gravité passe de a à b , et produit un retard d'autant plus fort que le centre de gravité s'éloigne davantage de l'axe O . Quand ce centre décrit l'arc bcd , le poids agit en sens inverse du couple du spiral et produit une avance d'autant

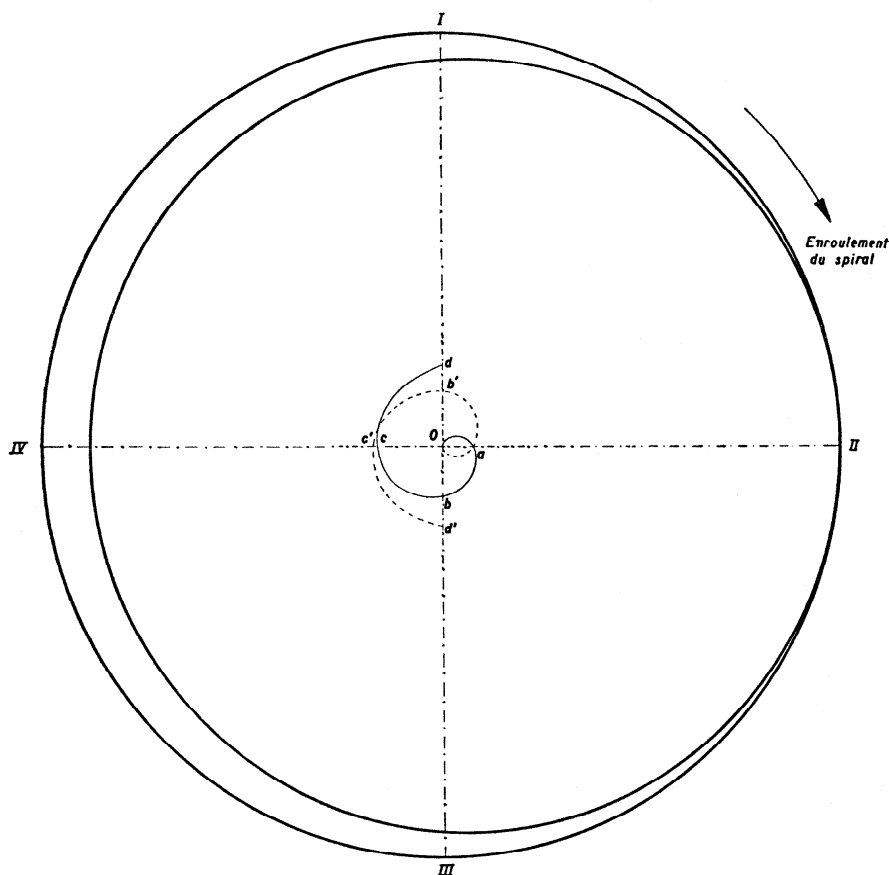


Fig. 362

plus grande que le centre de gravité s'éloigne davantage de O . Le retard de a à b est plus que compensé par l'avance de b à d : l'effet global sur la demi-alternance « ascendante » est une avance.

Pendant la demi-alternance « descendante » suivante, le centre de gravité décrit la courbe $dcb a O$; nous pouvons noter les périodes suivantes :

en dc se produit une avance,

en cb une avance,

en ba un retard et

en aO un effet négligeable.

L'effet global est une avance.

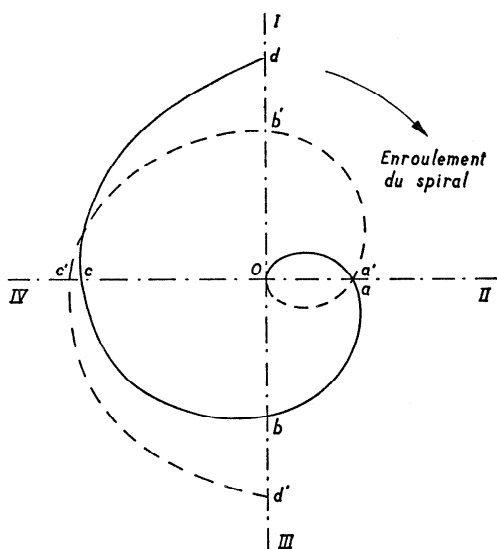


Fig. 363

A partir de ce moment, le spiral s'ouvre et le centre de gravité décrit, pendant la demi-alternance ascendante, la courbe $Oa'b'c'd'$. Ce déplacement du centre de gravité comporte les périodes suivantes :

Oa' au cours de laquelle l'effet est négligeable,
 $a'b'$ où se produit une avance,
 $b'c'$ où a lieu un retard et
 $c'd'$ où se produit aussi un retard.

L'effet global est un retard.

Au retour du balancier à la position d'équilibre (demi-alternance descendante), le centre de gravité du spiral décrit la même courbe en sens inverse : $d'c'b'a'O$; nous assistons aux périodes suivantes :

$d'c'$ où se produit un retard,
 $c'b'$ où a lieu un retard,
 $b'a'$ où une avance se manifeste et
 $a'O$ où l'effet est négligeable.

L'effet global est un retard.

Résumons dans un tableau l'ensemble de ces effets pour l'oscillation complète :

Etat du spiral	Demi-alternance	Courbe décrite	Effet
contraction	ascendante	$Oabcd$	avance
expansion	descendante	$dcbaO$	avance
expansion	ascendante	$Oa'b'c'd'$	retard
contraction	descendante	$d'c'b'a'O$	retard

L'effet produit pendant que le centre de gravité décrit $Oa'b'c'd'$ est plus grand que l'effet du déplacement du même point suivant la courbe $Oabcd$, donc :

l'effet total sur la période est un léger retard lorsque la montre est dans la position VH et que le point d'attache du spiral à la virole est en haut, ce spiral étant enroulé à droite.

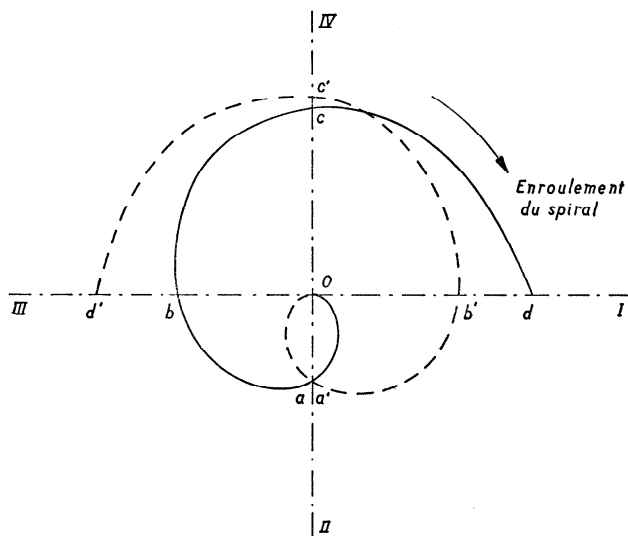


Fig. 364

Supposons maintenant que, pour le même spiral, le point d'attache soit à droite. Les courbes décrites par le centre de gravité sont représentées dans la figure 364.

L'examen de ces courbes conduit, pour la position VH, aux conclusions résumées dans le tableau suivant :

Etat du spiral	Demi-alternance	Courbe décrite	Effet
contraction	ascendante	<i>Oabcd</i>	retard
expansion	descendante	<i>dcbaO</i>	retard
expansion	ascendante	<i>Oa'b'c'd'</i>	retard
contraction	descendante	<i>d'c'b'a'O</i>	retard

L'effet total est un fort retard.

Il faut retenir que les déductions faites jusqu'à présent supposent que le spiral, *vu du piton*, s'enroule dans le sens positif (sens des aiguilles de la montre). Par contre, la position verticale de la montre est jugée d'après celle du pendant *vu du côté du cadran*. Nous pourrions donc établir le tableau suivant, qui donne l'effet de la position du point d'attache d'un spiral dextre sur la marche de la montre dans les positions verticales.

Position du point d'attache vu du côté du mouvement	Influence sur la marche de la montre lorsque le pendant vu du côté du cadran est :			
	<i>VH</i>	<i>VB</i>	<i>VD</i>	<i>VG</i>
en haut	négligeable	négligeable	avance	retard
en bas	négligeable	négligeable	retard	avance
à droite	retard	avance	négligeable	négligeable
à gauche	avance	retard	négligeable	négligeable

L'examen de ce tableau conduit à préférer pour les montres de poche la position du point d'attache à gauche, car 1^o l'effet sur la marche dans les positions *VD* et *VG* est négligeable, 2^o l'avance produite dans la position *VH* atténue le retard dû à l'échappement, 3^o le retard dans la position *VB* est supportable, parce que la montre se trouve rarement dans cette position.

Lorsque le spiral s'enroule à gauche (spiral sénestre), il faut placer le point d'attache à droite.

En d'autres termes, quel que soit le sens d'enroulement du spiral, il faut que la première demi-spire se trouve au-dessus de la virole, quand la montre est pendue.

Cette règle ne s'applique pas aux montres-bracelet. La position *VH*, fréquente pour les montres de poche, n'est presque jamais réalisée dans les *montres-bracelet portées au poignet gauche*; dans ces montres, la

position VB est naturelle. On cherchera à placer le point d'attache de façon que l'effet dans les positions VG et VD soit négligeable et qu'on ait une avance, lorsque le pendant est en bas ; le point d'attache sera à droite pour un spiral dextre, à gauche pour un spiral sénestre.

Il est également légitime de raisonner de la façon suivante : la montre-bracelet portée au bras gauche ne se trouve jamais dans la position VD ; plaçons alors le point d'attache de façon que le fort retard se produise dans cette position ; le point d'attache doit être en bas pour un spiral dextre.

Une montre-bracelet portée au bras droit ne prend jamais la position VD ; le point d'attache pourra être mis en bas pour un spiral dextre. Ou bien nous dirons que la position VH est naturelle et nous serons dans le même cas qu'avec la montre de poche.

L'application des règles du point d'attache. — Les règles du point d'attache ont été déduites en considérant le développement d'un spiral cylindrique attaché au piton et à la virole en des points de la première et de la dernière spire. Le développement du spiral plat est analogue, mais le déplacement du centre de gravité du spiral est moins grand. Les mêmes règles concernant le point d'attache peuvent être utilisées.

Ces règles n'ont aucun sens pour des spiraux cylindriques ou plats qu'on oblige, par un moyen ou par un autre, à se développer concentriquement à l'axe du balancier.

Certains régleurs appliquent la règle du point d'attache à des spiraux munis des courbes terminales étudiées plus loin. Or ces courbes, si elles sont correctes, maintiennent le centre de gravité du spiral sur l'axe : le point d'attache peut se trouver n'importe où ; le centre de gravité ne décrit plus la courbe $Oabcd$ de la figure 363, puisqu'il reste constamment en O .

Mais, pensent les régleurs, si l'application de la règle du point d'attache n'entraîne aucun avantage, elle ne provoque aucun inconvénient. En somme, intuitivement le régleur se rend compte que les courbes terminales ne sont jamais parfaites et, en appliquant la règle du point d'attache, il pense remédier aux imperfections des courbes terminales. C'est le cas, en effet, quand les courbes terminales ne sont pas assez efficaces et ne corrigent pas complètement le développement excentrique du spiral : celui-ci se développe alors dans le même sens que si les courbes n'existaient pas, mais à un degré moindre. L'application de la règle du point d'attache corrige l'effet du développement excentrique du spiral.

Si les courbes sont trop efficaces, c'est-à-dire si elles obligent le spiral à se développer dans un sens qui n'est pas celui du spiral sans courbe,

alors la règle du point d'attache peut avoir un effet néfaste. Il faudrait la modifier pour l'adapter à ce cas.

Si les régleurs font de bonnes expériences en appliquant dans tous les cas la règle du point d'attache, c'est qu'ils travaillent souvent sur des pièces du même calibre, avec des spiraux de même numéro, munis des mêmes courbes terminales.

Dans les montres-bracelet, on ne fait pas souvent une courbe terminale extérieure, qui augmente les risques d'accrochage, déjà grands lorsque le spiral est faible. Il est évident que, pour ces montres, la position du point d'attache du spiral à la virole a une importance considérable.

Dans tous les traités élémentaires de réglage¹, on trouve la description des méthodes et des outils qui permettent au régleur de poser le spiral de façon que le point d'attache à la virole soit à la bonne place.

La règle dite « du point d'attache » fut énoncée par Jules Grossmann.

Les courbes terminales. — Les anciens horlogers s'étaient rendu compte que le développement non concentrique du spiral a une mauvaise influence sur l'isochronisme et qu'en particulier la pression latérale qu'un spiral décentré exerce sur les pivots du balancier occasionne des perturbations de la marche et une usure des organes. Ils ont cherché les moyens d'obliger le spiral à se développer concentriquement à l'axe du balancier. Le chronométrier anglais Frodsham (1810-1871) a imaginé d'attacher l'extrémité extérieure du spiral à un ressort très flexible faisant l'effet d'un piton mobile ; l'extrémité du spiral peut ainsi suivre plus ou moins le mouvement des autres spires.

Un autre moyen consiste à terminer le spiral hélicoïdal par deux courbes et le spiral plat par une courbe située dans un plan parallèle au plan des spires du spiral. Les courbes dites « tâtées » furent déjà utilisées au milieu du XVIII^e siècle par l'horloger français Gourdain, puis surtout par John Arnold (1736-1799) pour les spiraux cylindriques. Enfin Abraham-Louis Breguet (1747-1823) eut l'idée d'appliquer ce procédé au spiral plat. Le spiral plat muni d'une ou de deux courbes terminales porte le nom de *spiral Breguet*.

Toutes ces tentatives visaient au même but : obliger le spiral à rester centré sur l'axe du balancier pendant le mouvement de ce dernier ; ce développement concentrique devait supprimer les pressions exercées sur les pivots du balancier.

Les courbes « tâtées » furent d'abord faites au petit bonheur, puis corrigées d'après les résultats de marche des chronomètres ; finalement quelques formes furent fixées et retenues.

¹ Voir par exemple : E. JAQUET, L. DEFOSSEZ et R. LAVEST. — *Cours élémentaire de réglage*. 4^e éd. — Le Locle, La Chaux-de-Fonds, Technicum neuchâtelois, 1951.

Les pressions sur l'axe ont préoccupé les horlogers. Berthoud connaissait la règle de l'isochronisme énoncée par Huygens :

un corps exécute des oscillations isochrones, lorsqu'il est constamment sollicité vers une position dite de repos, par une force variable, proportionnelle à l'élongation.

A la suite d'expériences faites au moyen de sa *balance élastique*, il avait appris que le couple du spiral est proportionnel à l'angle d'armage. Le spiral agissant seul sur le balancier contraint ce dernier à exécuter des oscillations isochrones. Berthoud en tirait la conséquence logique que, si le spiral exerce des pressions latérales sur les pivots du balancier, ces pressions détruisent l'isochronisme des oscillations.

Les conditions de Phillips. — Dans un ouvrage devenu classique : *Mémoires sur le spiral réglant des chronomètres et des montres* (Paris, 1861), Ed. Phillips a étudié les conditions à imposer au spiral cylindrique pour assurer l'isochronisme des oscillations du balancier-spiral. Ces conditions sont au nombre de trois :

1° le centre de gravité du spiral au repos doit se trouver au centre du spiral, c'est-à-dire sur l'axe du balancier ;

2° le centre de gravité du spiral en mouvement doit rester sur l'axe du balancier ;

3° le spiral ne doit exercer aucune pression sur les pivots du balancier.

Ces trois conditions ne sont pas inconciliables ; dès que l'une d'elles est remplie, les deux autres le sont aussi ou à peu près. Il suffit donc de chercher à munir le spiral de courbes qui ramènent son centre de gravité au repos sur l'axe du balancier.

Les formules (362) et (363) donnent les coordonnées du centre de gravité d'une telle courbe. Ces coordonnées sont :

$$x'_c = 0, \quad y'_c = \frac{r_0^2}{l}.$$

Rappelons que ces formules sont approximatives, puisque nous avons négligé les termes en a qui, en pratique, sont d'ailleurs très petits.

Il reste à montrer qu'un spiral terminé par une courbe dont le centre de gravité possède les coordonnées données par (362) et (363) et une longueur telle que les moments de cette courbe satisfont aux équations (360) et (361) se développe concentriquement, sans exercer de pression latérale sur les pivots du balancier.

La pression latérale sur les pivots du balancier et l'isochronisme. — Supposons, pour simplifier les figures et les calculs, que nous avons affaire à un spiral hélicoïdal de rayon r_0 au repos et de rayon r à l'état déformé.

Le spiral plat (spirale d'Archimède) peut être considéré comme formé d'une succession d'arcs de cercle infiniment petits, de rayon variable d'un arc à l'autre, mais ayant tous à peu près le même point O , centre du spiral ou origine de la spirale d'Archimède, comme centre de courbure.

Nous admettons que le spiral cylindrique se déforme de façon que la projection des spires reste un cercle de centre O . Nous avons traité ce cas en parlant, au chapitre IV (t. I, p. 99), du développement du ressort moteur; nous avons trouvé une formule (4) qui exprime la relation entre r , r_0 et l'angle d'armage α du ressort déformé :

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} = \frac{\alpha}{L},$$

formule que nous pouvons écrire :

$$r = \frac{r_0}{1 + r_0 \frac{\alpha}{L}}. \quad (367)$$

Supposons que la pression latérale P sur les pivots ne soit pas nulle, et soient X et Y (fig. 365) les composantes de cette pression suivant les axes Ox et Oy . La somme des moments des composantes par rapport au point O vaut :

$$Yx - Xy.$$

L'équation du mouvement du balancier est :

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + C\varphi + Yx - Xy = 0,$$

où φ désigne l'élongation du balancier.

Mais l'isochronisme est réalisé si l'équation a la forme :

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + C\varphi = 0,$$

c'est-à-dire si :

$$Yx - Xy = 0. \quad (368)$$

Multiplions (368) par ds , longueur d'un élément du spiral; nous obtenons :

$$Yxds - Xyds = 0$$

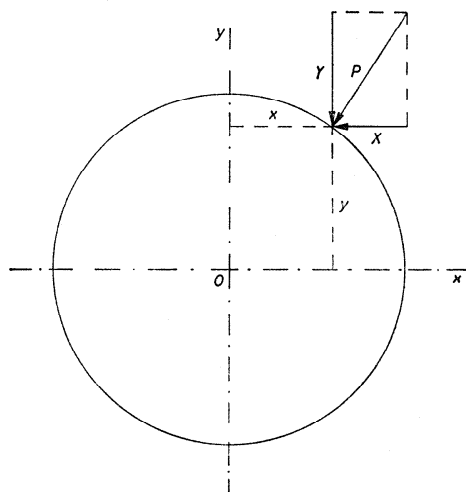


Fig. 365

ou

$$Y \int x ds - X \int y ds = 0.$$

Mais $\int x ds$ est le moment du spiral de longueur L par rapport à l'axe Oy ; c'est le produit de la longueur L par l'abscisse du centre de gravité du spiral :

$$\int x ds = x_c L, \quad \int y ds = y_c L.$$

L'équation (368) devient :

$$Y x_c L - X y_c L = 0$$

ou

$$Y x_c - X y_c = 0. \quad (369)$$

Les équations (368) et (369) sont équivalentes ; la première exprime aussi que la pression latérale sur les pivots a un moment nul ; or, elle est satisfaite pour :

$$x_c = 0; \quad y_c = 0.$$

Placé sur l'axe, le centre de gravité du spiral annule le moment de la pression latérale par rapport à l'axe du balancier et assure l'isochronisme des oscillations.

L'équation (369) est également satisfaite si :

$$X = 0, \quad Y = 0,$$

c'est-à-dire si la pression latérale elle-même est nulle.

Or, dans les chronomètres bien faits, avec un spiral se développant concentriquement à l'axe du balancier, la pression latérale sur les pivots doit être excessivement petite, à en juger par l'état des pivots et des coussinets après des années de fonctionnement. Le développement symétrique du spiral permet de prévoir que la somme des pressions latérales exercées par les différents éléments du spiral est nulle ou à peu près.

Le centre de gravité du spiral après la déformation. — Reprenons le spiral cylindrique de rayon initial r_0 , de rayon r après la déformation α , de longueur L et dont les spires gardent la forme circulaire ; nous avons la relation :

$$r = \frac{r_0}{1 + r_0 \frac{\alpha}{L}}.$$

Soit (fig. 366) $ABCD$ une portion de la courbe terminale encastrée en A , de façon que la tangente et la normale à la courbe en A ne changent pas pendant la déformation. B et C sont deux points très rapprochés l'un de l'autre ; le centre de courbure de la courbe en B est I ; celui de la courbe en C est K . Le triangle IKN a des côtés infiniment petits.

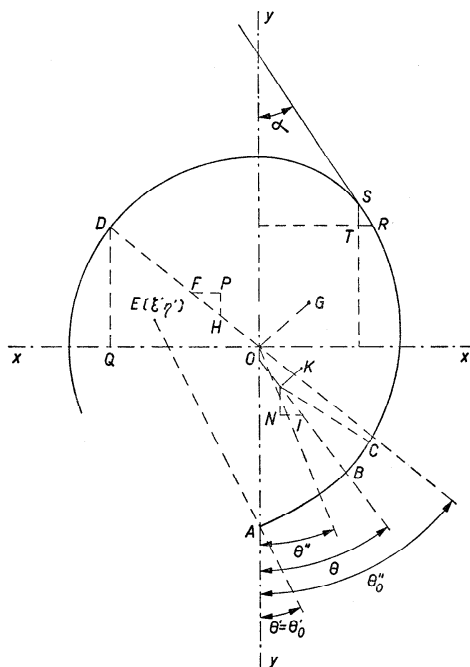


Fig. 366

Si r désigne le rayon de courbure de la courbe en B , ξ et η les coordonnées du centre de courbure en B par rapport à un système d'axes rectangulaires Ox et Oy dont le dernier passe par l'extrémité A de la courbe, nous avons :

$$IK = dr, \quad NK = d\eta, \quad IN = -d\xi$$

ou

$$d\eta = dr \cos \theta, \quad -d\xi = dr \sin \theta.$$

L'angle θ est celui que fait la normale en B avec la partie négative de l'axe Oy ; il varie avec la déformation, mais peut être exprimé en fonction du même angle θ_0 avant la déformation. En effet, l'équation :

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} = \frac{\alpha}{L}$$

devient, en tenant compte des notations introduites ci-dessus :

$$\frac{ds}{r} - \frac{ds}{r_0} = \frac{ads}{L}.$$

Pour deux points voisins tels que B et C , nous avons :

$$BC = ds = r d\theta.$$

Avant la déformation, nous avons :

$$ds = r_0 d\theta_0,$$

donc :

$$d\theta - d\theta_0 = \frac{ads}{L}.$$

Intégrons entre les points A et B ; compte tenu du fait que $AB = s$, nous obtenons successivement :

$$\begin{aligned} \int d\theta - \int d\theta_0 &= \frac{a}{L} \int ds, \\ \theta - \theta_0 &= \frac{as}{L}, \\ \theta &= \theta_0 + \frac{as}{L}. \end{aligned} \tag{370}$$

Cette formule contient la loi de variation de l'inclinaison du rayon de courbure en un point quelconque B de la courbe.

Les différentielles des coordonnées du centre de courbure deviennent :

$$d\xi = -\sin\left(\theta_0 + \frac{as}{L}\right) d\left(\frac{r_0}{1 + r_0 \frac{a}{L}}\right), \tag{371}$$

$$d\eta = \cos\left(\theta_0 + \frac{as}{L}\right) d\left(\frac{r_0}{1 + r_0 \frac{a}{L}}\right). \tag{372}$$

Soit E le centre de courbure pour le point A ; si nous utilisons l'indice ' pour désigner les valeurs se rapportant à l'extrémité A et l'indice '' pour celles qui conviennent à l'extrémité D de la courbe, les coordonnées ξ' et η' de ce centre seront :

$$\xi' = -AE \sin \theta' = -r' \sin \theta'_0, \quad \eta' = -AO + r' \cos \theta' = -\delta + r' \cos \theta'_0.$$

Puisque la courbe est encastrée en A , nous avons :

$$\theta' = \theta'_0,$$

donc :

$$\xi' = - \frac{r'_0}{1 + r'_0 \frac{\alpha}{L}} \sin \theta'_0, \quad (373)$$

$$\eta' = - \delta + \frac{r'_0}{1 + r'_0 \frac{\alpha}{L}} \cos \theta'_0; \quad (374)$$

la déformation est caractérisée par l'angle α .

Les formules (371) et (372) permettent de calculer les coordonnées ξ'' et η'' du centre de courbure de la courbe en D :

$$\xi'' = - \int \sin \left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L} \right) d \left(\frac{r_0}{1 + r_0 \frac{\alpha}{L}} \right).$$

Intégrons entre les limites correspondant aux points A et D ; la valeur de l'intégrale pour la limite correspondant à A est ξ' d'après (373). Nous avons donc :

$$\xi'' = - \frac{r'_0}{1 + r'_0 \frac{\alpha}{L}} \sin \theta'_0 - \int \sin \left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L} \right) d \left(\frac{r_0}{1 + r_0 \frac{\alpha}{L}} \right). \quad (375)$$

Nous trouverons de la même façon :

$$\eta'' = - \delta + \frac{r'_0}{1 + r'_0 \frac{\alpha}{L}} \cos \theta'_0 + \int \cos \left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L} \right) d \left(\frac{r_0}{1 + r_0 \frac{\alpha}{L}} \right). \quad (376)$$

En D la courbe terminale se raccorde aux spires : les normales en ce point se confondent. Soient F et H (fig. 366) les centres de courbure de la courbe et des spires en D après la déformation. Les coordonnées de F sont ξ'' et η'' ; désignons celles de H par ξ''' et η''' . La distance $FH = \varrho - r''$, ϱ étant le rayon des spires déformées et r'' le rayon de courbure de la courbe terminale en D après la déformation.

Dans le triangle FHP :

$$FH = \varrho - r'', \quad FP = \xi'' - \xi''', \quad PH = \eta'' - \eta'''.$$

Nous avons donc :

$$\xi'' - \xi''' = (\varrho - r'') \sin \theta''$$

ou

$$\xi''' = \xi'' - (\varrho - r'') \sin \theta'' = \xi'' - \varrho \sin \theta'' + r'' \sin \theta''$$

et

$$\xi''' = \xi'' - \frac{\varrho_0}{1 + \varrho_0 \frac{\alpha}{L}} \sin \left(\theta_0'' + \frac{\alpha l}{L} \right) + \frac{r_0''}{1 + r_0'' \frac{\alpha}{L}} \sin \left(\theta_0'' + \frac{\alpha l}{L} \right),$$

l désignant la longueur de la courbe AD . En introduisant la valeur (375), nous trouvons :

$$\begin{aligned} \xi''' = & - \frac{r_0'}{1 + r_0' \frac{\alpha}{L}} \sin \theta_0' + \frac{r_0''}{1 + r_0'' \frac{\alpha}{L}} \sin \left(\theta_0'' + \frac{\alpha l}{L} \right) \\ & - \frac{\varrho_0}{1 + \varrho_0 \frac{\alpha}{L}} \sin \left(\theta_0'' + \frac{\alpha l}{L} \right) - \int \sin \left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L} \right) d \left(\frac{r_0}{1 + r_0 \frac{\alpha}{L}} \right). \end{aligned}$$

Calculons le dernier terme en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} & \int_A^D \sin \left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L} \right) d \left(\frac{r_0}{1 + r_0 \frac{\alpha}{L}} \right) \\ &= \left[\sin \left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L} \right) \frac{r_0}{1 + r_0 \frac{\alpha}{L}} \right]_A^D - \int_A^D \frac{r_0}{1 + r_0 \frac{\alpha}{L}} d \left[\sin \left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L} \right) \right]. \end{aligned}$$

Mais :

$$\begin{aligned} \int \frac{r_0}{1 + r_0 \frac{\alpha}{L}} d \left[\sin \left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L} \right) \right] &= \int \frac{r_0}{1 + r_0 \frac{\alpha}{L}} \left(1 + \frac{\alpha}{L} \frac{ds}{d\theta_0} \right) \cos \left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L} \right) d\theta_0 \\ &= \int \frac{r_0}{1 + r_0 \frac{\alpha}{L}} \left(1 + r_0 \frac{\alpha}{L} \right) \cos \left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L} \right) d\theta_0 \\ &= \int r_0 \cos \left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L} \right) d\theta_0 = \int \cos \left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L} \right) ds \end{aligned}$$

La quantité ξ''' devient :

$$\begin{aligned} \xi''' = & -\frac{r'_0}{1+r'_0\frac{\alpha}{L}} \sin \theta'_0 + \frac{r''_0}{1+r''_0\frac{\alpha}{L}} \sin \left(\theta''_0 + \frac{\alpha l}{L} \right) - \frac{\varrho_0}{1+\varrho_0\frac{\alpha}{L}} \sin \left(\theta''_0 + \frac{\alpha l}{L} \right) \\ & - \frac{r''_0}{1+r''_0\frac{\alpha}{L}} \sin \left(\theta''_0 + \frac{\alpha l}{L} \right) + \frac{r'_0}{1+r'_0\frac{\alpha}{L}} \sin \theta'_0 + \int_0^l \cos \left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L} \right) ds, \end{aligned}$$

soit, après simplifications :

$$\xi''' = -\frac{\varrho_0}{1+\varrho_0\frac{\alpha}{L}} \sin \left(\theta'' + \frac{\alpha l}{L} \right) + \int_0^l \cos \left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L} \right) ds.$$

Des transformations analogues donnent :

$$\eta''' = -\delta + \frac{\varrho_0}{1+\varrho_0\frac{\alpha}{L}} \cos \left(\theta''_0 + \frac{\alpha l}{L} \right) + \int_0^l \sin \left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L} \right) ds.$$

Pour que le centre des spires déformées reste sur l'axe, il faut que $\xi''' = 0$ et $\eta''' = 0$, soit que :

$$\frac{\varrho_0}{1+\varrho_0\frac{\alpha}{L}} \sin \left(\theta''_0 + \frac{\alpha l}{L} \right) = \int_0^l \cos \left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L} \right) ds$$

et

$$\delta - \frac{\varrho_0}{1+\varrho_0\frac{\alpha}{L}} \cos \left(\theta''_0 + \frac{\alpha l}{L} \right) = \int_0^l \sin \left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L} \right) ds.$$

Les quantités $\frac{\alpha l}{L}$, $\frac{\alpha s}{L}$, $\frac{\alpha \varrho_0}{L}$ sont petites, de sorte que nous pouvons poser :

$$\sin \left(\theta''_0 + \frac{\alpha l}{L} \right) = \sin \theta''_0 + \frac{\alpha l}{L} \cos \theta''_0,$$

$$\cos \left(\theta''_0 + \frac{\alpha l}{L} \right) = \cos \theta''_0 - \frac{\alpha l}{L} \sin \theta''_0,$$

$$\cos \left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L} \right) = \cos \theta_0 - \frac{\alpha s}{L} \sin \theta_0,$$

$$\sin\left(\theta_0 + \frac{\alpha s}{L}\right) = \sin\theta_0 + \frac{\alpha s}{L} \cos\theta_0,$$

$$\frac{\varrho_0}{1 + \varrho_0 \frac{\alpha}{L}} = \varrho_0 \left(1 - \frac{\alpha \varrho_0}{L}\right).$$

Ainsi, pour que le centre des spires reste sur l'axe, il faut que :

$$\varrho_0 \left(1 - \frac{\alpha \varrho_0}{L}\right) \left(\sin\theta_0'' + \frac{\alpha l}{L} \cos\theta_0''\right) = \int_0^l \left(\cos\theta_0 - \frac{\alpha s}{L} \sin\theta_0\right) ds$$

et

$$\delta - \varrho_0 \left(1 - \frac{\alpha \varrho_0}{L}\right) \left(\cos\theta_0'' - \frac{\alpha l}{L} \sin\theta_0''\right) = \int_0^l \left(\sin\theta_0 + \frac{\alpha s}{L} \cos\theta_0\right) ds.$$

La première de ces deux équations peut s'écrire :

$$\varrho_0 \sin\theta_0'' + \varrho_0 \frac{\alpha l}{L} \cos\theta_0'' - \frac{\alpha \varrho_0^2}{L} \sin\theta_0'' - \frac{\alpha^2 \varrho_0^2 l}{L^2} \cos\theta_0'' = \int_0^l \cos\theta_0 ds - \int_0^l \frac{\alpha s}{L} \sin\theta_0 ds.$$

Nous pouvons négliger le terme en α^2 et égaler les termes indépendants de α , puis les autres termes ; nous obtenons deux nouvelles équations :

$$\varrho_0 \sin\theta_0'' = \int_0^l \cos\theta_0 ds \quad (377)$$

et

$$\varrho_0 \frac{\alpha l}{L} \cos\theta_0'' - \frac{\alpha \varrho_0^2}{L} \sin\theta_0'' = - \int_0^l \frac{\alpha s}{L} \sin\theta_0 ds$$

ou

$$\varrho_0 l \cos\theta_0'' - \varrho_0^2 \sin\theta_0'' = - \int_0^l \sin\theta_0 \cdot s ds. \quad (378)$$

En partant de l'équation $\eta''' = 0$, nous obtenons par des calculs semblables aux précédents :

$$\delta - \varrho_0 \cos\theta_0'' = \int_0^l \sin\theta_0 ds, \quad (379)$$

$$\varrho_0^2 \cos \theta_0'' + \varrho_0 l \sin \theta_0'' = \int_0^l \cos \theta_0 \cdot s ds. \quad (380)$$

Nous avons supposé qu'avant la déformation le centre du spiral est en O (fig. 366) :

$$\varrho_0 \sin \theta_0'' = QO.$$

Mais :

$$QO = \int_0^l \cos \theta_0 ds = \int_0^l dx;$$

l'équation (377) est donc satisfaite. Il en est de même de l'équation (379) dont les membres représentent les projections de OA et OD sur Oy avant la déformation du spiral.

Cherchons à interpréter les équations (378) et (380), et tout d'abord :

$$\int_0^l \sin \theta_0 \cdot s ds.$$

Dans le triangle RST (fig. 366), l'angle $RST = \alpha$ vaut :

$$\alpha = 90^\circ - \theta_0,$$

donc :

$$dx = \sin \alpha ds = \cos \theta_0 ds, \quad dy = \cos \alpha ds = \sin \theta_0 ds,$$

et

$$\int_0^l \sin \theta_0 \cdot s ds = \int_0^l s dy = [sy]_0^l - \int_0^l y ds.$$

Or :

$$[sy]_0^l = -l\varrho_0 \cos \theta_0'',$$

puisque l'ordonnée de D est $\varrho_0 \cos \theta_0''$. D'autre part :

$$\int_0^l y ds$$

représente le moment de la courbe par rapport à l'axe des x .

Soient x'_c et y'_c les coordonnées du centre de gravité de la courbe :

$$\int_0^l y ds = ly'_c.$$

En définitive, l'équation (378) devient :

$$\varrho_0 l \cos \theta_0'' - \varrho_0^2 \sin \theta_0'' = \varrho_0 l \cos \theta_0'' + l y'_c,$$

d'où :

$$l y'_c = - \varrho_0^2 \sin \theta_0'',$$

soit :

$$y'_c = - \frac{\varrho_0^2}{l} \sin \theta_0''. \quad (381)$$

Par des transformations analogues, l'équation (380) donne :

$$x'_c = - \frac{\varrho_0^2}{l} \cos \theta_0''. \quad (382)$$

Les équations (381) et (382) permettent de situer le centre de gravité G de la courbe ABD . En effet (fig. 366) :

$$\operatorname{tg} GOx = \frac{y'_c}{x'_c} = \operatorname{tg} \theta_0'',$$

d'où nous concluons que :

1° pour que le centre des spires reste en O après la déformation, il faut que le centre de gravité de la courbe se trouve, avant la déformation, sur une perpendiculaire au rayon aboutissant à la naissance de la courbe.

Des équations (381) et (382), nous tirons :

$$\overline{OG}^2 = x_c'^2 + y_c'^2 = \frac{\varrho_0^4}{l^2} (\cos^2 \theta_0'' + \sin^2 \theta_0''),$$

d'où :

$$OG = \frac{\varrho_0^2}{l}.$$

2° la distance au centre du spiral du centre de gravité de la courbe avant la déformation doit être égale au carré du rayon des spires non déformées (à la naissance de la courbe) divisé par la longueur de la courbe.

Or ces conditions sont celles que nous avons déduites pour la courbe capable de ramener le centre de gravité de la spirale d'Archimède non déformée sur l'axe du balancier (voir les équations (362) et (363)).

Ainsi les courbes terminales qui remplissent les conditions 1° et 2° (p. 340) ramènent le centre de gravité du spiral complet au repos sur l'axe du balancier et l'y maintiennent pendant la déformation ; elles obligent le spiral à se développer concentriquement, c'est-à-dire sans exercer de pression sur les pivots du balancier.

Valeur pratique des courbes terminales de Phillips. — Les déductions qui nous ont conduit à formuler les conditions que doivent remplir les courbes terminales reposent sur des hypothèses plus ou moins exactes.

Phillips a pris pour point de départ de sa théorie le spiral tel qu'il se trouve dans les chronomètres de marine : spiral cylindrique, parfaitement encastré au piton, sans goupilles de raquette. Cette théorie est-elle valable pour le spiral plat ? Nous avons montré que, moyennant certaines simplifications, le même résultat peut être obtenu dans ce cas. Phillips avait déjà examiné cette question et avait trouvé que sa théorie pouvait s'appliquer au spiral plat à la condition que celui-ci n'ait pas à supporter de trop grandes déformations α . Rappelons que α est l'angle décrit par le rayon de courbure (ou par la tangente) pendant la déformation. Dans les spiraux plats l'angle α reste petit, bien que l'extrémité du spiral attachée à la virole décrive un grand angle (environ $\pm 1,5\pi$).

Dans les formules (358) et (359), nous avons supposé $a = 0$, ce qui n'est pas tout à fait exact pour le spiral plat ; nous avons utilisé pour la longueur de la spirale d'Archimède la formule approchée :

$$L = \frac{a\theta_0^2}{2}.$$

Nous avons admis également que $\frac{as}{L}$ et $\frac{al}{L}$ sont si petits que le sinus peut être remplacé par l'angle et le cosinus par l'unité ; nous avons supposé que $\frac{a\varrho_0}{L}$ est petit. Ces trois valeurs sont d'autant plus petites que L est grand. La théorie des courbes terminales est donc plus exacte pour les longs spiraux que pour les courts ; les anciens horlogers l'avaient pressenti qui préconisaient les longs spiraux, plus propices d'après eux à l'obtention de l'isochronisme.

Pour $\alpha = 1,5\pi$ et pour un spiral cylindrique de 10 tours, nous avons :

$$\frac{a}{L} = \frac{1,5\pi}{20\pi\varrho_0} \cong \frac{1}{13\varrho_0}.$$

Nous calculerons le rayon ϱ du spiral déformé d'après :

$$\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} = \frac{a}{L},$$

d'où :

$$\varrho = \frac{13}{14}\varrho_0.$$

Ce calcul montre que la courbure du spiral varie relativement peu, même lorsque la virole tourne de $\frac{3}{4}$ de tour.

Les courbes terminales de Phillips appelées aussi *courbes théoriques* rendent de grands services aux horlogers ; elles permettent généralement de régler les montres ordinaires, ce qui ne signifie pas qu'il suffit de munir un spiral d'une courbe Phillips pour que le réglage soit terminé. Cette courbe corrige le défaut d'équilibre du spiral, mais pas celui du balancier ; elle ne supprime ni l'influence de l'échappement ni celle de la température ni celle des goupilles de la raquette, etc.

Pour le réglage de précision, les courbes terminales théoriques ne suffisent pas ; le régleur y apporte de légères modifications rendues nécessaires du fait que la théorie de Phillips repose sur des hypothèses exactes uniquement dans le cas des spiraux hélicoïdaux. Mais peut-on parler d'encastrement, et surtout d'encastrement parfait, pour un spiral plat dont la spire extérieure (ou la courbe terminale extérieure) est tenue entre les goupilles de la raquette ?

Moulin et Keelhoff ont repris la théorie de Phillips pour le spiral plat ; ils ont tenté de tenir compte de l'encastrement imparfait de l'extrémité extérieure du spiral ; au lieu de poser :

$$\sin \frac{al}{L} = \frac{al}{L}, \quad \cos \frac{al}{L} = 1,$$

ils ont développé ces fonctions en série, dont ils ont pris en considération les premiers termes. Ils ont ainsi apporté aux conditions de Phillips quelques corrections.

Le régleur de précision retouche les courbes terminales d'après la marche du chronomètre ; il se soucie peu, à ce moment-là, de la forme théorique des courbes car, en déformant celles-ci, il cherche à compenser des effets qui ne proviennent pas tous du développement anormal du spiral.

Relevons enfin que la courbe Phillips la plus parfaite cesse de l'être dès que les goupilles de la raquette sont déplacées, car ce déplacement modifie la position du centre de gravité de la courbe en même temps que sa longueur : les moments de la courbe par rapport aux axes Ox et Oy n'ont plus les valeurs exactes.

Comment dessiner une courbe Phillips. — Les conditions de Phillips concernent la position du centre de gravité de la courbe en fonction du rayon du spiral à la naissance de la courbe et de la longueur de cette dernière ; elles n'impliquent rien au sujet de la forme de la courbe. Une infinité de courbes peuvent donc remplir les conditions de Phillips. Toutes

ces courbes rendront le spiral isochrone, du moins dans les limites que nous avons signalées, mais toutes ne seront pas pratiques.

Dans une montre munie d'une raquette avec des goupilles tenant la lame du spiral, il faut que l'extrémité de la courbe soit un arc de circonférence dont le centre se trouve sur l'axe du balancier et dont le rayon soit égal à la distance qui sépare l'axe de l'espace situé entre les goupilles.

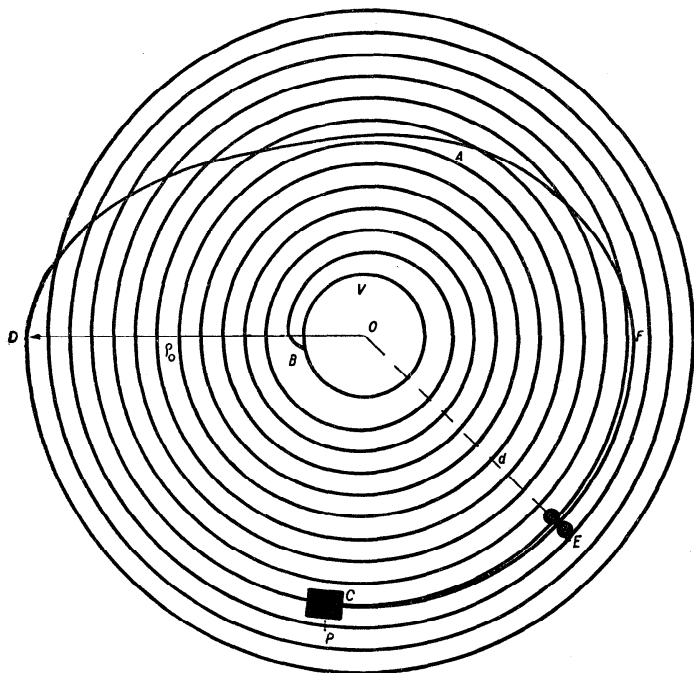


Fig. 367

Les courbes terminales sont souvent désignées par un numéro N ; celui-ci est le quotient, multiplié par 100, de la distance des goupilles à l'axe par le rayon ϱ_0 du spiral à la naissance de la courbe.

Soit (fig. 367) un spiral encastré en B dans la virole V et en C dans le pignon P . La courbe terminale DAE est dans un plan supérieur et parallèle au plan des spires; elle passe en E entre les deux goupilles de la raquette. La partie active du spiral va de B à E en passant par D et A .

Le numéro du spiral est :

$$N = 100 \frac{d}{\varrho_0}.$$

Dans la figure, $d = 3,6$ cm, $\varrho_0 = 4,5$ cm, donc :

$$N = 100 \frac{3,6}{4,5} = 80.$$

La position du centre de gravité de la courbe dépend de la longueur l de celle-ci ; la longueur $DAE = l$ occupe sur la spire extérieure un angle β dit *angle de développement*.

Soit $\beta = 1,5\pi$ rad $= \frac{3}{4}$ de tour :

$$l = \varrho_0 \beta = 1,5\pi \varrho_0.$$

Dans le cas de la figure 367, nous aurions :

$$l = 1,5\pi \cdot 4,5 \cong 21,2 \text{ cm}.$$

Celui qui doit dessiner une courbe terminale correcte dispose généralement des données suivantes : le rayon extérieur ϱ_0 du spiral (en fonction du diamètre du balancier), l'angle occupé par la courbe et la distance d des goupilles au centre de la raquette.

Soit (fig. 368) $\varrho_0 = 4$ cm, $d = 2,6$ cm ; le numéro de la courbe est :

$$N = 100 \frac{2,6}{4} = 65.$$

Soit $DOE = 270^\circ$ l'angle occupé par la courbe. Traçons le cercle (O, ϱ_0) et faisons $OE = d = 2,6$ cm. Le début D de la courbe est sur l'axe Ox . L'arc de cercle (O, d) passe par E ; il doit terminer la courbe cherchée afin que le déplacement des goupilles puisse se faire sans que la courbe soit déformée.

Dessignons une courbe approximative qui se raccorde en D à l'arc (O, ϱ_0) et en F , par exemple, à l'arc (O, d) .

Portons sur la courbe à partir de E une longueur de 1 cm qui détermine les points 1, 2, 3, 4, ..., 13 ; le segment $E-1$ que nous considérons comme rectiligne a son centre de gravité en I ; le centre de gravité du segment 1-2 est en II, etc. Le dernier segment 13- D n'a que 0,7 cm ; son centre de gravité XIV a les coordonnées x_{XIV} et y_{XIV} ; mais ce segment n'est que 0,7 fois aussi long qu'un segment normal : le moment de ce segment par rapport à Ox vaut :

$$0,7 y_{XIV}.$$

Il faut que les grandeurs mesurées soient telles que :

$$\sum x = 0, \quad (383)$$

$$\sum y = \varrho_0^2 = 16. \quad (384)$$

En général, les équations (383) et (384) ne sont pas satisfaites ; il faut alors retoucher la courbe. Supposons que nous ayons trouvé :

$$\sum x > 0, \quad \sum y < 16 ;$$

il faut éloigner la courbe dans le quadrant I ou la rapprocher dans le quadrant III ou faire les deux retouches à la fois. Après quelques tâtonnements, nous trouverons des valeurs de x et de y qui satisfont les équations (383) et (384). La courbe est alors correcte ; nous pouvons en mesurer la longueur l à laquelle nous ajouterons la longueur de l'arc EC ; l'angle de développement est calculé au moyen de :

$$l = \beta \varrho_0$$

et vaut :

$$\beta = \frac{l}{\varrho_0}.$$

Courbe Phillips formée d'un arc de cercle. — Voyons si un arc de cercle peut remplir les conditions de Phillips, c'est-à-dire passer par le point E des goupilles et se raccorder à la spire extérieure du spiral de rayon ϱ_0 .

Appelons r le rayon de l'arc DE (fig. 369) formant une courbe théorique ; la courbe est caractérisée par r et l'angle $DO_1E = 2\beta$.

Par raison de symétrie, le centre de gravité de l'arc DE est sur le rayon O_1B perpendiculaire à ED ; il est en G , de sorte que :

$$O_1G = \frac{2r \sin \beta}{2\beta} = \frac{r \sin \beta}{\beta}.$$

Pour satisfaire aux conditions de Phillips, G doit être sur l'axe Oy , d'où :

$$OG = \frac{\varrho_0^2}{l} = \frac{\varrho_0^2}{2r\beta}.$$

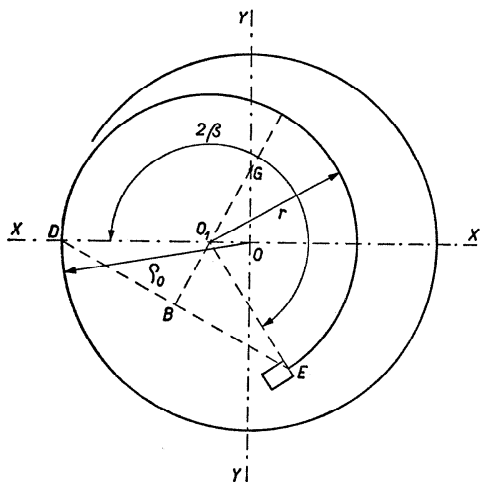


Fig. 369

Mais :

$$OG = O_1G \sin OO_1G = O_1G \sin \beta ,$$

donc :

$$\frac{\varrho_0^2}{2r\beta} = \frac{r \sin \beta}{\beta} \sin \beta ,$$

soit :

$$r = \frac{\varrho_0}{\sqrt{2} \sin \beta} . \quad (385)$$

D'autre part :

$$OO_1 = \varrho_0 - r = -r \frac{\sin \beta}{\beta} \cos \beta ,$$

d'où :

$$r = \varrho_0 \frac{\beta}{\beta - \sin \beta \cos \beta} . \quad (386)$$

En égalant les valeurs de r données par (385) et (386), nous obtenons :

$$\frac{1}{\sqrt{2} \sin \beta} = \frac{\beta}{\beta - \sin \beta \cos \beta} ,$$

d'où nous tirons la relation :

$$\frac{1}{\sin \beta} - \frac{\cos \beta}{\beta} = \sqrt{2} . \quad (387)$$

Cette équation permet de calculer β par approximations successives ; nous trouvons :

$$\beta = 121^\circ 12' 48'' , \quad 2\beta = 242^\circ 25' 36'' .$$

D'après (385), le rayon r vaut :

$$r = 0,826 \, 79 \, \varrho_0 .$$

Calculons la distance OE des goupilles de raquette ; dans le triangle OO_1E , nous avons :

$$OE = \sqrt{(\varrho_0 - r)^2 + r^2 - 2r(\varrho_0 - r) \cos (2\beta - 180^\circ)} ,$$

soit :

$$OE = \sqrt{(\varrho_0 - r)^2 + r^2 + 2r(\varrho_0 - r) \cos 2\beta} .$$

D'après les valeurs obtenues pour r et β , nous avons :

$$OE = 0,762 \, 25 \, r .$$

Cette courbe a pour numéro $N \cong 76$. Elle n'est pas pratique, car elle n'est pas terminée par un arc de cercle de centre O ; elle ne pourrait être utilisée que dans des montres ou chronomètres sans raquette comme les chronomètres de marine.

Courbe Phillips formée de deux arcs de cercle dont l'un a son centre sur l'axe du balancier. — Cette courbe est applicable aux montres ayant une raquette.

Elle se compose d'une demi-circonférence de centre O_1 et de rayon r_1 ainsi que d'un arc de circonférence de centre O , de rayon r_2 et d'angle β (fig. 370).

Déterminons r_1 , r_2 et β de façon que soient satisfaites les conditions de Phillips que nous mettrons sous la forme :

$$m_x = \varrho_0^2, \quad m_y = 0.$$

Le moment m_x comprend le moment m_{1x} de la demi-circonférence DA et le moment m_{2x} de l'arc AE . Nous avons :

$$m_{1x} = \int_0^\pi y ds = \int_0^\pi r_1 \sin \alpha \cdot r_1 d\alpha = r_1^2 [-\cos \alpha]_0^\pi = 2r_1^2,$$

$$m_{2x} = \int_0^\beta r_2^2 \sin \alpha d\alpha = r_2^2 [-\cos \alpha]_0^\beta = r_2^2(1 - \cos \beta).$$

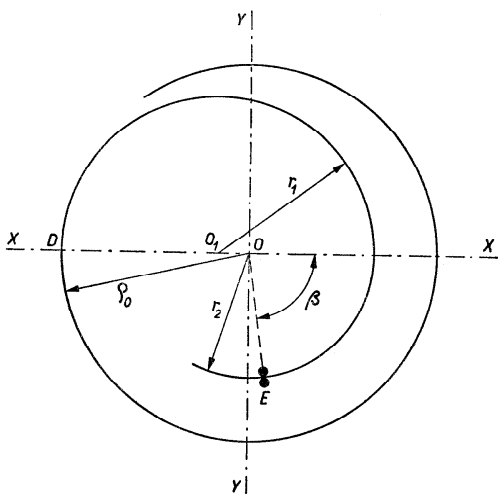


Fig. 370

Ce dernier moment est négatif puisque tout l'arc AE est au-dessous de l'axe Ox ; il faut donc écrire :

$$m_{2x} = -r_2^2(1 - \cos \beta).$$

Le moment m_x de la courbe entière vaut :

$$\begin{aligned} m_x &= m_{1x} + m_{2x} \\ &= 2r_1^2 - r_2^2(1 - \cos \beta). \end{aligned}$$

Pour que la courbe satisfasse aux conditions de Phillips, il faut que :

$$2r_1^2 - r_2^2(1 - \cos \beta) = \varrho_0^2. \quad (388)$$

Calculons m_y qui est la somme de m_{1y} , moment de la demi-circonférence DA , et de m_{2y} , moment de l'arc AE par rapport à l'axe Oy ; nous avons :

$$m_{1y} = \int_0^\pi x ds = \int_0^\pi (r_1 \cos \alpha + \varrho_0 - r_1) r_1 d\alpha = \pi r_1 (\varrho_0 - r_1),$$

$$m_{2y} = \int_\pi^{\pi+\beta} r_2^2 \cos \alpha d\alpha = -r_2^2 \sin \beta.$$

La seconde condition de Phillips exige que :

$$m_y = m_{1y} + m_{2y} = \pi r_1 (\varrho_0 - r_1) - r_2^2 \sin \beta = 0. \quad (389)$$

Éliminons β entre les équations (388) et (389); nous trouvons :

$$r_2^4 = \pi^2 r_1^2 (\varrho_0 - r_1)^2 + (\varrho_0^2 - 2r_1^2 + r_2^2)^2.$$

Cette équation contient les deux inconnues r_1 et r_2 , mais :

$$r_2 = 2r_1 - \varrho_0,$$

de sorte qu'elle prend la forme :

$$r_1^4 (\pi^2 - 12) - (16\varrho_0 - 2\pi^2\varrho_0) r_1^3 + \pi^2 \varrho_0^2 r_1^2 - 8\varrho_0^3 r_1 + 3\varrho_0^4 = 0.$$

Posons $\varrho_0 = 1$; nous obtenons :

$$r_1^4 (\pi^2 - 12) - (16 - 2\pi^2) r_1^3 + \pi^2 r_1^2 - 8r_1 + 3 = 0. \quad (390)$$

Cette équation est satisfaite pour :

$$r_1 = 0,8324.$$

Des équations (388) et (389), nous tirons :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\pi r_1}{2(\varrho_0 - r_1)},$$

d'où :

$$\beta = 82^\circ 41' 44''.$$

Enfin le rayon r_2 peut être calculé, puisque :

$$r_2 = 2r_1 - \varrho_0;$$

il vaut :

$$r_2 = 0,6648.$$

Le numéro de la courbe est :

$$N = 100 \frac{r_2}{\varrho_0} \cong 66.$$

Courbe Phillips composée de deux quarts de cercle reliés par une droite. — Cette courbe est faite de deux quarts de cercle de rayon $r = \frac{\varrho_0}{2}$

(fig. 371) et d'un segment rectiligne $AB = \varrho_0$; elle est symétrique par rapport à l'axe Oy , donc l'une des conditions de Phillips est remplie :

$$m_y = 0.$$

Le moment m_x est égal à la somme des moments m_{1x} , m_{2x} , m_{3x} des parties DA , AB et BE .

Mais :

$$m_{1x} = m_{3x},$$

donc :

$$m_x = 2m_{1x} + m_{2x}.$$

Nous avons déjà calculé le moment d'une demi-circonférence de rayon r ; il est égal à $2r^2$; c'est aussi $2m_{1x}$:

$$2m_{1x} = 2r^2 = 2 \frac{\varrho_0^2}{4} = \frac{\varrho_0^2}{2}.$$

Le moment m_{2x} vaut :

$$m_{2x} = AB \cdot CO = \varrho_0 r = \frac{\varrho_0^2}{2},$$

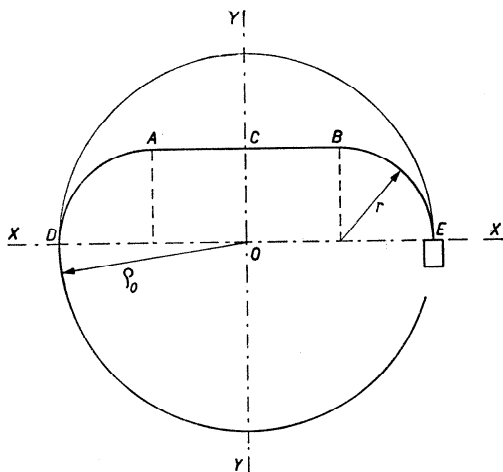


Fig. 371

donc :

$$m_x = \frac{\varrho_0^2}{2} + \frac{\varrho_0^2}{2} = \varrho_0^2.$$

La seconde condition de Phillips est aussi remplie. Cette courbe a pour numéro :

$$N = 100.$$

Elle peut être utilisée pour les spiraux cylindriques des chronomètres de marine qui n'ont pas de raquette.

Segment rectiligne remplissant les conditions de Phillips. — Un segment rectiligne DA (fig. 372) peut être utilisé comme courbe Phillips ; il sera déterminé par sa longueur l et par son inclinaison α sur l'axe Ox .

Pour que $m_y = 0$, il faut que le centre de gravité du segment soit en B sur l'axe Oy :

$$DB = BA = \frac{l}{2}.$$

La seconde condition de Phillips est remplie si :

$$OB = \frac{\varrho_0^2}{l};$$

mais :

$$OB = DB \sin \alpha,$$

donc :

$$\frac{\varrho_0^2}{l} = \frac{l}{2} \sin \alpha$$

et

$$\sin \alpha = \frac{2\varrho_0^2}{l^2}.$$

D'autre part :

$$OD = DB \cos \alpha,$$

d'où :

$$\varrho_0 = \frac{l}{2} \cos \alpha$$

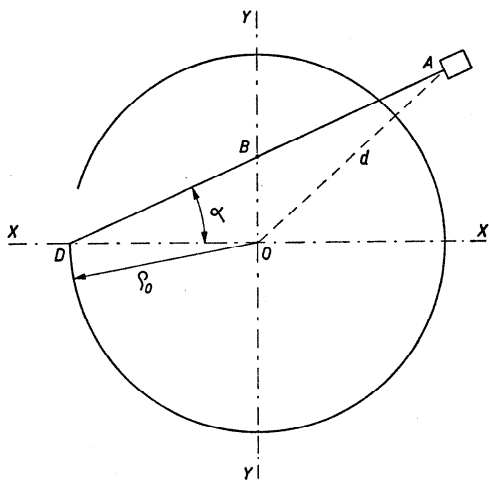


Fig. 372

et

$$\frac{\varrho_0}{l} = \frac{\cos \alpha}{2},$$

donc :

$$\sin \alpha = \frac{2 \cos^2 \alpha}{4} = \frac{\cos^2 \alpha}{2} = \frac{1 - \sin^2 \alpha}{2}.$$

De cette équation, tirons la valeur de $\sin \alpha$:

$$\sin \alpha = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}.$$

La seule solution acceptable est :

$$\sin \alpha = -1 + \sqrt{2},$$

d'où :

$$\alpha = 24^\circ 28' 11''.$$

Nous trouvons facilement :

$$l = \frac{2\varrho_0}{\cos \alpha} = 2,1973 \varrho_0.$$

La distance d du piton au centre du spiral vaut :

$$d = \sqrt{l^2 + \varrho_0^2 - 2l\varrho_0 \cos \alpha}.$$

En remplaçant l et α par leurs valeurs, nous obtenons :

$$d = 1,351 \varrho_0.$$

Le segment ainsi défini peut être utilisé comme courbe de numéro :

$$N = 135,$$

lorsque l'extrémité A du segment peut être placée en toute liberté.

La courbe intérieure du spiral plat. — Phillips a élaboré sa théorie à partir du spiral cylindrique ; il a montré qu'elle peut être appliquée au spiral plat tant que les déformations restent petites. Il a recommandé de faire deux courbes au spiral cylindrique : l'une, inférieure, entre la spire inférieure du spiral et la virole, l'autre, supérieure, entre la spire supérieure du spiral et le piton.

Pour le spiral plat, nous n'avons mentionné que la courbe dite extérieure qui relie le dernier tour du spiral aux goupilles de la raquette.

Les calculs relatifs à la position du centre de gravité de la spirale d'Archimède nous ont conduit aux équations (354) et (355), la spirale étant considérée à partir de son origine. Le spiral plat des montres n'est pas une spirale d'Archimède complète, car il faut enlever les premières spires intérieures pour faire place à la virole. Le centre de gravité du spiral réel ne se trouve pas à la même place que celui d'une spirale d'Archimède telle que nous l'avons envisagée dans nos calculs. Pour que nous puissions appliquer au spiral plat les formules précédemment déduites, nous devons remplacer les spires intérieures manquantes par une *courbe intérieure* reliant la première spire intérieure à la virole, dont le moment soit égal et de même signe que celui d'une spirale d'Archimède partant de l'origine pour aboutir au début de la première spire intérieure du spiral réel.

Soulignons la différence entre la courbe extérieure et la courbe intérieure :

la courbe extérieure ramène le centre de gravité de la spirale d'Archimède complète sur l'axe du balancier ; ses moments par rapport à deux axes rectangulaires sont égaux et de signe contraire à ceux de la spirale ;

la courbe intérieure remplace les spires intérieures éliminées pour faire place à la virole ; ses moments par rapport à deux axes rectangulaires sont égaux en valeur et en signe à ceux de la partie enlevée de la spirale d'Archimède.

D'après (352) et (353) les moments de la partie enlevée du spiral sont :

$$m_x = a^2 - r_0^2, \quad m_y = 2ar_0,$$

r_0 représentant le plus grand rayon de la spirale manquante.

La courbe intérieure de longueur l a les mêmes moments :

$$m_x = a^2 - r_0^2, \quad m_y = 2ar_0;$$

les coordonnées de son centre de gravité sont :

$$x_{2c} = \frac{2ar_0}{l}, \quad (391)$$

$$y_{2c} = \frac{a^2 - r_0^2}{l}. \quad (392)$$

Afin de disposer d'une place suffisante pour loger la courbe intérieure, le régleur, après avoir coupé l'intérieur du spiral jusqu'à ce que la virole

y pénètre, enlève encore au spiral 3 à 4 spires (fig. 373), de sorte que r_0 est assez grand ; il est possible de calculer r_0 d'après l'équation de la spirale d'Archimède :

$$r = a\theta ;$$

prenons pour θ la valeur 12π (6 tours) :

$$r_0 = a \cdot 12\pi \cong 37,7a .$$

Le terme en a^2 est négligeable dans (392), de sorte que :

$$y_{2c} = -\frac{r_0^2}{l} ; \quad (393)$$

nous aurons d'autre part et sans commettre d'erreur grave :

$$x_{2c} = 0 . \quad (394)$$

Ainsi, à part le signe de y_{2c} , nous retrouvons les mêmes valeurs (362) et (363) que pour la courbe extérieure.

La courbe intérieure n'est appliquée que dans les chronomètres très soignés. Elle est due à Jules Grossmann.

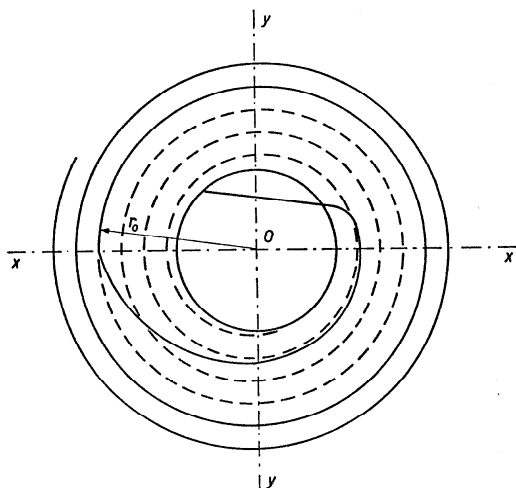


Fig. 373

Réalisation des courbes Phillips. — Le technicien ou le régleur peut dessiner une courbe théorique comme cela a été indiqué, puis réduire ce dessin à l'échelle convenable par un procédé photographique, par exemple. Les ouvrages de C. Billeter, *Le réglage de précision*, et de M. Bossart, *Courbes terminales pour spiraux Breguet*, contiennent de nombreuses courbes intérieures et extérieures en grandeur naturelle parmi lesquelles on trouvera probablement une courbe convenable. Le régleur qui travaille beaucoup de pièces d'un même calibre reporte la courbe choisie sur une plaque métallique, sur une plaque recouverte d'émail blanc ou sur une plaque de verre ; il n'a ensuite qu'à façonner sa courbe d'après ce modèle. On trace la courbe point par point sur la plaque. Chaque point est déterminé par ses coordonnées prises sur un dessin à grande échelle ; la machine à pointer permet de marquer sur la plaque un point de coordonnées connues.

Une autre méthode consiste à exécuter, au jugé, la courbe du spiral et à la vérifier, c'est-à-dire à la comparer à celle du dessin à grande échelle au moyen d'un pantographe spécial appelé *campyloscope* et inventé par

Paul Perret. Cet appareil est précis, mais le procédé est trop lent pour le travail courant ; par contre, il peut rendre service dans la chronométrie de précision.

On peut aussi contrôler une courbe terminale au moyen du projecteur de profils et d'un dessin à grande échelle.

On peut se demander si une minutie extrême dans l'exécution des courbes terminales est justifiée, car les résultats de Phillips et même ceux de Moulin et de Keelhoff reposent sur des hypothèses dont l'exactitude n'est pas absolue.

Cependant, même si l'on avait obtenu l'isochronisme du balancier-spiral au moyen des courbes terminales, l'isochronisme du balancier-spiral dans la montre ne serait pas réalisé. C'est pourtant ce dernier qu'il s'agit d'obtenir ; aussi, en pratique, les régleurs retouchent-ils les courbes terminales en vue d'atteindre certains résultats et ne se soucient-ils plus alors de savoir si la courbe satisfait aux conditions de Phillips.

La théorie des courbes terminales serait-elle donc inutile ? Certes non. Grâce à Phillips, on a le moyen de faire des courbes réalisant à peu près l'isochronisme du balancier-spiral dans la montre ; sa théorie a considérablement réduit les tâtonnements ; ces courbes donnent un résultat suffisant pour les montres courantes.

Pour les spiraux des chronomètres de grande précision, il faut fréquemment retoucher les courbes : c'est l'art du régleur de précision. Mais les retouches sont souvent destinées à corriger des effets qui ne sont pas dus uniquement au spiral.

Le jeu du spiral entre les goupilles de la raquette. — L'influence du jeu du spiral entre les goupilles de la raquette a, depuis longtemps, préoccupé les régleurs qui utilisent souvent ce jeu pour compenser d'autres défauts. On a essayé d'y voir clair au moyen du calcul, mais il convient de ne pas se faire d'illusions ; l'analyse mathématique oblige à schématiser, à négliger certains facteurs difficilement accessibles et à faire des hypothèses plus ou moins fondées.

Le calcul de l'influence du jeu entre les goupilles de raquette est basé sur deux hypothèses dont l'une est nettement fausse : on admet que, lorsque le spiral est tenu entre les goupilles, il est encastré, c'est-à-dire que la tangente au point de serrage conserve constamment la même direction pendant que le spiral se déforme ; cette hypothèse n'est jamais complètement réalisée ; elle se rapproche d'autant plus de la vérité que le spiral est étroitement serré entre de fortes goupilles.

La seconde hypothèse consiste à admettre que le spiral appuyé contre une goupille est encastré, c'est-à-dire que sa longueur active est mesurée du point d'encastrement dans la virole au point d'appui contre la goupille.

A partir de ces prémisses, le calcul ne peut conduire qu'à des résultats très approximatifs : ceux-ci ne sont pas même suffisants pour indiquer l'ordre de grandeur de l'influence du jeu du spiral entre les goupilles. Cependant, ce qui importe surtout, c'est de savoir si l'isochronisme des oscillations du balancier-spiral est altéré par le jeu du spiral, et dans quel sens il est modifié.

Quand la lame du spiral est libre entre les goupilles de la raquette, il peut se présenter une infinité de cas ; on traite généralement les cas extrêmes : celui du spiral dont la lame, au repos, est à égale distance des goupilles qu'elle ne touche pas ; celui d'un spiral dont la lame, au repos, est appuyée contre une des goupilles.

La lame du spiral est, au repos, à égale distance des goupilles. — Lorsque le spiral se développe, dans un sens ou dans l'autre, il arrive un moment où il touche l'une des goupilles ; le balancier aura alors l'élongation φ_1 .

Pendant la première partie de la demi-alternance ascendante, la longueur du spiral est $L + \Delta L$; l'élongation passe de zéro à φ_1 . La longueur active du spiral devient L dès que la lame touche une des goupilles : l'élongation passe de φ_1 à φ_0 . L est la longueur active normale du spiral comptée de la virole aux goupilles ; ΔL est la longueur du spiral comprise entre les goupilles et le pignon ; φ_0 est l'amplitude du balancier correspondant aux conditions réalisées quand le spiral est au repos. Dans le cas que nous traitons, φ_0 est l'amplitude du balancier-spiral lorsque la longueur du spiral est $L + \Delta L$; le moment élastique du spiral est C' :

$$C' = \frac{Ec^3h}{12(L + \Delta L)}.$$

La première partie de l'alternance ascendante est parcourue dans le temps t_1 :

$$t_1 = \sqrt{\frac{I}{C'}} \arcsin \frac{\varphi_1}{\varphi_0}. \quad (395)$$

La seconde partie de l'alternance commence au moment où la lame du spiral atteint une des goupilles, c'est-à-dire lorsque l'élongation est φ_1 et que la vitesse angulaire du balancier est ω_1 :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{C'}{I}} \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi_1^2}. \quad (396)$$

Au moment, où la vitesse angulaire du balancier-spiral est ω_1 , le moment élastique du spiral devient brusquement égal à C :

$$C = \frac{Ee^3h}{12L};$$

or :

$$C > C'.$$

Le moment du spiral s'oppose donc au mouvement du balancier ; il augmente brusquement et arrête le balancier avant que celui-ci ait atteint l'élongation φ_0 . L'élongation du balancier ne sera plus que $\varphi'_0 < \varphi_0$.

La vitesse angulaire donnée par (396) est aussi celle qui correspond aux valeurs φ_1 , φ'_0 et C , donc :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{C'}{I}} \sqrt{\varphi_0'^2 - \varphi_1^2}. \quad (397)$$

En égalant les valeurs de ω_1 données par (396) et (397), nous trouvons :

$$\varphi'_0 = \sqrt{\frac{C}{C'}(\varphi_0^2 - \varphi_1^2) + \varphi_1^2}.$$

Posons $\frac{Ee^3h}{12} = \varepsilon$; nous obtenons :

$$C = \frac{\varepsilon}{L}, \quad C' = \frac{\varepsilon}{L + \Delta L},$$

d'où :

$$\frac{C'}{C} = \frac{L}{L + \Delta L}$$

et, par suite :

$$\varphi'_0 = \sqrt{\frac{L\varphi_0^2 + \Delta L\varphi_1^2}{L + \Delta L}}. \quad (398)$$

La durée t_2 de la seconde partie de la demi-alternance ascendante vaut :

$$t_2 = \sqrt{\frac{I}{C}} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\varphi_1}{\varphi'_0} \right),$$

soit :

$$t_2 = \sqrt{\frac{I}{C}} \arccos \frac{\varphi_1}{\varphi'_0}. \quad (399)$$

Appelons T la période normale correspondant à la valeur C du moment élastique du spiral :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C}};$$

nous avons :

$$t_2 = \frac{T}{2\pi} \arccos \frac{\varphi_1}{\varphi'_0}.$$

D'autre part :

$$\sqrt{\frac{I}{C'}} = \sqrt{\frac{I(L + \Delta L)}{CL}} = \sqrt{\frac{I}{C}} \sqrt{\frac{L + \Delta L}{L}},$$

soit :

$$\sqrt{\frac{I}{C'}} = \frac{T}{2\pi} \sqrt{\frac{L + \Delta L}{L}},$$

donc :

$$t_1 = \frac{T}{2\pi} \sqrt{\frac{L + \Delta L}{L}} \arcsin \frac{\varphi_1}{\varphi_0}$$

et

$$t_1 + t_2 = \frac{T}{2\pi} \left[\sqrt{\frac{L + \Delta L}{L}} \arcsin \frac{\varphi_1}{\varphi_0} + \arccos \frac{\varphi_1}{\varphi'_0} \right].$$

La durée normale de la demi-alternance ascendante est $\frac{T}{4}$, donc :

$$4 \left(t_1 + t_2 - \frac{T}{4} \right) = \Delta T,$$

d'où :

$$\Delta T = \frac{2T}{\pi} \left[\sqrt{\frac{L + \Delta L}{L}} \arcsin \frac{\varphi_1}{\varphi_0} + \arccos \frac{\varphi_1}{\varphi'_0} \right] - T$$

ou

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{2}{\pi} \left[\sqrt{\frac{L + \Delta L}{L}} \arcsin \frac{\varphi_1}{\varphi_0} + \arccos \frac{\varphi_1}{\varphi'_0} \right] - 1. \quad (400)$$

Cette équation peut être mise sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} \frac{\Delta T}{T} &= \sqrt{\frac{L + \Delta L}{L}} \arcsin \frac{\varphi_1}{\varphi_0} + \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\varphi_1}{\varphi'_0} - \frac{\pi}{2} \\ &= \sqrt{\frac{L + \Delta L}{L}} \arcsin \frac{\varphi_1}{\varphi_0} - \arcsin \frac{\varphi_1}{\varphi'_0}. \end{aligned}$$

Posons $\frac{\Delta L}{L} = y$, $\frac{\varphi_1}{\varphi_0} = x$, $\frac{\varphi'_1}{\varphi'_0} = x'$; nous obtenons :

$$\frac{\pi}{2} \frac{\Delta T}{T} = \sqrt{1+y} \arcsin x - \arcsin x'.$$

Développons les arcs sinus en séries et négligeons les termes à partir du troisième, puisque x et x' sont généralement petits :

$$\frac{\pi}{2} \frac{\Delta T}{T} = \sqrt{1+y} \left(x + \frac{x^3}{6} \right) - \left(x' + \frac{x'^3}{6} \right);$$

or :

$$\frac{x}{x'} = \frac{\varphi'_0}{\varphi_0} = \sqrt{\frac{\frac{L\varphi_0^2 + \Delta L\varphi_1^2}{L + \Delta L}}{\varphi_0^2}} = \sqrt{\frac{L + \Delta Lx^2}{L + \Delta L}} = \sqrt{\frac{1+yx^2}{1+y}},$$

donc :

$$\begin{aligned} \frac{\pi\Delta T}{2T} &= x\sqrt{1+y} \left(1 + \frac{x^2}{6} \right) - x' \left(1 + \frac{x'^2}{6} \right) = x'\sqrt{1+yx^2} \left(1 + \frac{x^2}{6} \right) - x' \left(1 + \frac{x'^2}{6} \right) \\ &= x' \left(1 + \frac{yx^2}{2} \right) \left(1 + \frac{x^2}{6} \right) - x' \left(1 + \frac{x'^2}{6} \right) = x' \left(\frac{yx^2}{2} + \frac{x^2 - x'^2}{6} \right), \end{aligned}$$

où nous avons négligé les termes en yx^4 . De plus :

$$x^2 - x'^2 = x^2 \left[1 - \left(\frac{x'}{x} \right)^2 \right] = x^2 \left[1 - \frac{1+y}{1+yx^2} \right] = -x^2y$$

et, par conséquent :

$$\frac{\pi}{2} \frac{\Delta T}{T} = x' \left(\frac{yx^2}{2} - \frac{x^2y}{6} \right) = \frac{yx^2x'}{3}.$$

Ainsi :

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{2yx^2x'}{3\pi}. \quad (401)$$

La variation de la marche diurne vaut :

$$\mu = -86\,400 \frac{\Delta T}{T} = -86\,400 \frac{2yx^2x'}{3\pi},$$

soit :

$$\mu = -18\,335 yx^2x'. \quad (402)$$

Comme x' est à peu près égal à x , nous pouvons mettre la formule (402) sous la forme :

$$\mu = -18\,335\,yx^3. \quad (403)$$

Rappelons que ces deux formules sont approximatives et qu'elles ont été déduites en supposant x et x' assez petits pour que les termes en x^4 puissent être négligés. Il ne faut donc les utiliser que si $x < 0,1$; pour $\varphi_1 = 20^\circ$, il faut que l'amplitude soit supérieure à 200° . Les résultats sont d'autant plus exacts que x est petit.

Calculons μ pour un cas concret traité par les Grossmann. Supposons $L = 22,6$ cm, $\Delta L = 0,7$ cm, $\varphi_0 = 300^\circ$, $\varphi_1 = 20^\circ$. D'après (398), nous obtenons successivement :

$$\begin{aligned} \varphi'_0 &= 295^\circ,47, \\ y &= \frac{\Delta L}{L} = \frac{0,7}{22,6} = 0,030\,974, \\ x &= \frac{\varphi_1}{\varphi_0} = \frac{20}{300} = 0,066\,667, \\ x' &= \frac{\varphi_1}{\varphi'_0} = \frac{20}{295,47} = 0,067\,689, \end{aligned}$$

d'où :

$$\mu = -0,1708 \text{ s} \cong -0,2 \text{ s},$$

ce qui représente naturellement un retard.

La formule (398) montre que la modification relative de la période est fonction de φ_0 : *il y a un défaut d'isochronisme*. Si $\varphi_1 = \varphi_0$, toute l'oscillation se fait avec un spiral de longueur $L + \Delta L$; la période T' est :

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C'}} = 2\pi \sqrt{\frac{I(L + \Delta L)}{\varepsilon}},$$

d'où :

$$\begin{aligned} \Delta T &= T' - T = 2\pi \sqrt{\frac{I(L + \Delta L)}{\varepsilon}} - 2\pi \sqrt{\frac{IL}{\varepsilon}} \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{IL}{\varepsilon}} \left[\sqrt{1 + \frac{\Delta L}{L}} - 1 \right] = T \left[\sqrt{1 + y} - 1 \right] \end{aligned}$$

et, par conséquent :

$$\frac{\Delta T}{T} = \sqrt{1 + y} - 1 \cong \frac{y}{2},$$

puisque y est petit.

Si nous appliquons cette formule au cas précédent, nous trouverons :

$$\mu = -1338,2 \text{ s.}$$

Le retard augmente donc énormément aux petites amplitudes ; ainsi, lorsque, au repos, le spiral est à égale distance des goupilles, les oscillations sont d'autant plus lentes que l'amplitude est petite.

En admettant $\varphi_1 = 20^\circ$ et en faisant varier φ_0 , nous obtenons des valeurs de μ qui, portées dans un système d'axes rectangulaires, forment une courbe semblable à celle de la figure 374.

Lorsqu'une montre a du retard au pendu, il faut voir si la lame du spiral n'a pas de jeu entre les goupilles et, le cas échéant, supprimer ce jeu. Pour corriger de l'avance au pendu, les réglés écartent un peu les

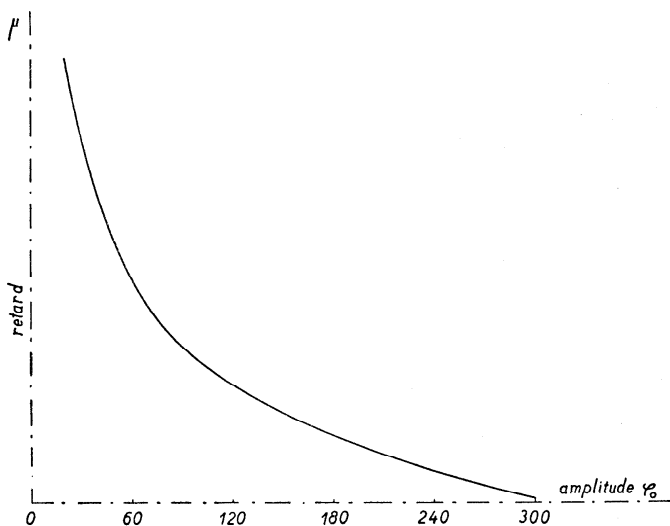


Fig. 374

goupilles ; mais il faut être prudent et n'utiliser ce moyen que s'il s'agit de corrections peu importantes, car — la figure 374 le montre — l'influence du jeu varie énormément avec l'amplitude ; la correction exacte pour une certaine amplitude ne le sera plus pour une autre.

La tendance actuelle est de supprimer les goupilles de la raquette pour les remplacer par des rouleaux qui serrent fortement la lame du spiral et ne peuvent céder sous la pression de celui-ci.

Formule générale pour calculer l'influence du jeu du spiral entre les goupilles de la raquette. — On peut, comme on vient de le faire, calculer le retard provoqué par le jeu du spiral lorsque, au repos, ce dernier est appuyé contre une des goupilles et qu'il s'en détache au cours de l'oscillation.

On peut aussi chercher une formule applicable à tous les cas ; c'est ce qu'a fait Keelhoff en utilisant la formule d'Airy.

Puisqu'on désire une formule générale, il faut donner aux symboles une signification qui dépende de l'élongation. L'alternance est composée de deux parties : dans l'une, le spiral touche une des goupilles, dans l'autre, il n'en touche aucune.

On appellera première partie de l'alternance celle qui comprend la position d'équilibre, c'est-à-dire la position caractérisée par l'élongation 0. Soit L la longueur active du spiral pendant cette première phase ; L peut donc désigner, suivant les cas, la longueur totale du spiral, de la virole au piton, ou la longueur normale comprise entre la virole et les goupilles. Soit L' la longueur active du spiral pendant la seconde phase ; la différence entre ces longueurs est ΔL qui représente la distance des goupilles au piton. On a :

$$L' - L = \Delta L.$$

Suivant ces conventions, ΔL peut être positif ou négatif selon les cas.

Soient T la période correspondant à la longueur L et T' celle qui découle de la longueur L' . On aura toujours :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C}} = 2\pi \sqrt{\frac{IL}{\varepsilon}}, \quad T' = 2\pi \sqrt{\frac{I(L + \Delta L)}{\varepsilon}}.$$

Reprenons la formule (326) d'Airy :

$$\frac{\Delta T_1}{T_1} = \frac{T_1^2}{\pi^3 \varphi_0^2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\gamma \varphi d\varphi}{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}}$$

et cherchons à déterminer γ , l'accélération angulaire provoquée par le fait qu'à un moment donné la portion active du spiral change de longueur.

La première partie de l'alternance va de l'élongation $-\varphi_1$ à l'élongation $+\varphi_2$, puisqu'elle comprend la position d'équilibre $\varphi = 0$; φ_1 et φ_2 ne sont pas nécessairement égaux en valeur absolue.

Soit OA (fig. 375) la position d'équilibre à partir de laquelle nous comptons les élongations. Pendant la première phase, le balancier parcourt l'angle :

$$\sphericalangle BOC = \sphericalangle BOA + \sphericalangle AOC.$$

Pendant la seconde partie de la demi-alternance, il parcourt l'angle COD ; nous nous proposons de calculer la perturbation de la seconde phase.

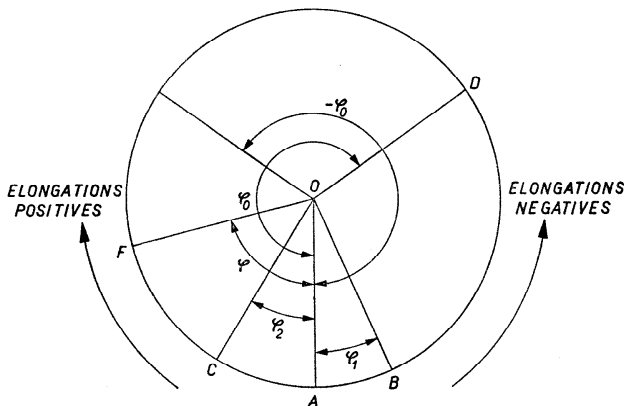


Fig. 375

Considérons la position OF d'élongation φ . S'il n'y avait pas eu de perturbation, le couple du spiral aurait été :

$$C\varphi = \frac{\varepsilon}{L} \varphi.$$

Mais en OC , la longueur du spiral a augmenté de ΔL (ΔL est positif ou négatif) ; le couple du spiral est devenu :

$$C\varphi_2 + C'(\varphi - \varphi_2).$$

Il s'est modifié de :

$$C\varphi_2 + C'(\varphi - \varphi_2) - C\varphi = (C' - C)(\varphi - \varphi_2).$$

Mais :

$$C' - C = \frac{\varepsilon}{L + \Delta L} - \frac{\varepsilon}{L} = -\frac{\varepsilon \Delta L}{L(L + \Delta L)}.$$

La modification du couple du spiral vaut :

$$\frac{\varepsilon \Delta L}{L(L + \Delta L)} (\varphi - \varphi_2)$$

et l'accélération supplémentaire γ qui en résulte :

$$\gamma = \frac{\varepsilon \Delta L}{IL(L + \Delta L)} (\varphi - \varphi_2).$$

La formule d'Airy devient donc :

$$\frac{\Delta T_1}{T_1} = \frac{T_1^2}{\pi^3 \varphi_0^2} \int_{\varphi_2}^{\varphi_0} \frac{\varepsilon \Delta L}{IL(L + \Delta L)} (\varphi - \varphi_2) \frac{\varphi d\varphi}{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}}.$$

En intégrant entre les limites φ_0 et φ_2 , nous obtiendrons la perturbation relative de la durée d'alternance pendant la demi-alternance ascendante ; en intégrant entre $-\varphi_0$ et $-\varphi_1$, nous aurons la perturbation pendant l'autre demi-alternance.

Calculons la première perturbation :

$$\frac{\Delta T_1}{T_1} = \frac{T_1^2 \varepsilon \Delta L}{\pi^3 \varphi_0^2 IL(L + \Delta L)} \left[\int_{\varphi_2}^{\varphi_0} \frac{\varphi^2 d\varphi}{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}} - \varphi_2 \int_{\varphi_2}^{\varphi_0} \frac{\varphi d\varphi}{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}} \right].$$

Mais :

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_2}^{\varphi_0} \frac{\varphi^2 d\varphi}{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}} &= \left[-\frac{\varphi}{2} \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2} + \frac{\varphi_0^2}{2} \arcsin \frac{\varphi}{\varphi_0} \right]_{\varphi_2}^{\varphi_0} \\ &= -\frac{\varphi_0}{2} \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi_0^2} + \frac{\varphi_0^2}{2} \arcsin \frac{\varphi_0}{\varphi_0} + \frac{\varphi_2}{2} \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi_2^2} - \frac{\varphi_0^2}{2} \arcsin \frac{\varphi_2}{\varphi_0} \\ &= \frac{\varphi_0^2}{2} \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\varphi_2}{\varphi_0} \right] + \frac{\varphi_2}{2} \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi_2^2}. \end{aligned}$$

La seconde intégrale vaut :

$$\int_{\varphi_2}^{\varphi_0} \frac{\varphi d\varphi}{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}} = \left[-\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2} \right]_{\varphi_2}^{\varphi_0} = -\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi_0^2} + \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi_2^2} = \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi_2^2}.$$

Nous trouvons pour la perturbation relative :

$$\frac{\Delta T_1}{T_1} = \frac{T_1^2 \varepsilon \Delta L}{\pi^3 \varphi_0^2 IL(L + \Delta L)} \left[\frac{\varphi_0^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\varphi_2}{\varphi_0} \right) + \frac{\varphi_2}{2} \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi_2^2} - \varphi_2 \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi_2^2} \right].$$

Or, nous savons que, dans la formule d'Airy, T_1 désigne la durée de l'alternance, soit ici :

$$T_1 = \frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{IL}{\varepsilon}};$$

pour la demi-alternance ascendante nous aurons donc :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T_1}{T_1} &= \frac{\pi^2 \frac{IL}{\varepsilon} \varepsilon \Delta L}{\pi^3 \varphi_0^2 IL(L + \Delta L)} \frac{\varphi_0^2}{2} \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\varphi_2}{\varphi_0} - \frac{\varphi_2}{\varphi_0} \sqrt{1 - \left(\frac{\varphi_2}{\varphi_0} \right)^2} \right] \\ &= \frac{\Delta L}{2\pi(L + \Delta L)} \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\varphi_2}{\varphi_0} - \frac{\varphi_2}{\varphi_0} \sqrt{1 - \left(\frac{\varphi_2}{\varphi_0} \right)^2} \right]. \end{aligned}$$

Nous obtiendrons de même pour la demi-alternance descendante :

$$\frac{\Delta T_1}{T_1} = \frac{\Delta L}{2\pi(L + \Delta L)} \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\varphi_1}{\varphi_0} - \frac{\varphi_1}{\varphi_0} \sqrt{1 - \left(\frac{\varphi_1}{\varphi_0} \right)^2} \right],$$

de sorte que la perturbation totale sera :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T_1}{T_1} &= \frac{\Delta L}{2\pi(L + \Delta L)} \left[\pi - \arcsin \frac{\varphi_1}{\varphi_0} - \arcsin \frac{\varphi_2}{\varphi_0} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\varphi_1}{\varphi_0} \sqrt{1 - \left(\frac{\varphi_1}{\varphi_0} \right)^2} - \frac{\varphi_2}{\varphi_0} \sqrt{1 - \left(\frac{\varphi_2}{\varphi_0} \right)^2} \right]. \end{aligned} \quad (404)$$

La perturbation relative de la période T est la même, puisque :

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{2\Delta T_1}{2T_1} = \frac{\Delta T_1}{T_1}.$$

La formule (404) comprend tous les cas possibles, mais, en l'appliquant, il faut tenir compte de la signification des lettres et du signe de ΔL .

Si, au repos, le spiral est à égale distance des goupilles, nous avons :

$$\varphi_1 = \varphi_2;$$

la formule devient dès lors :

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta L}{2\pi(L + \Delta L)} \left[\pi - 2 \arcsin \frac{\varphi_1}{\varphi_0} - 2 \frac{\varphi_1}{\varphi_0} \sqrt{1 - \left(\frac{\varphi_1}{\varphi_0} \right)^2} \right]$$

ou

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta L}{\pi(L + \Delta L)} \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\varphi_1}{\varphi_0} - \frac{\varphi_1}{\varphi_0} \sqrt{1 - \left(\frac{\varphi_1}{\varphi_0} \right)^2} \right]. \quad (405)$$

Appliquant cette formule au cas déjà cité, traité par les Grossmann, Keelhoff trouve $\mu = -86$ secondes. Il faut se souvenir que, dans ce cas, ΔL est négatif et que T ne représente pas la *période normale* du balancier-spiral, qui est ici égale à T' .

Si T désignait la période normale du balancier-spiral, il suffirait d'appliquer les formules (404) ou (405).

Pour calculer la marche diurne μ nous employons la formule :

$$\mu = -86\,400 \frac{\Delta T}{T}.$$

Dans le chapitre VII (p. 36) nous avons vu que cette formule est une simplification de :

$$\mu = -86\,400 \frac{\Delta T}{T + \Delta T},$$

formule que nous pouvons mettre sous la forme :

$$\mu = -86\,400 \frac{\frac{\Delta T}{T}}{1 + \frac{\Delta T}{T}}.$$

Posons $\frac{\Delta T}{T} = m$; nous aurons :

$$\mu = -86\,400 \frac{m}{1 + m}. \quad (406)$$

Dans le cas que nous traitons (au repos, le spiral est à égale distance des goupilles), nous avons :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{IL}{\varepsilon}}, \quad T' = 2\pi \sqrt{\frac{I(L + \Delta L)}{\varepsilon}},$$

d'où :

$$T = T' \sqrt{\frac{L}{L + \Delta L}}.$$

En 86 400 secondes, le balancier exécute :

$$\frac{86\,400}{T + \Delta T} = \frac{86\,400}{T' \sqrt{\frac{L}{L + \Delta L}} + \Delta T}$$

oscillations, au lieu de :

$$\frac{86\,400}{T'}.$$

En secondes, la marche diurne est :

$$\mu = -T' \left[\frac{86\,400}{T'} - \frac{86\,400}{T' \sqrt{\frac{L}{L + \Delta L} + \Delta T}} \right].$$

Nous verrions aisément que :

$$\mu = -86\,400 \frac{1 + m - \sqrt{\frac{L + \Delta L}{L}}}{1 + m},$$

car ici $m = \frac{\Delta T}{T'}$.

En effectuant les calculs pour le cas où, dans la position d'équilibre, le spiral est appuyé contre une des goupilles, les Grossmann ont trouvé les résultats représentés par la courbe de la figure 376, qui diffère nette-

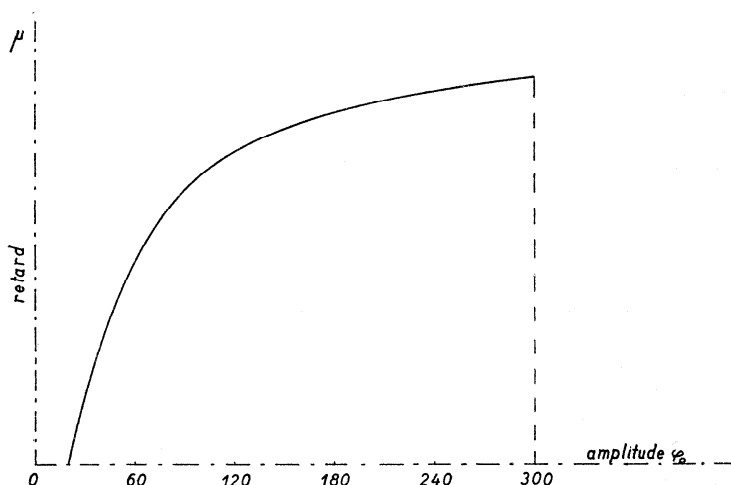


Fig. 376

ment de celle de la figure 374. Ainsi, lorsque, au repos, le spiral est appuyé contre une des goupilles, le jeu provoque une avance aux petits arcs.

Insuffisance des solutions classiques du problème des goupilles. — Les solutions du problème des goupilles qui viennent d'être exposées de même que celle des Grossmann sont d'assez grossières approximations. Pour s'en convaincre, il suffit de les appliquer; ainsi, pour le cas déjà

mentionné ($L = 22,6$ cm, $\Delta L = 0,7$ cm, $\varphi_1 = 20^\circ$, $\varphi_0 = 300^\circ$), nous avons trouvé $\mu = 0,2$ seconde, tandis que les Grossmann obtiennent 159,6 secondes et Keelhoff 86 secondes.

Nous connaissons la raison de l'insuffisance de ces théories : toutes partent de l'hypothèse manifestement fausse qu'un spiral appuyé contre une goupille peut être envisagé comme encastré.

Haag a repris la question en considérant que le spiral appuyé contre une goupille peut glisser le long de celle-ci. Il a tenu compte de la réaction de la goupille contre le spiral et du frottement occasionné par le glissement de la lame le long de la goupille. Il est arrivé ainsi à une formule simple et certainement plus exacte que les formules classiques (voir les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* 1930, t. 190, p. 576). Cette formule est :

$$\frac{\Delta T}{T} = -\varepsilon A \left(1 - \frac{4\beta}{\pi} \right),$$

avec $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$. A et β sont des coefficients qui dépendent l'un des dimensions du spiral, des goupilles et du coefficient de frottement, l'autre des angles φ_1 et φ_0 . Les calculs aboutissant à cette formule n'ont pas été publiés.

Compensation de deux effets perturbateurs. — Le jeu du spiral entre les goupilles de la raquette est parfois utilisé, comme nous l'avons dit, pour atténuer ou compenser une avance aux petits arcs. La diminution de l'élasticité du spiral due à une augmentation de la température peut également être compensée par la diminution du moment d'inertie du balancier.

Ces deux effets doivent dépendre des mêmes facteurs ; la compensation sera parfaite si les deux effets sont toujours égaux et de signes contraires.

Plusieurs facteurs créent un défaut d'isochronisme : l'échappement, les défauts d'équilibre, le jeu du spiral entre les goupilles ; le régleur oppose un facteur à l'autre pour obtenir un *isochronisme global* des oscillations du balancier-spiral.

Néanmoins l'isochronisme du balancier-spiral libre a toujours été recherché par les horlogers : s'il ne garantit pas un réglage parfait de la montre, il élimine des défauts que le régleur aurait dû compenser par d'autres défauts.

Rappelons, à titre d'exemple de compensation, les efforts de F. Berthoud pour combattre l'anisochronisme des oscillations du pendule par un échappement à recul qu'il avait appelé échappement isochrone.

La règle de Pierre Le Roy. — En 1770, Pierre Le Roy a énoncé la loi suivante : « *Il y a dans tout ressort cylindrique d'étendue suffisante une certaine longueur où toutes les vibrations, grandes et petites, sont isochrones.* »

L'isochronisme des oscillations est obtenu dès que le couple de rappel du spiral est, à chaque instant, proportionnel à l'élongation et qu'aucune autre force n'influence le mouvement du balancier. La première condition est réalisée puisque le spiral obéit à la loi de Hooke que nous supposons exacte.

La seconde condition est remplie si aucune autre force n'agit sur le balancier ; ainsi, le spiral ne doit jamais exercer une pression latérale sur les pivots du balancier.

Nous savons que les courbes terminales de Phillips suppriment la pression latérale consécutive à la déformation du spiral qui se développe concentriquement. L'application de la règle de Le Roy conduit au même résultat.

Caspari a montré que cette règle est incomplète et qu'il faut la formuler ainsi : « *Pourvu que le spiral cylindrique ait une certaine longueur, il y a sur chaque spire deux points diamétralement opposés et à la distance angulaire $\frac{\pi}{2}$ du pignon, qui, utilisés comme points d'attache du spiral à la virole, assurent l'isochronisme des oscillations.* »

Modifications de l'élasticité du spiral. — Le spiral d'une montre se tend et se détend plus de deux cent mille fois par jour ; ce travail mécanique peut modifier la structure et les propriétés élastiques de la lame comme le fait l'érouissage. Les régleurs savent qu'un spiral neuf ne donne pas au balancier auquel il est associé la même période que s'il avait déjà fonctionné pendant quelques mois ; en général les montres neuves prennent de l'avance avec le temps ; la marche se stabilise peu à peu ; tout se passe comme si le module d'élasticité du spiral augmentait.

Jaquerod a montré que le module d'élasticité semble se modifier au cours de chaque oscillation suivant l'état de contrainte du spiral. Il a utilisé à cet effet un pendule de torsion formé d'un fil mince de 2 m environ, encastré à ses deux extrémités ; le fil LL (fig. 377) porte en son milieu un disque A de moment d'inertie I .

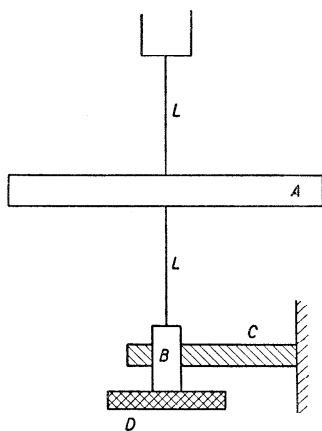


Fig. 377

La pince B est mobile dans la pièce fixe C ; elle porte une tête moletée D qui permet de la faire tourner et de tordre le fil LL ; une vis de fixation permet d'immobiliser la pince dans n'importe quelle position.

On fait exécuter au disque A des oscillations de faible amplitude ($\varphi_0 \cong 1^\circ$) et on détermine la période T_0 des oscillations lorsque le fil n'est pas tordu. On tord LL en tournant la pince d'un angle θ_1 , puis on fait osciller A de sorte que l'amplitude soit de l'ordre de 1° . On tord le fil de $\frac{1}{2}$ tour, de 1 tour, de $1\frac{1}{2}$ tour, etc. et, chaque fois, on mesure la période T_1, T_2, T_3 , etc.

Si le module de torsion est indépendant de l'état de contrainte du fil, on doit avoir :

$$T_0 = T_1 = T_2 = T_3 = \dots$$

Les mesures de Jaquerod montrent qu'il n'en est pas ainsi.

La période du pendule de torsion est d'après une formule établie au chapitre suivant :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C}}.$$

Dans cette formule, C désigne le moment élastique de torsion du fil ; ce moment dépend des dimensions du fil et du module d'élasticité de torsion G appelé *module de Coulomb* ou *coefficient de rigidité*.

Pour l'acier $G \cong 8 \cdot 10^{11}$ dynes/cm², alors que son module d'Young est $E \cong 20 \cdot 10^{11}$ dynes/cm². On peut poser :

$$C = KG,$$

d'où :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{KG}}.$$

Pour un pendule donné et dans des conditions bien définies, I et K sont constants ; si T change, c'est le module G qui en est la cause.

Soit G_0 le module de torsion correspondant à la contrainte nulle ($\theta = 0$), G_1, G_2 les valeurs du module pour les torsions θ_1, θ_2 du fil :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I}{KG_0}}, \quad T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I}{KG_1}},$$

d'où :

$$\frac{T_1}{T_0} = \sqrt{\frac{G_0}{G_1}} \quad (407)$$

ou

$$G_1 = G_0 \left(\frac{T_0}{T_1} \right)^2.$$

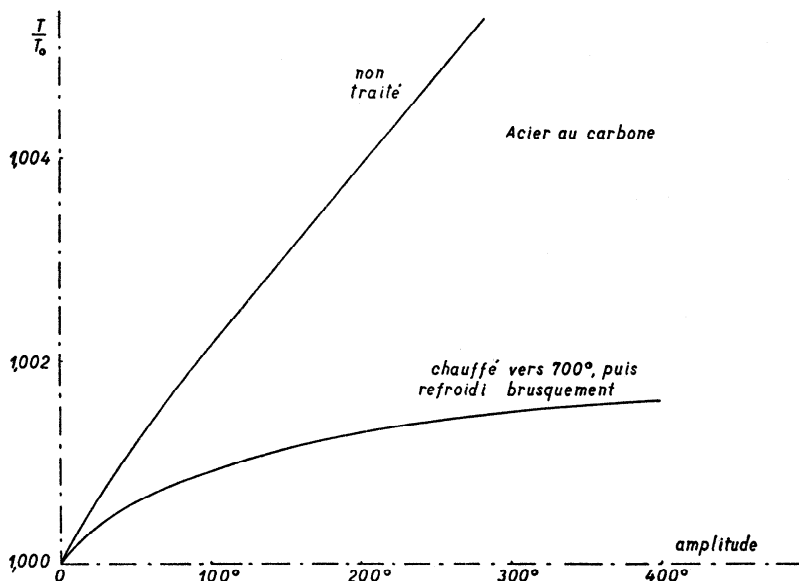


Fig. 378

Jaquerod a montré que pour les oscillations de faible amplitude d'un pendule de torsion, la période ou le rapport $\frac{T}{T_0}$ augmente avec l'angle θ , si le fil est en acier (fig. 378) ; s'il est en élinvar, la période diminue d'abord pour augmenter ensuite (fig. 379).

Les courbes de la figure 379 représentent la variation du rapport $\frac{G}{G_0}$; quand ce rapport augmente, $\frac{T}{T_0}$ diminue d'après la formule (407).

La figure 379 montre que la diminution du module peut atteindre 1 % pour une torsion de 6 tours ; cet effet est donc considérable comme la modification correspondante de la période, qui vaut :

$$\frac{T_0}{T_1} = \sqrt{\frac{G_1}{G_0}} = \sqrt{0,99} = 0,994\,987\,48.$$

Si l'on suppose $T_0 = 2$ s, on a :

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{T_1 - T_0}{T_0} = \frac{1}{0,994\,987\,48} - 1 = 0,005\,038,$$

ce qui équivaut à une marche diurne $\mu = 435$ s.

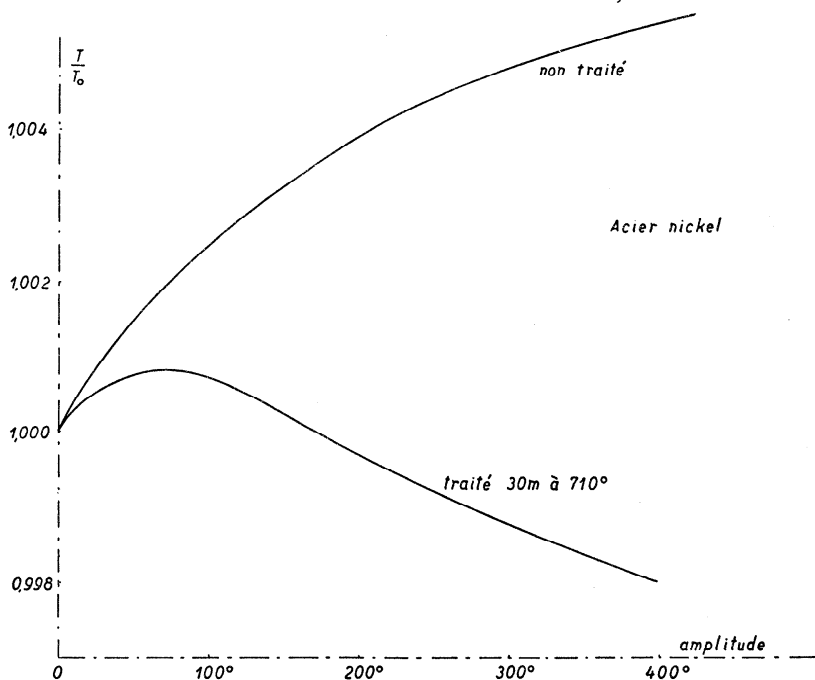


Fig. 379

Pour étudier la variation du module d'Young, Jaquerod a remplacé le fil inférieur par un spiral cylindrique qui travaille à la flexion. Le fil supérieur ayant été soigneusement étudié, on peut voir si la partie de la période due au spiral varie ou non suivant l'état de contrainte du spiral. Les courbes des figures 380 et 381 représentent la période en fonction de l'angle de flexion du spiral, pour la position autour de laquelle s'effectuent les oscillations de faible amplitude.

Si la loi de Hooke était exacte, les courbes des figures 378 à 381 devraient être des droites parallèles à l'axe des abscisses.

Si les oscillations de faible amplitude intéressent les constructeurs d'horloges à pendule, elles ont peu d'intérêt pour les fabricants de montres. Il y a donc lieu d'examiner le comportement des spiraux dans des oscillations de grande amplitude, de 200 à 300° par exemple.

Jaquerod a mis au point une méthode de coïncidences permettant de mesurer, au cent-millième près, la période d'un pendule de torsion exécutant des oscillations dont l'amplitude atteint 360°. Il a constaté que la période varie avec l'amplitude, mais pas de la façon que laissait prévoir la méthode quasi-statique de la mesure de la période d'un pendule exécutant des oscillations de faible amplitude. C'est aux faibles amplitudes que la période varie le plus.

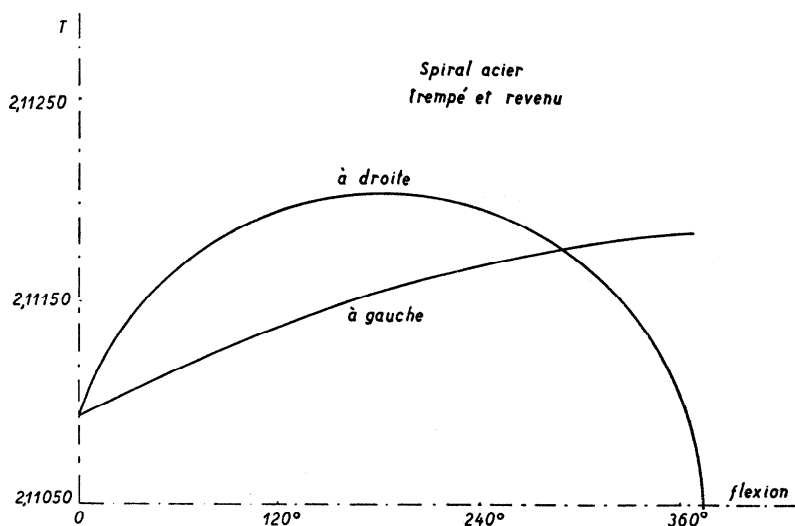


Fig. 380

Pour les horlogers, les constatations suivantes sont intéressantes :
 1° la période augmente avec l'amplitude pour les spiraux en acier au carbone, en acier-nickel non traité, en élinvar, en alliage SHD 90, en cuprobéryllium durci ; 2° pour les spiraux en acier-nickel traité 30 minutes à 710°, la période augmente d'abord avec l'amplitude jusqu'à $\varphi_0 \cong 80^\circ$,

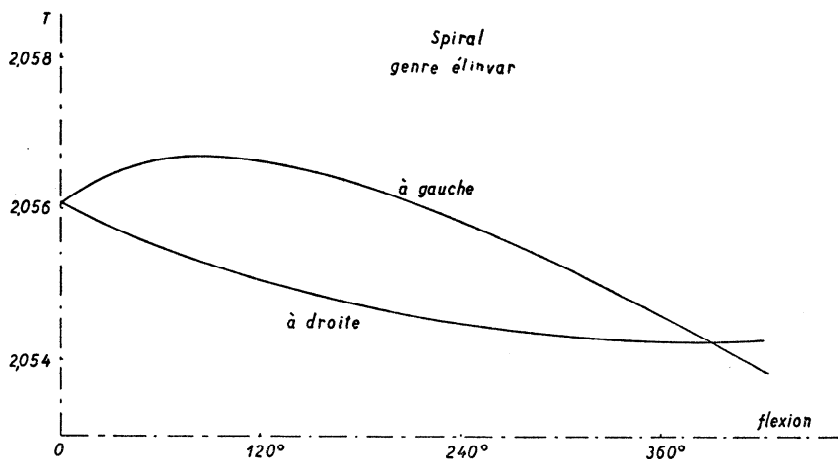


Fig. 381

puis diminue pour de plus grandes amplitudes ; 3° pour les spiraux en acier au carbone chauffé à 700° et refroidi brusquement, en acier-nickel non traité, en élinvar SHD 90, la courbe de la période en fonction de l'amplitude s'aplatit pour les grandes oscillations (φ_0 de 200 à 400°).

On peut donc prévoir, pour ces derniers spiraux, une diminution de la période, soit une avance aux petits arcs, plus ou moins susceptible de compenser le retard dû à l'échappement.

La cause de ces phénomènes n'est pas encore connue ; il y a, entre les résultats obtenus par les méthodes quasi statique et dynamique des contradictions encore inexpliquées. D'après la méthode quasi statique, l'élinvar SHD 90 traité obéit à la loi de Hooke pour les petites amplitudes (fig. 382) ; à partir de 200°, le module augmente rapidement ; à

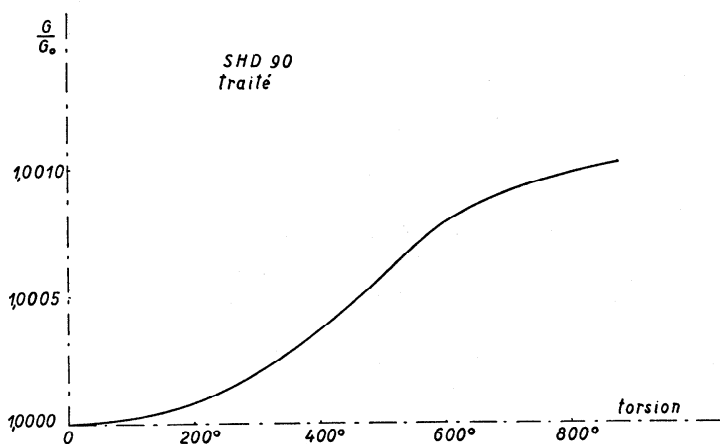


Fig. 382

partir de 500°, il augmente plus lentement. D'après la méthode dynamique, la période (ou le rapport $\frac{T}{T_0}$) augmente quand φ_0 croît (fig. 383) ; la variation de $\frac{T}{T_0}$ est plus rapide aux petites amplitudes, ce que contredit la méthode quasi statique.

Ce comportement des alliages n'est pas lié à leurs propriétés magnétiques, car il est le même pour des alliages non magnétiques. Il ne paraît pas non plus dépendre du frottement intérieur. Pour le régleur, un fait subsiste : certains alliages présentent, à côté des grands avantages d'une auto-compensation thermique exposés plus loin, la propriété de procurer de l'avance aux petits arcs et de faciliter ainsi le réglage du plat au pendu.

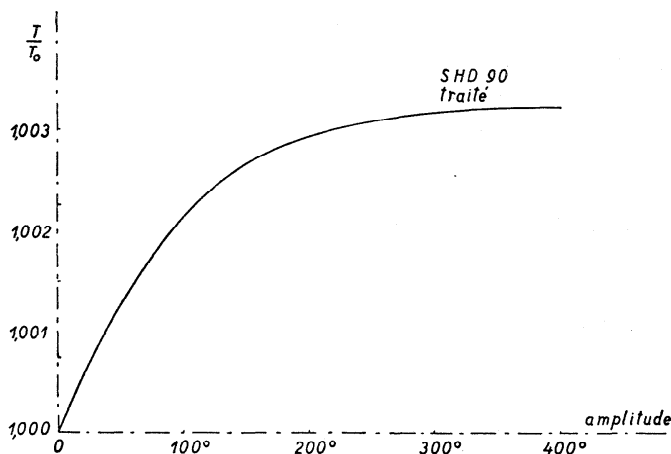


Fig. 383

L'influence de la température. — Les variations de la température modifient les dimensions du balancier et du spiral; elles ont aussi une influence sur le module d'élasticité de ce dernier.

Une élévation de la température augmente les dimensions du balancier, son rayon de giration, donc son moment d'inertie; ceci se traduit par une augmentation de la période du balancier-spiral, donc par un retard de la montre.

Il n'est pas aussi facile de prévoir l'effet des changements des dimensions du spiral sur la période.

Les équations (151) du chapitre VII (p. 38) montrent que les modifications de l'épaisseur sont trois fois plus efficaces que celles de la hauteur ou de la longueur du spiral.

Le moment élastique du spiral est, à 0° C :

$$C_0 = \frac{Ee_0^3 h_0}{12 L_0}.$$

Ne tenons pas compte, pour le moment, de l'influence de la température sur E et appelons α le coefficient de dilatation linéaire du métal dont est fait le spiral. A la température θ° C, le moment élastique est C_θ :

$$C_\theta = \frac{Ee_0^3(1 + \alpha\theta)^3 h_0(1 + \alpha\theta)}{12 L_0(1 + \alpha\theta)},$$

soit :

$$C_\theta = C_0(1 + \alpha\theta)^3. \quad (408)$$

Le coefficient α est un nombre positif, donc $C_\theta > C_0$. En augmentant les dimensions du spiral, l'élévation de la température augmente le moment

élastique de ce dernier, c'est-à-dire diminue la période du balancier-spiral et fait avancer la montre.

Le résultat eût été le même, si les dimensions, à la température θ , avaient été calculées au moyen de la formule plus exacte :

$$e_{\theta} = e_0(1 + \alpha\theta + \beta\theta^2).$$

Le moment d'inertie du balancier est, à 0°C :

$$I_0 = M\rho_0^2,$$

où M désigne la masse et ρ_0 le rayon de giration du balancier. Soit α' le coefficient de dilatation linéaire du métal du balancier que nous supposons monométallique. Nous avons :

$$I_{\theta} = M\rho_0^2(1 + \alpha'\theta)^2 = I_0(1 + \alpha'\theta)^2$$

et

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{C_0}},$$

d'où :

$$T_{\theta} = 2\pi\sqrt{\frac{I_0(1 + \alpha'\theta)^2}{C_0(1 + \alpha\theta)^3}} = T_0 \frac{1 + \alpha'\theta}{(1 + \alpha\theta)^{\frac{3}{2}}}. \quad (409)$$

Il y a donc une certaine compensation des deux effets ; la compensation serait parfaite si :

$$1 + \alpha'\theta = (1 + \alpha\theta)^{\frac{3}{2}}$$

ou, puisque α est un petit nombre :

$$1 + \alpha'\theta = 1 + \frac{3}{2}\alpha\theta,$$

soit :

$$\alpha' = \frac{3}{2}\alpha.$$

L'horloger n'a aucun intérêt à une compensation de ce genre, parce que l'effet principal d'un changement de température sur la marche d'une montre provient de la modification du module d'élasticité du spiral. Ce module varie avec la température d'une façon qui, en première approximation, peut être exprimée par la formule :

$$E_{\theta} = E_0(1 + \beta\theta).$$

Celle-ci ne diffère pas de la formule (2) (t. I, p. 96) ; nous y avons simplement remplacé α par β pour ne pas créer de confusion avec le coefficient de dilatation utilisé plus haut.

Le coefficient β est négatif; pour l'acier, il vaut :

$$\beta \cong -2,4 \cdot 10^{-4}.$$

Si la température augmente de 1°C , le module devient :

$$E_1 = E_0(1 - 2,4 \cdot 10^{-4}).$$

Considérons uniquement le changement du module provoqué par une élévation de la température de 1°C ; nous avons :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{C_0}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 \cdot 12L_0}{E_0 e_0^3 h_0}}$$

et

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 \cdot 12L_0}{E_1 e_0^3 h_0}},$$

puisque nous supposons que seul E_0 varie, d'où :

$$T_1 = T_0 \sqrt{\frac{1}{1 - 2,4 \cdot 10^{-4}}},$$

$$\Delta T_0 = T_1 - T_0 = T_0 \left(\sqrt{\frac{1}{1 - 2,4 \cdot 10^{-4}}} - 1 \right)$$

et

$$\frac{\Delta T_0}{T_0} = \sqrt{\frac{1}{1 - 2,4 \cdot 10^{-4}}} - 1 \cong +1,2 \cdot 10^{-4}.$$

La marche diurne de la montre sera :

$$\mu = -86\,400 \cdot 1,2 \cdot 10^{-4} = -10,368 \text{ s.}$$

L'expérience montre qu'une élévation de la température de 1°C fait retarder de 10 à 11 secondes par jour une montre munie d'un balancier monométallique et d'un spiral d'acier. Ce retard provient de la diminution du module d'élasticité.

Calculons l'avance résultant des changements dans les dimensions d'un balancier monométallique en laiton et dans celles d'un spiral d'acier. Utilisons à cet effet la formule (409) :

$$T_\theta = T_0 \frac{1 + \alpha'\theta}{(1 + \alpha\theta)^{\frac{3}{2}}}.$$

Les coefficients de dilatation sont, pour le laiton :

$$\alpha' = 18 \cdot 10^{-6},$$

pour l'acier :

$$\alpha = 11 \cdot 10^{-6},$$

donc :

$$T_1 = T_0 \frac{1 + 18 \cdot 10^{-6}}{(1 + 11 \cdot 10^{-6})^{\frac{3}{2}}},$$

$$\Delta T_0 = T_1 - T_0 = T_0 \frac{1 + 18 \cdot 10^{-6}}{(1 + 11 \cdot 10^{-6})^{\frac{3}{2}}} - T_0,$$

et

$$\frac{\Delta T_0}{T_0} = \frac{1 + 18 \cdot 10^{-6}}{(1 + 11 \cdot 10^{-6})^{\frac{3}{2}}} - 1 = 1,499 \cdot 10^{-6}.$$

La marche diurne correspondante est :

$$\mu = - 86\,400 \cdot 1,499 \cdot 10^{-6} = - 0,129 \text{ s}.$$

Il s'agit d'un retard puisque μ est négatif.

L'influence de la température est donc considérable puisque, dans le cas que nous avons considéré, une élévation de celle-ci de 1°C provoque un retard de la marche diurne de :

$$- 10,368 - 0,129 \cong - 10,50 \text{ s}.$$

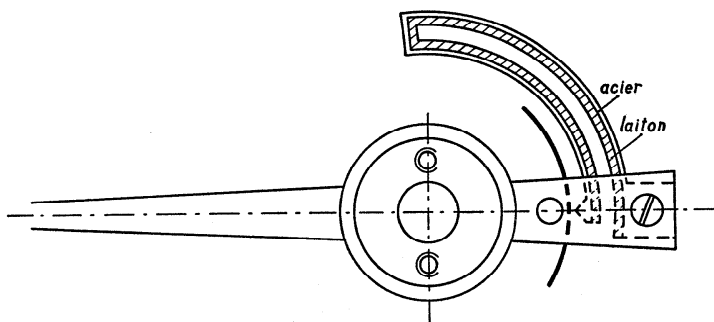


Fig. 384

Mais une variation de la température ne détruit pas l'isochronisme, si nous admettons — ce qui n'est plus certain depuis les expériences de Jaquerod — que les variations du module suivant l'état de contrainte du spiral sont les mêmes pour toutes les températures.

Pour compenser l'influence de la température d'une façon rationnelle, il faut utiliser un phénomène provoqué également par la modification de la température, mais dont l'effet est indépendant de l'amplitude.

Ainsi la compensation imaginée par Breguet (fig. 384) et consistant en une lame bimétallique dont un des segments porte la clef de raquette n'est pas recommandable, car elle corrige un effet indépendant de l'amplitude par le jeu du spiral entre les goupilles de raquette ; or ce dernier a, sur la période, une influence qui est fonction de l'amplitude.

Par contre, dans la compensation imaginée par Harrison (fig. 385), la température agit sur une lame bimétallique dont le déplacement modifie la longueur du spiral ; or ce changement influe sur la période sans toucher à l'isochronisme.

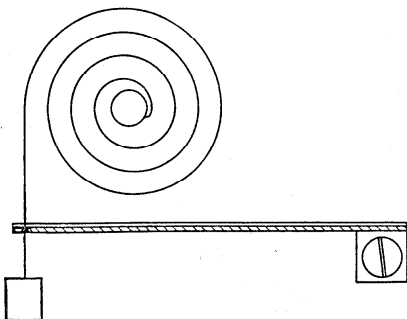


Fig. 385

La compensation thermique au moyen du balancier bimétallique. —

Dès le XVIII^e siècle, on utilisa un balancier compensateur dont la serge est une lame bimétallique composée de deux métaux inégalement dilatables (en général acier et laiton) (fig. 386). La serge est coupée près du bras en deux endroits diamétralement opposés ; elle a un certain nombre de trous destinés à recevoir des vis lourdes, parfois en or ou en platine.

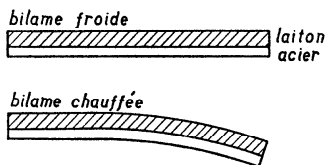


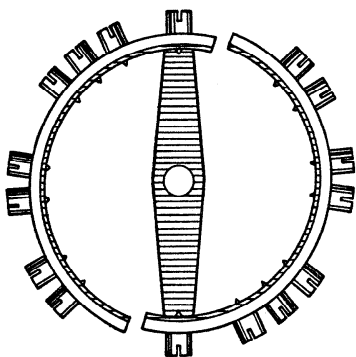
Fig. 386

Les métaux de la serge sont soudés l'un à l'autre ; le laiton est fondu sur l'acier.

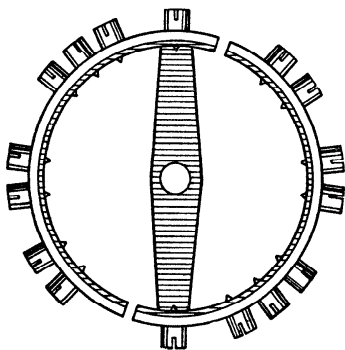
Le laiton se dilate plus que l'acier, ce qui contraint une bilame droite à se courber (fig. 386), le laiton formant la partie convexe.

Dans le balancier compensateur des montres (fig. 387), le laiton est à l'extérieur de la serge, de sorte qu'une élévation de la température a pour effet une augmentation de la courbure ; le balancier devient plus petit, son rayon de giration et son moment d'inertie diminuent, sa période également : la montre avance. Ainsi l'effet d'une élévation de la température, le retard de 10 à 11 secondes par degré C, est atténué par l'avance que provoque la courbure de la serge du balancier.

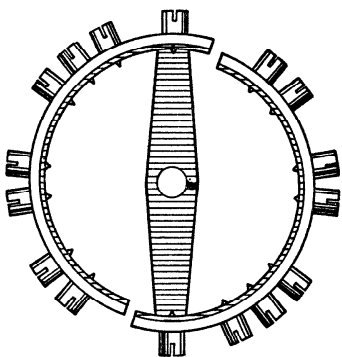
La compensation peut être réglée, puisque les parties de la serge qui sont près de la coupure se rapprochent davantage de l'axe du balancier ;



Au froid.



A la température normale.



Au chaud.

Fig. 387

ce sont ces parties qui contribuent le plus à la diminution du moment d'inertie du balancier. On augmente cet effet, c'est-à-dire qu'on accroît l'influence compensatrice du balancier, en mettant les vis plus près de la coupure de la serge.

Si la *compensation est trop faible*, c'est-à-dire si la montre retarde encore au chaud, il faut rapprocher une ou plusieurs paires de vis de la coupure de la serge ; si la *compensation est trop forte*, c'est-à-dire si la montre avance au chaud, il faut éloigner de la coupure de la serge une ou plusieurs paires de vis.

Le balancier bimétallique coupé est encore couramment employé dans les chronomètres, malgré son prix élevé et les précautions qu'exige son maniement. Grâce aux vis dont on peut augmenter ou diminuer la masse (au moyen de rondelles ou d'un fraisage), il est facile de mettre d'équilibre un balancier bimétallique ou de modifier son moment d'inertie.

En déplaçant les vis pour régler la compensation, on risque de détruire l'équilibre du balancier ; après chaque retouche de la compensation, il importe de vérifier cet équilibre.

La déformation des lames bimétalliques. — Dès que la température se modifie, les lames bimétalliques se déforment à cause de la différence de dilatation des deux métaux. Cependant, lorsque des métaux sont soudés l'un à l'autre, ils ne peuvent pas se dilater normalement.

Yvon Villarceau (1813-1889) a étudié le problème de la déformation des lames bimétalliques à la suite d'un changement de température ; il est arrivé à une formule classique donnant la variation de la courbure (ou du rayon de courbure) en fonction des constantes de la bilame et de la

variation de la température. Nous reproduisons la démonstration de la formule de Villarceau, due à Keelhoff.

Soit une bilame de forme circulaire (fig. 388); après la déformation, elle sera encore circulaire car toutes ses sections transversales ont été sollicitées de la même façon. Supposons la bilame fixe en ABC et libre à son extrémité $D_0E_0F_0$. L'arc BE_0 de centre O_0 est la projection du cylindre de contact entre les deux métaux; son rayon de courbure est ϱ_0 . Après la déformation, la section terminale est DEF ; le cylindre de contact a pour projection l'arc BE dont le rayon de courbure est ϱ et dont le centre se trouve en O .

La fibre MN_0 est à la distance u de la zone de contact; e_1 et e_2 sont les épaisseurs des lames; $e_1 + e_2 = e$.

Calculons l'allongement relatif de la fibre MN , que nous appellerons sa dilatation δ :

$$\delta = \frac{MN - MN_0}{MN_0} = \frac{MN}{MN_0} - 1.$$

Mais :

$$\frac{MN}{BE} = \frac{\varrho + u}{\varrho}$$

ou

$$MN = BE \frac{\varrho + u}{\varrho} = BE \left(1 + \frac{u}{\varrho} \right).$$

De même :

$$MN_0 = BE_0 \left(1 + \frac{u}{\varrho_0} \right),$$

donc :

$$\delta = \frac{BE}{BE_0} \frac{1 + \frac{u}{\varrho}}{1 + \frac{u}{\varrho_0}} - 1.$$

Appelons δ_0 la dilatation relative commune aux deux métaux à la zone de contact :

$$\delta_0 = \frac{BE - BE_0}{BE_0} = \frac{BE}{BE_0} - 1,$$

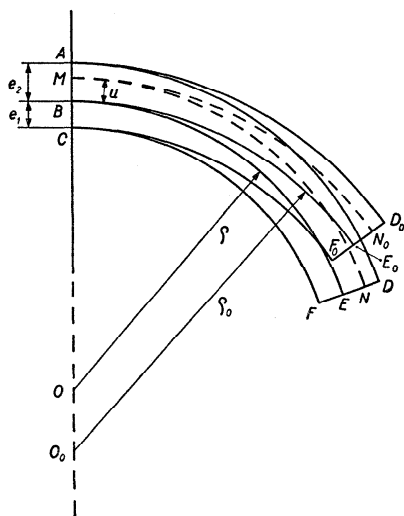


Fig. 388

d'où :

$$\frac{BE}{BE_0} = 1 + \delta_0$$

et, par conséquent :

$$\delta = (1 + \delta_0) \frac{1 + \frac{u}{\varrho}}{1 + \frac{u}{\varrho_0}} - 1$$

ou

$$\delta = \frac{u \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} \right)}{1 + \frac{u}{\varrho_0}} + \delta_0 \frac{1 + \frac{u}{\varrho}}{1 + \frac{u}{\varrho_0}}.$$

Les quantités $\frac{u}{\varrho}$ et $\frac{u}{\varrho_0}$ sont toujours petites dans les balanciers compensateurs ; nous pouvons donc écrire, sans erreur appréciable :

$$\delta = \delta_0 + u \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} \right).$$

Désignons la variation de la courbure par $\Delta \left(\frac{1}{\varrho} \right)$; nous avons :

$$\delta = \delta_0 + u \cdot \Delta \left(\frac{1}{\varrho} \right). \quad (410)$$

La dilatation δ , consécutive à la variation $\Delta \theta$ de la température, est due à la dilatation normale du métal et à l'effet des tensions moléculaires provoquées par la soudure de deux métaux de dilatabilités différentes.

Si nous désignons par α_1 le coefficient de dilatation linéaire du métal intérieur (épaisseur e_1), nous avons :

$$\delta_1 = \delta_0 - u \Delta \left(\frac{1}{\varrho} \right) - \alpha_1 \Delta \theta.$$

Pour le métal extérieur, il faut écrire :

$$\delta_2 = \delta_0 + u \Delta \left(\frac{1}{\varrho} \right) - \alpha_2 \Delta \theta.$$

La force capable de produire la dilatation δ est δE si E désigne le module d'Young.

Les expressions suivantes donnent la valeur des tensions en fonction de u et de $\Delta\theta$:

$$t_1 = E_1 \left[\delta_0 - u\Delta \left(\frac{1}{\rho} \right) - \alpha_1 \Delta\theta \right], \quad (411)$$

$$t_2 = E_2 \left[\delta_0 + u\Delta \left(\frac{1}{\rho} \right) - \alpha_2 \Delta\theta \right]. \quad (412)$$

Nous admettons que les tensions varient proportionnellement à la distance u .

Pour $u = 0$ les équations (411) et (412) donnent la valeur des tensions t'_1 et t'_2 à la zone de contact:

$$t'_1 = E_1(\delta_0 - \alpha_1 \Delta\theta), \quad t'_2 = E_2(\delta_0 - \alpha_2 \Delta\theta).$$

Représentons (fig. 389) ces tensions en fonction de u . Pour $u = 0$, $t_1 = t'_1$; pour $u = e_1$, $t_1 = t''_1$. La surface du trapèze $OABC$ représente la somme des tensions de toutes les fibres du métal 1. Cette surface vaut:

$$\frac{t'_1 + t''_1}{2} e_1.$$

Pour le métal 2, la somme des tensions sera:

$$\frac{t'_2 + t''_2}{2} e_2.$$

Puisqu'il y a équilibre dans chaque section de la bilame et qu'aucune force extérieure n'agit, la somme des tensions ainsi que celle de leurs moments par rapport à un point quelconque sont nulles.

Les forces t sont parallèles; leur résultante passe par le centre de gravité G du trapèze $OABC$:

$$GD = \frac{e_1}{3} \frac{t'_1 + 2t''_1}{t'_1 + t''_1}.$$

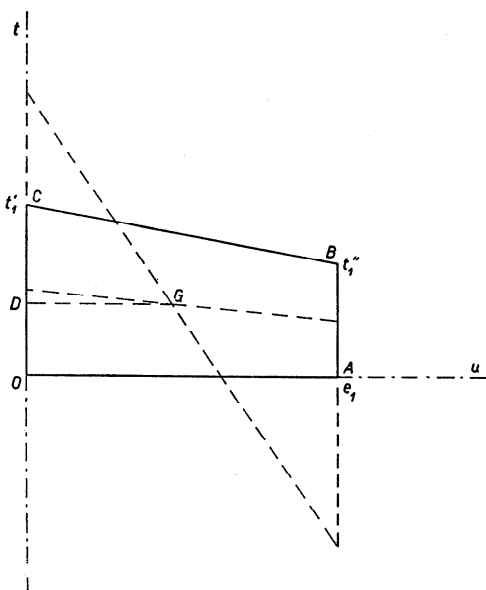


Fig. 389

La somme des moments pour le métal 1 est :

$$\frac{t'_1 + t''_1}{2} e_1 \frac{1}{3} \frac{t'_1 + 2t''_1}{t'_1 + t''_1} = \frac{e_1^2}{6} (t'_1 + 2t''_1).$$

Les conditions d'équilibre sont exprimées par les équations :

$$(t'_1 + t''_1) \frac{e_1}{2} + (t'_2 + t''_2) \frac{e_2}{2} = 0, \quad \frac{e_1^2}{6} (t'_1 + 2t''_1) + \frac{e_2^2}{6} (t'_2 + 2t''_2) = 0.$$

Introduisons dans ces équations les valeurs de t'_1 , t''_1 , t'_2 et t''_2 données par (411) et (412) ; nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{e_1 E_1}{2} \left[\delta_0 - \alpha_1 \Delta \theta + \delta_0 - e_1 \Delta \left(\frac{1}{\varrho} \right) - \alpha_1 \Delta \theta \right] \\ + \frac{e_2 E_2}{2} \left[\delta_0 - \alpha_2 \Delta \theta + \delta_0 + e_2 \Delta \left(\frac{1}{\varrho} \right) - \alpha_2 \Delta \theta \right] = 0, \end{aligned} \quad (413)$$

$$\begin{aligned} \frac{e_1^2 E_1}{6} \left[\delta_0 - \alpha_1 \Delta \theta + 2\delta_0 - 2e_1 \Delta \left(\frac{1}{\varrho} \right) - 2\alpha_1 \Delta \theta \right] \\ + \frac{e_2^2 E_2}{6} \left[\delta_0 - \alpha_2 \Delta \theta + 2\delta_0 + 2e_2 \Delta \left(\frac{1}{\varrho} \right) - 2\alpha_2 \Delta \theta \right] = 0. \end{aligned} \quad (414)$$

De ces équations, nous tirons :

$$\delta_0 \left(e_1 E_1 + e_2 E_2 \right) - \Delta \theta \left(e_1 E_1 \alpha_1 + e_2 E_2 \alpha_2 \right) - \Delta \left(\frac{1}{\varrho} \right) \frac{E_1 e_1^2 - E_2 e_2^2}{2} = 0$$

et

$$\frac{\delta_0}{2} \left(e_1^2 E_1 + e_2^2 E_2 \right) - \frac{\Delta \theta}{2} \left(e_1^2 E_1 \alpha_1 + e_2^2 E_2 \alpha_2 \right) - \frac{1}{3} \Delta \left(\frac{1}{\varrho} \right) \left(E_1 e_1^3 + E_2 e_2^3 \right) = 0,$$

relations qui fournissent chacune une valeur de δ_0 :

$$\delta_0 = \frac{\Delta \theta \left(e_1 E_1 \alpha_1 + e_2 E_2 \alpha_2 \right) + \frac{1}{2} \Delta \left(\frac{1}{\varrho} \right) \left(E_1 e_1^2 - E_2 e_2^2 \right)}{e_1 E_1 + e_2 E_2}$$

et

$$\delta_0 = \frac{\Delta \theta \left(e_1^2 E_1 \alpha_1 + e_2^2 E_2 \alpha_2 \right) + \frac{2}{3} \Delta \left(\frac{1}{\varrho} \right) \left(E_1 e_1^3 + E_2 e_2^3 \right)}{e_1^2 E_1 + e_2^2 E_2}.$$

Ces deux résultats permettent de calculer la modification de la courbure de la bilame, c'est-à-dire $\Delta\left(\frac{1}{\varrho}\right) = \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}$. Puisque $\Delta\theta = \theta - \theta_0$, nous obtenons :

$$\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} = \frac{\theta - \theta_0}{\frac{2}{3} \frac{e}{\alpha_2 - \alpha_1} \left[1 + \frac{(E_2 e_2^2 - E_1 e_1^2)^2}{4 e^2 e_1 e_2 E_1 E_2} \right]}. \quad (415)$$

C'est la formule de Villarceau ; nous pouvons l'écrire plus simplement en remarquant que :

$$\frac{2}{3} \frac{e}{\alpha_2 - \alpha_1} \left[1 + \frac{(E_2 e_2^2 - E_1 e_1^2)^2}{4 e^2 e_1 e_2 E_1 E_2} \right]$$

est une grandeur constante pour un balancier donné. Appelons cette grandeur h ; la formule de Villarceau devient :

$$\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} = \frac{\theta - \theta_0}{h}. \quad (416)$$

Conséquences pratiques de la formule de Villarceau. — La formule (416) permet de déduire les conditions qui donneront à la serge le maximum de sensibilité ; ce maximum est atteint lorsque $\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}$ a la plus grande valeur possible pour une différence donnée $\Delta\theta$. Le maximum de $\Delta\left(\frac{1}{\varrho}\right)$ correspond au minimum de h . La valeur de h est nulle pour $e = 0$; *une bilame mince est donc plus sensible qu'une bilame plus épaisse*. En pratique, il est prudent de ne pas réduire la valeur de e au-delà d'une certaine limite, afin de ne pas augmenter les risques de déformation par la force centrifuge ou par les manipulations du régleur.

h diminue lorsque $\alpha_2 - \alpha_1$ augmente ; il faut donc choisir des métaux de dilatibilités très différentes. Ainsi, en préférant une bilame en invar ($\alpha_2 = 1,1 \cdot 10^{-6}$) et laiton ($18 \cdot 10^{-6}$) à une bilame en acier ($\alpha_2 = 10,4 \cdot 10^{-6}$) et laiton ($18 \cdot 10^{-6}$), on augmenterait le facteur $\alpha_2 - \alpha_1$ dans la proportion de 7,6 à 16,9.

Pour $\alpha_2 - \alpha_1 = 0$, $h = \infty$ et $\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} = 0$; la serge du balancier ne se déforme pas, quelle que soit la valeur de $\Delta\theta$.

Dans l'équation (415), l'expression entre crochets est minimum quand le numérateur de la fraction est égal à zéro. Ce minimum correspond à

la plus petite valeur de h et à la plus grande valeur de $\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}$. La serge a donc le maximum de sensibilité quand :

$$E_2 e_2^2 = E_1 e_1^2$$

ou

$$\frac{e_1}{e_2} = \sqrt{\frac{E_2}{E_1}}. \quad (417)$$

Le balancier bimétallique coupé est d'autant plus sensible aux variations de la température que le rapport entre les épaisseurs des deux métaux de la bilame se rapproche de la racine carrée du rapport inverse des modules d'Young de ces métaux.

Le praticien qui veut augmenter le pouvoir compensateur d'un balancier bimétallique donné peut agir sur les facteurs suivants : l'épaisseur totale de la serge et le rapport des épaisseurs des deux métaux de la bilame.

Le fabricant de balanciers peut, par un choix judicieux des métaux, modifier la différence des coefficients de dilatation des métaux.

L'ajustement de la compensation se fait par le déplacement des vis le long de la serge.

Critique de la formule de Villarceau. — Pour calculer la variation de la courbure d'une lame bimétallique, Villarceau a fait les hypothèses suivantes :

1° la lame est parfaitement homogène, c'est-à-dire que toutes ses parties réagissent de la même façon aux sollicitations ;

2° ces sollicitations sont les mêmes pour toutes les parties de la lame, de sorte que les réactions sont partout les mêmes ;

3° les sections transversales restent planes après la déformation (hypothèse de Bernoulli-Navier) ;

4° l'épaisseur de la lame est si faible par rapport à son rayon que l'on peut négliger les termes $\frac{u}{\varrho}$ et $\frac{u}{\varrho_0}$.

Les deux premières hypothèses ne sont jamais complètement vraies ; en particulier la seconde est loin de l'être puisqu'une extrémité de la bilame est libre, tandis que l'autre est solidaire du bras du balancier, ce qui équivaut à un encastrement dont la position se déplace par suite de la dilatation du bras.

L'hypothèse de Bernoulli-Navier est à la base des théories de la résistance des matériaux, mais on sait assez que ces théories ne prétendent pas à une exactitude rigoureuse.

Enfin la quatrième hypothèse est plus ou moins réalisée. En pratique, on fait souvent $e \cong 0,08 \varrho_0$, de façon que le rapport $\frac{u}{\varrho_0}$ ait la valeur maximum 0,08 dont les puissances successives diminuent rapidement :

$$\left(\frac{u}{\varrho_0}\right)^2 = 0,0064, \quad \left(\frac{u}{\varrho_0}\right)^3 = 0,000\,512, \dots$$

On peut considérer la formule de Villarceau comme une approximation ; Volet et Keelhoff ont établi des formules plus approchées.

En réalité les formules de Keelhoff reviennent à remplacer les valeurs E_1 et E_2 des modules par de nouvelles valeurs E'_1 et E'_2 reliées aux anciennes par les relations :

$$E'_1 = E_1 \frac{\varrho_0}{\varrho_0 - \frac{1}{2}e_1}, \quad E'_2 = E_2 \frac{\varrho_0}{\varrho_0 + \frac{1}{2}e_2}.$$

On voit qu'en négligeant les épaisseurs e_1 et e_2 , on retrouve les anciennes valeurs des modules.

Si l'on admet que $e = 0,08 \varrho_0$, on peut écrire :

$$e_1 = \frac{3}{5}e = 0,048 \varrho_0, \quad e_2 = \frac{2}{5}e = 0,032 \varrho_0,$$

$$E'_1 = E_1 \frac{\varrho_0}{\varrho_0 - 0,024 \varrho_0} = 1,024 E_1, \quad E'_2 = E_2 \frac{\varrho_0}{\varrho_0 + 0,016 \varrho_0} = 0,984 E_2.$$

L'augmentation ou la diminution de 2% qui affecte les valeurs de E est peu importante si l'on considère que ces valeurs sont données dans les tables avec une approximation assez grossière (pour l'acier, les tables donnent des valeurs qui vont de 19 000 à 23 000 kg*/mm²).

En tenant compte des nouvelles valeurs des modules, on trouve :

$$\frac{e_1}{e_2} = \sqrt{\frac{E'_2}{E'_1}} = \sqrt{\frac{0,984 E_2}{1,024 E_1}} = 0,9803 \sqrt{\frac{E_2}{E_1}}.$$

Le rapport entre les épaisseurs est modifié, par la formule de Keelhoff, d'environ 2 % ; de plus la sensibilité de la serge, c'est-à-dire $\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}$, varie lentement aux environs du maximum de sensibilité.

Pour le praticien, la formule de Villarceau est suffisante.

Le moment d'inertie d'un balancier bimétallique déformé. — Proposons-nous de calculer le moment d'inertie d'un balancier bimétallique déformé, en tenant compte de la variation du rayon de courbure d'après la formule de Villarceau et aussi de la dilatation du bras.

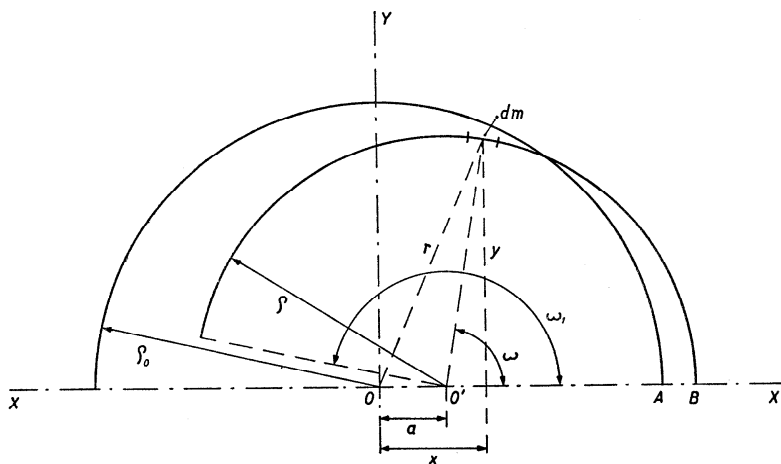


Fig. 390

Soit un balancier dont nous représentons (fig. 390) la demi-serge par un arc de cercle et le bras par l'axe xOx ; O est le centre du balancier. A la température θ_0 , la serge a son centre de courbure en O et son rayon de courbure vaut ϱ_0 . A la température θ , la serge a son centre de courbure en O' et son rayon de courbure vaut ϱ . Nous pouvons calculer ϱ si nous connaissons les épaisseurs et les coefficients de dilatation des métaux de la bilame.

Posons $OO' = a$; nous avons :

$$a = OA + AB - BO' = \varrho_0 + \Delta\varrho_0 - \varrho.$$

Mais :

$$\Delta\varrho_0 = \varrho_0 \alpha_1 (\theta - \theta_0) = \varrho_0 \alpha_1 \Delta\theta,$$

si α_1 désigne le coefficient de dilatation linéaire du bras du balancier, donc :

$$a = \varrho_0 (1 + \alpha_1 \Delta\theta) - \varrho.$$

La masse de la demi-serge est M ; la masse par unité d'angle est m et la masse élémentaire est $dm = m d\omega$.

Considérons un élément de masse dm situé à la distance r de O ; son moment d'inertie par rapport à O est $r^2 dm$. Mais :

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

et

$$x = a + \varrho \cos \omega, \quad y = \varrho \sin \omega,$$

ω étant l'azimut de dm par rapport à l'axe Ox . Dès lors :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\omega_1} r^2 dm = \int_0^{\omega_1} (a^2 + 2a\varrho \cos \omega + \varrho^2 \cos^2 \omega + \varrho^2 \sin^2 \omega) dm \\ &= (a^2 + \varrho^2) \int_0^{\omega_1} dm + 2a\varrho \int_0^{\omega_1} \cos \omega \, d\omega = (a^2 + \varrho^2)M + 2a\varrho \int_0^{\omega_1} m \cos \omega \, d\omega, \end{aligned}$$

soit :

$$I = (a^2 + \varrho^2)M + 2a\varrho m \sin \omega_1. \quad (418)$$

Si la coupure est près du bras, $\omega_1 \cong \pi$, $\sin \omega_1 \cong 0$, d'où :

$$I = (a^2 + \varrho^2)M.$$

Si la coupure est au milieu du bras, comme dans le balancier Guillaume,

$\omega_1 = \frac{\pi}{2}$, $\sin \omega_1 = 1$, d'où :

$$I = (a^2 + \varrho^2)M + 2a\varrho m.$$

L'erreur secondaire de la compensation. — Dès 1771, Ferdinand Berthoud, puis, en 1833, Dent ont constaté qu'une montre munie d'un balancier compensateur en acier-laiton et d'un spiral d'acier, ayant la même marche à deux températures données θ_1 et θ_2 , avance à la température $\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$. La différence entre la marche à la température moyenne et la moyenne des marches aux températures extrêmes a reçu le nom d'*erreur secondaire* ou *anomalie de Dent*.

Soient μ_1 et μ_2 les marches à θ_1 et à θ_2 , μ_m la marche à la température moyenne $\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$; l'erreur secondaire ε est :

$$\varepsilon = \mu_m - \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}.$$

Malgré le nom d'anomalie de Dent, la priorité de la découverte appartient à Berthoud qui, dans son *Traité des horloges marines*, dit : « Bien que la compensation soit sûre, elle n'a pas également lieu pour tous les degrés extrêmes et moyens de la température. »

La valeur de l'erreur secondaire n'est pas la même pour toutes les montres : les différences proviennent des propriétés élastiques des spiraux et du pouvoir compensateur du balancier.

On a utilisé des alliages de palladium dans la fabrication des spiraux ; lorsque ces spiraux sont associés à un balancier acier-laiton, l'erreur secondaire est plus faible. Dent a fait des essais avec des spiraux en verre.

Cause de l'erreur secondaire. — La dilatation des métaux n'a pas lieu d'après une loi linéaire ; elle est exprimée par une équation du second degré ; la longueur l_θ d'une tige, à $\theta^\circ \text{C}$, est :

$$l_\theta = l_0(1 + \alpha\theta + \beta\theta^2),$$

où l_0 désigne la longueur de la tige à 0°C . Posons :

$$\alpha + \beta\theta = a; \quad (419)$$

la formule précédente devient :

$$l_\theta = l_0(1 + a\theta),$$

et l'allongement a pour valeur :

$$\Delta l = l_0 a \theta.$$

D'après (419), a est une fonction de θ .

Le balancier bimétallique le plus employé est le balancier acier-laiton. Or les coefficients de dilatation linéaire de l'acier sont :

$$\alpha_1 = 10,4 \cdot 10^{-6}, \quad \beta_1 = 5,20 \cdot 10^{-9},$$

donc :

$$\alpha_1 = 10,4 \cdot 10^{-6} + 5,20 \cdot 10^{-9}\theta;$$

ceux du laiton valent :

$$\alpha_2 = 18,6 \cdot 10^{-6}, \quad \beta_2 = 5,50 \cdot 10^{-9},$$

donc :

$$\alpha_2 = 18,6 \cdot 10^{-6} + 5,50 \cdot 10^{-9}\theta.$$

D'après la formule de Villarceau, la variation $\Delta\left(\frac{1}{\varrho}\right)$ de la courbure de

la bilame est proportionnelle à la différence des coefficients de dilatation des deux métaux. Les coefficients de dilatation α et β sont remplacés par α .

Pour la serge en acier-laiton, nous avons :

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= (18,6 - 10,4)10^{-6} + (5,50 - 5,20)10^{-9}\theta \\ &= 8,2 \cdot 10^{-6} + 0,30 \cdot 10^{-9}\theta, \end{aligned}$$

donc $a_2 - a_1$ est pratiquement indépendant de θ . La variation de $\frac{1}{\varrho}$ est une fonction à peu près linéaire de la différence des températures θ et θ_0 .

Si nous avons choisi les épaisseurs des métaux de la bilame de façon à obtenir le maximum de sensibilité de la serge, nous obtenons :

$$\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} = \frac{(\theta - \theta_0) \cdot 3(a_2 - a_1)}{2e} = (\theta - \theta_0)b,$$

en posant :

$$b = \frac{3(a_2 - a_1)}{2e}.$$

Mais :

$$\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} = \frac{\varrho_0 - \varrho}{\varrho\varrho_0} = -\frac{\Delta\varrho}{\varrho\varrho_0},$$

d'où :

$$\frac{\Delta\varrho}{\varrho} = -\varrho_0 b \Delta\theta = -\frac{3(a_2 - a_1)}{2\frac{e}{\varrho_0}} \Delta\theta.$$

Appelons $\frac{e}{\varrho_0} = e'$ l'épaisseur relative de la serge ; la formule précédente devient :

$$\frac{\Delta\varrho}{\varrho} = -\frac{3(a_2 - a_1)}{2e'} \Delta\theta. \quad (420)$$

En partant de la température 0°C , nous obtenons :

$$\frac{\Delta\varrho}{\varrho} = -\frac{3(a_2 - a_1)}{2e'} \theta.$$

D'après (420), la variation relative du rayon de courbure du balancier est une fonction linéaire de la température si $a_2 - a_1$ est indépendant de θ , ce qui est, à peu de chose près, le cas pour la bilame acier et laiton. Or, ϱ désigne le rayon du cylindre de contact entre les métaux de la bilame.

La masse du balancier est surtout composée par la serge et les vis : il s'ensuit que le rayon de giration R du balancier est peu différent de ϱ et varie à peu près de la même manière.

Nous devons aussi tenir compte de la dilatation du bras, bien que celle-ci soit très petite comparée à la modification du rayon de courbure du balancier.

La période du balancier est :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C}} = 2\pi \sqrt{\frac{MR^2}{C}},$$

soit :

$$T = 2\pi R \sqrt{\frac{M}{C}}, \quad (421)$$

où M représente la masse du balancier.

La période est directement proportionnelle au rayon de giration du balancier, qui varie proportionnellement à la température comme le rayon de courbure ϱ .

L'effet du changement de courbure de la bilame acier-laiton sur la période est proportionnel à la différence de température, qui a provoqué la déformation.

Cet effet est représenté par une droite telle que OA (fig. 391) pour le balancier acier-laiton dans lequel le laiton est à l'extérieur de la serge.

L'effet à compenser est dû principalement à la modification du module d'Young de l'acier du spiral. Ce module est lié à la température par l'équation (3) du chapitre IV (t. I, p. 96) :

$$E_\theta = E_0(1 - \alpha\theta - \beta\theta^2).$$

Pour un certain acier à 0,9% de carbone, les coefficients α et β valent :

$$\alpha = 263 \cdot 10^{-6}, \quad \beta = 110 \cdot 10^{-9}.$$

Comparons ces valeurs à celles des coefficients de dilatation $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ et β_2 de l'acier et du laiton : α est à peu près 15 fois plus grand que α_2 , β près de 20 fois plus grand que β_2 . Il est donc compréhensible que l'influence de la température sur l'élasticité du spiral soit prépondérante. La grandeur de β explique, d'autre part, pourquoi l'influence de la modification de E sur la période n'est pas représentée par une droite, mais par une courbe telle que OBC (fig. 391) dont chaque point a une ordonnée négative (retard).

Si, dans une montre réglée à 0° C, le déplacement des vis a permis de réaliser une compensation parfaite à la température θ_1° C, l'influence de

la perte d'élasticité du spiral sur la marche de la montre est représentée par l'ordonnée \overline{DB} , tandis que l'effet correcteur du balancier bimétallique est figuré par l'ordonnée \overline{DE} , telle que :

$$\overline{DE} + \overline{DB} = 0.$$

Pour la température $\theta_2 = \frac{\theta_1}{2}$, ces deux effets sont représentés par \overline{FH} et \overline{FG} , l'influence globale par \overline{FI} .

Le même raisonnement peut être fait pour toutes les températures, qu'elles soient ou non comprises entre 0 et θ_1 .

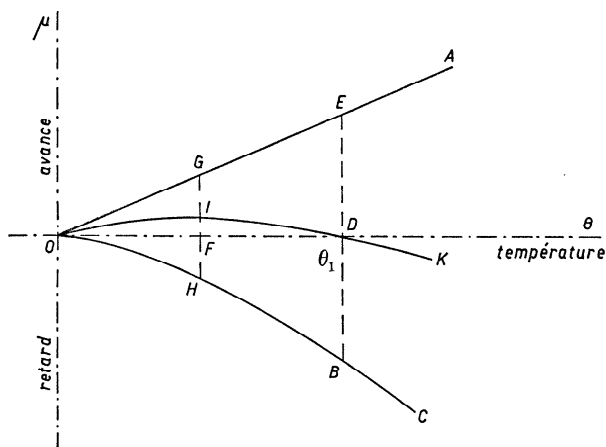


Fig. 391

La courbe $OIDK$ qui représente la marche de la montre exactement compensée à 0°C et à $\theta_1^\circ \text{C}$ révèle l'existence de l'erreur secondaire. Celle-ci peut se déduire de la forme de la courbe représentant la marche de la montre en fonction de la température, même si la compensation n'a pas été ajustée. La figure 392 montre que la valeur de l'erreur secondaire dépend des températures extrêmes auxquelles elle se rapporte.

Si la courbe ADK (fig. 392) représente la marche de la montre en fonction de la température, OA et BD sont les marches aux températures 0° et θ_1° ; la marche à la température $\theta_2 = \frac{\theta_1}{2}$ est figurée par CE si $OC = CB$.

La perturbation de la marche due à une variation de la température pourrait être corrigée à toutes les températures par le balancier acier-laiton, si la marche était représentée par la droite AD ; à θ_2° , la marche

devrait être représentée par CF ; au lieu de cela, elle l'est par CE . L'erreur secondaire est FE .

Pour les températures extrêmes 0° et θ_3° , l'erreur secondaire est IL si $OH = HG$.

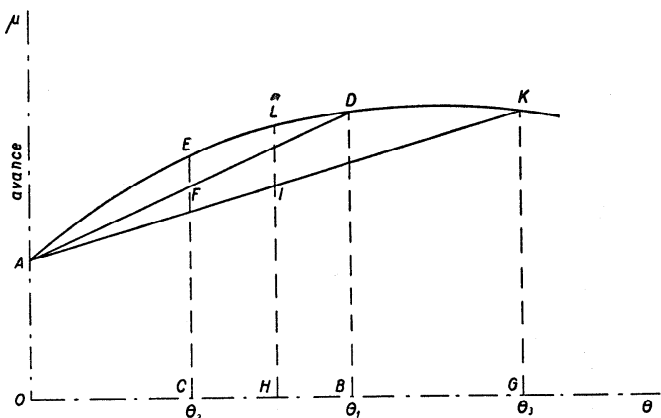


Fig. 392

La valeur de l'erreur secondaire ne devrait pas être indiquée sans mentionner les températures extrêmes. En réalité, lorsque nous parlons d'erreur secondaire, nous sous-entendons que les températures extrêmes sont environ 0° et 30 à 35°C .

Moyens de corriger l'erreur secondaire. — Nous avons mentionné deux essais d'atténuer l'erreur secondaire : l'emploi des spiraux en verre par Dent et celui des spiraux en alliage de palladium par Paillard, en 1877 ; ces essais n'eurent pas de lendemain.

Les horlogers ont surtout cherché des dispositifs susceptibles de rendre la compensation également bonne à toutes les températures. Ainsi ont été créés quantité de *balanciers à compensation auxiliaire* dont le manque d'efficacité ou la trop grande complication empêchèrent la diffusion.

La solution du problème fut trouvée par Charles-Edouard Guillaume (1861-1937) au moyen du *balancier intégral* ou *balancier Guillaume*.

La marche diurne d'une montre munie d'un balancier bimétallique est proportionnelle à $\frac{\Delta \varrho}{\varrho}$, puisque ϱ varie comme le rayon de giration du balancier. Mais, d'après la formule (420) :

$$\frac{\Delta \varrho}{\varrho} = - \frac{3}{2} \frac{a_2 - a_1}{e'} \Delta \theta .$$

a_1 et a_2 sont des fonctions de la température puisque, d'après (419) :

$$a = \alpha + \beta\theta.$$

Nous aurons donc, pour $\frac{\Delta\varrho}{\varrho}$ et pour une variation de température de θ° :

$$\frac{\Delta\varrho}{\varrho} = -\frac{3}{2} \frac{\theta}{e'} [\alpha_2 - \alpha_1 + \theta(\beta_2 - \beta_1)].$$

Admettons que le rayon de giration soit égal à :

$$R = n\varrho,$$

n étant un nombre voisin de l'unité que nous supposons constant puisque les variations de ϱ sont, en pratique, petites (pour $\varrho = 0,5$ cm et une élévation de température de 30° , ϱ diminue de $0,002\,24$ cm si la bilame est en acier-laiton). D'après (421), nous avons :

$$\begin{aligned} T_\theta &= 2\pi n(\varrho + \Delta\varrho) \sqrt{\frac{M}{C}}, & T_0 &= 2\pi n\varrho \sqrt{\frac{M}{C}}, \\ \Delta T &= T_\theta - T_0 = 2\pi n\Delta\varrho \sqrt{\frac{M}{C}}, & \frac{\Delta T}{T} &= \frac{\Delta\varrho}{\varrho}. \end{aligned}$$

D'après (148), la même perturbation relative de la période a pour valeur :

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{1}{2} \frac{\Delta E_0}{E_0}.$$

Mais, d'après (3) (t. I, p. 96) :

$$E_\theta = E_0(1 - \alpha\theta - \beta\theta^2),$$

d'où :

$$\frac{\Delta E_0}{E_0} = -\alpha\theta - \beta\theta^2 = \theta(-\alpha - \beta\theta).$$

La compensation des deux effets sera parfaite si :

$$-\frac{3}{2} \frac{\theta}{e'} [\alpha_2 - \alpha_1 + \theta(\beta_2 - \beta_1)] = \frac{1}{2} \theta(-\alpha - \beta\theta)$$

ou

$$-\frac{3}{e'} [\alpha_2 - \alpha_1 + \theta(\beta_2 - \beta_1)] = -\alpha - \beta\theta. \quad (422)$$

Rappelons que, dans cette formule, les coefficients de dilatation sont munis d'un indice, alors que les coefficients thermo-élastiques n'en ont pas.

L'équation (422) n'est généralement satisfaite que par une valeur de θ .

Pour que l'erreur secondaire soit annulée, c'est-à-dire que la variation de la marche de la montre soit indépendante de la température (la compensation peut être mauvaise), il faut que les termes en θ disparaissent de (422), ce qui a lieu si :

$$-\frac{3}{e'}(\beta_2 - \beta_1) = -\beta.$$

Proposons-nous d'allier au laiton un métal dont le coefficient quadratique de dilatation soit β_1 , de façon que l'erreur secondaire soit supprimée ; il faut donc que :

$$\beta_1 = \beta_2 - \beta \frac{e'}{3}. \quad (423)$$

Pour le laiton :

$$\beta_2 = 5,50 \cdot 10^{-9}.$$

Pour le spiral en acier, admettons :

$$\beta = 300 \cdot 10^{-9}.$$

Pour l'acier, β peut avoir des valeurs très différentes suivant la composition et les traitements thermiques et mécaniques subis. Jaquerod et Mugeli ont trouvé, pour un acier à 0,9% de carbone, $\beta = 110 \cdot 10^{-9}$ et, pour un acier de cordes à piano, $\beta = 330 \cdot 10^{-9}$.

Supposons $e' = 0,08$, ce qui est une valeur normale ; nous obtenons :

$$\beta_1 = \left(5,50 - 300 \frac{0,08}{3} \right) 10^{-9} = -2,50 \cdot 10^{-9}.$$

Or, en étudiant les propriétés remarquables des alliages fer-nickel, Guillaume découvrit un alliage à 44% de nickel dont les coefficients de dilatation sont :

$$\alpha_1 = 8,508 \cdot 10^{-6}, \quad \beta_1 = -2,50 \cdot 10^{-9}.$$

Le balancier Guillaume est composé d'une bilame formée d'un ferro-nickel à 44% de nickel et de laiton.

Guillaume a proposé de donner à cet alliage le nom d'*anibal* qui doit évoquer l'expression *acier-nickel* pour *balanciers*.

L'équation (423) indique que β_1 est fonction de e' , l'épaisseur relative de la serge. Mais dans la pratique e' varie peu.

Comme le coefficient α_1 de l'anibal est plus petit que celui de l'acier, la différence $\alpha_2 - \alpha_1$ est plus grande pour une bilame anibal-laiton que pour celle d'acier-laiton : le pouvoir compensateur du balancier Guillaume

est plus grand que celui du balancier acier-laiton. Il est donc possible d'utiliser une bilame plus épaisse et d'atténuer ainsi l'influence de la force centrifuge. L'effet de la bilame Guillaume peut également être réduit en diminuant la longueur de celle-ci, c'est-à-dire en coupant la serge du balancier vers son milieu et non près du bras.

En donnant une épaisseur plus grande à la serge, nous augmentons aussi l'épaisseur relative $e' = \frac{e}{e_0}$; pour maintenir la compensation, nous devrions, en même temps, modifier la teneur en nickel de l'anibal. Ainsi, pour $e' = 0,10$, nous devrions avoir :

$$\beta_1 = 1,9 \cdot 10^{-9}.$$

L'application du balancier Guillaume aux chronomètres a permis de réduire de 90 % l'erreur secondaire. Si celle-ci n'est pas entièrement supprimée, c'est qu'un anibal de teneur en nickel déterminée ne peut pas résoudre complètement le problème, puisque les coefficients de dilatation du laiton et les coefficients thermo-élastiques de l'acier varient d'un balancier et d'un spiral à l'autre.

Quelques propriétés intéressantes des alliages de fer et de nickel. — Depuis les travaux de Ch.-Ed. Guillaume, on a eu recours à certains alliages de fer et de nickel et à certaines de leurs propriétés souvent inattendues pour résoudre plusieurs problèmes d'horlogerie : compensation des pendules, erreur secondaire du balancier bimétallique accouplé à un spiral d'acier, élimination de l'influence de la température sur l'élasticité du spiral.

La découverte fondamentale de Guillaume fut celle de l'anomalie de dilatation des alliages de fer et de nickel.

On s'attend à retrouver dans un alliage, à un certain degré du moins, les propriétés des constituants. Il semble ainsi que le coefficient de dilatation d'un ferro-nickel doive être compris entre celui du fer et celui du nickel, plus près du coefficient de dilatation de l'élément prédominant. Si l'alliage était normal, les coefficients de dilatation devraient se trouver sur la droite AB (fig. 393), OA représentant le coefficient de dilatation du fer ($\alpha \cong 11 \cdot 10^{-6}$) et OB celui du nickel ($\alpha \cong 12 \cdot 10^{-6}$). Les distances sur l'axe OO' sont proportionnelles aux teneurs en nickel : O correspond au fer pur et O' au nickel pur ; O'' à un ferro-nickel à 60 % de nickel si :

$$\overline{OO''} = 0,60 \cdot \overline{OO'}.$$

$O''C$ figure la valeur que devrait avoir le coefficient de dilatation du ferro-nickel à 60 % de nickel.

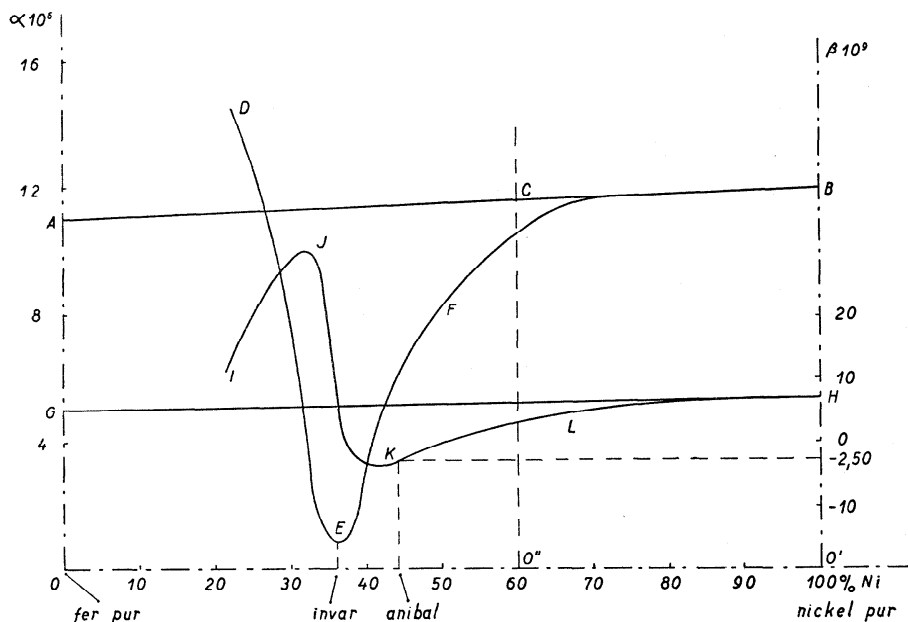


Fig. 393

Or, la dilatibilité des ferro-nickels est représentée par la courbe *DEF* qui rejoint la droite *AB* pour les alliages à hautes teneurs en nickel. La courbe n'est pas dessinée jusqu'à l'ordonnée *OA*, c'est-à-dire jusqu'au fer pur, parce que les propriétés des alliages à faible teneur en nickel ne sont pas constantes et dépendent des traitements déjà subis par l'échantillon ; ces *alliages irréversibles* ne nous intéressent pas. La courbe *DEFB* (fig. 393) représente les valeurs du coefficient de dilatation α des ferro-nickels *réversibles* ; elle présente un minimum très accentué aux environs de 36% de nickel ; ce dernier alliage, l'*invar*, a un coefficient de dilatation $\alpha \cong 1 \cdot 10^{-6}$, soit 10 à 11 fois plus petit que celui du fer.

L'anomalie de dilatation ne s'étend pas seulement au coefficient α , mais aussi au coefficient β de la formule :

$$l_{\theta} = l_0(1 + \alpha\theta + \beta\theta^2).$$

Si la dilatation était normale, la valeur de β serait représentée par la droite *GH* (fig. 393) ; en réalité, elle est donnée par la courbe *IJKLH* qui a un maximum accentué en *I* et un minimum en *K*. L'anibal qui contient 44% de nickel a, comme on l'a vu, un coefficient β négatif dont la valeur est $-2,50 \cdot 10^{-9}$.

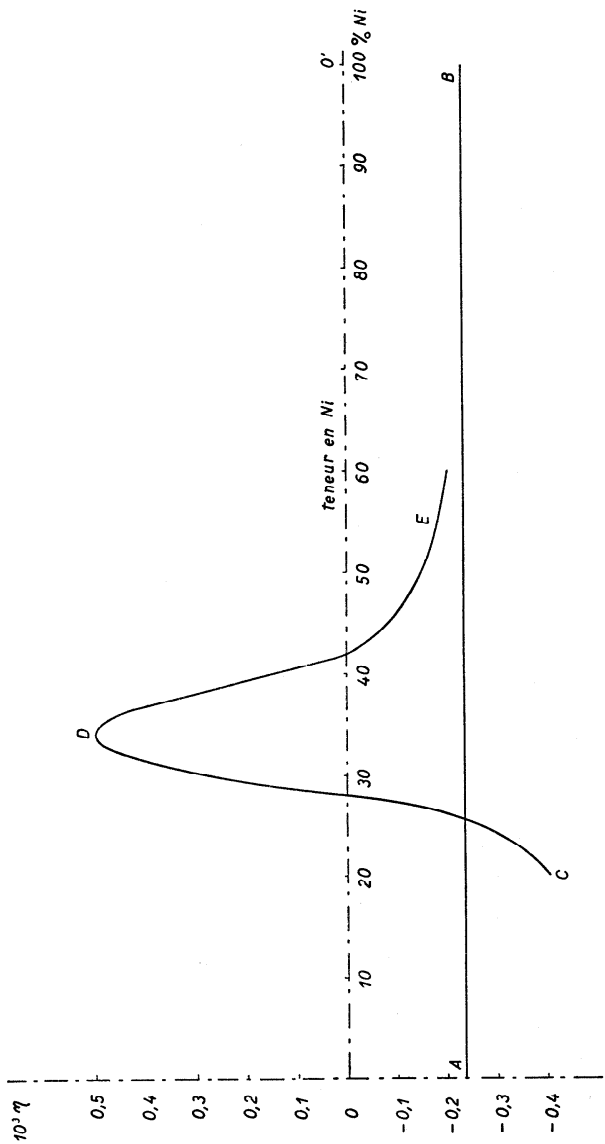


Fig. 394

Les anomalies de dilatation caractérisées par la forme des courbes des coefficients α et β ne sont pas les seules particularités remarquables des ferro-nickels ; on constate des anomalies semblables dans leurs propriétés élastiques et particulièrement dans leur coefficient thermo-élastique ; celui-ci est représenté par une courbe ayant un maximum très marqué pour l'alliage à $\sim 36\%$ de nickel. Phénomène remarquable, ce coefficient s'annule pour les alliages à 28% et à 42% de nickel. Cette particularité laisse entrevoir l'existence d'alliages avec lesquels on pourrait faire des spiraux insensibles aux variations de la température et qui rendraient superflue la compensation par le balancier bimétallique coupé.

Le spiral autocompensateur. — L'anomalie thermo-élastique d'un acier au nickel — l'invar à 36% Ni — fut constatée d'abord par Paul Perret qui remarqua qu'un spiral en invar fait avancer une montre au chaud, puis, presque en même temps, par le professeur Marc Thury qui observa que le fléchissement d'une tige d'invar chargée d'un poids diminue lorsque celle-ci est échauffée.

Guillaume conclut de ces résultats qu'il devait y avoir entre le fer pur et l'invar et entre l'invar et le nickel, un alliage de coefficient thermo-élastique nul ; il établit la courbe du coefficient thermo-élastique des ferro-nickels (fig. 394), qui coupe l'axe des valeurs nulles en deux points correspondant aux alliages à ~ 28 et $\sim 42\%$ de nickel ; utilisés pour la fabrication des spiraux, ces alliages devaient permettre de faire l'économie du coûteux balancier bimétallique.

Désignons sous le nom générique d'*élinvar* les métaux ou alliages à coefficient thermo-élastique nul, du moins aux températures auxquelles les montres sont généralement soumises. Le ferro-nickel à 42% Ni est un élinvar, l'alliage à 28% Ni en est un autre ; ce dernier fut utilisé pour la confection des premiers spiraux « compensateurs » ou « autocompensateurs », connus sous le nom de *spiraux Paul Perret*.

Pour un ferro-nickel donné, la variation du module d'Young en fonction de la température est donnée par une courbe ayant l'allure de la courbe *ABCDEF* (fig. 395).

De *A* à *B*, le module *E* diminue, tandis que la température s'élève ; le phénomène est normal ; il en est de même pour la portion *EF* de la courbe. A partir de *B*, l'allure de la courbe change ; la diminution du module devient plus lente, cesse, puis, à partir de *G*, le module croît en même temps que la température s'élève ; à partir de *D*, la courbe change de nouveau d'allure et, à partir de *I*, le module diminue de nouveau dès que la température s'élève. De *G* à *I* nous sommes en pleine anomalie thermo-élastique.

Un alliage propre à la fabrication des spiraux doit d'abord avoir un

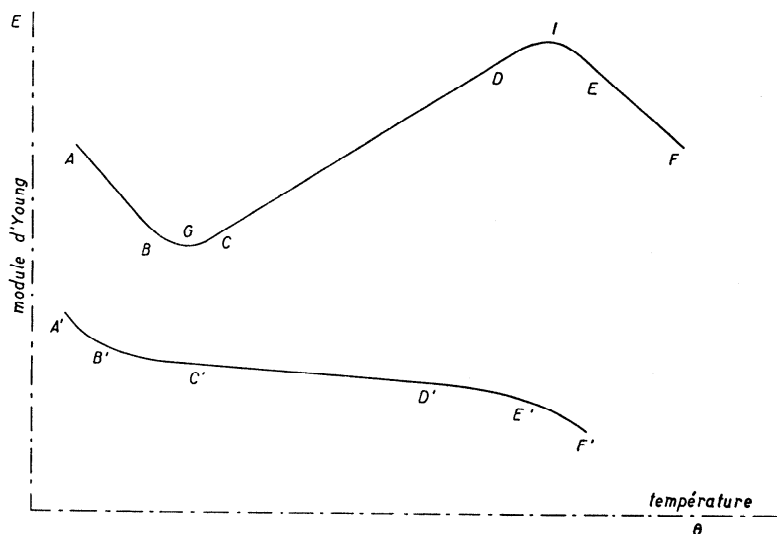


Fig. 395

module qui varie peu avec la température, du moins dans les limites des températures auxquelles les montres sont soumises. L'intervalle de température de -10° à $+30^{\circ}$ C est considéré comme normal. L'alliage doit ensuite posséder un module qui passe par un maximum ou un minimum dans l'intervalle normal de température; c'est alors que le coefficient thermo-élastique aura la valeur la plus faible.

Les spiraux Perret (à 28% Ni) étaient peu élastiques et ils avaient une forte erreur secondaire (environ 20 s pour 30° C).

Guillaume réussit à créer un alliage plus élastique avec lequel il fut possible de faire des spiraux dont l'erreur secondaire était de 1 à 2 s pour 30° C. Cet alliage, connu sous le nom d'*élinvar Guillaume*, a un module d'élasticité qui varie suivant la courbe $A'B'C'D'E'F'$ (fig. 395). Cette courbe indique que le module reste pour ainsi dire constant entre les températures correspondant aux points C' et D' .

Les spiraux en *mételinvar*, *durinval*, *nivarox*, *isoval* sont tous dérivés de l'*élinvar Guillaume*, qui est composé de 7 à 8 constituants dont les principaux sont le fer, le nickel et le chrome. Les alliages dérivés contiennent des durcissants, tels que le tungstène, le molybdène, le béryllium, le titane, etc., dont certains provoquent, après l'hypertrempe, le phénomène connu sous le nom de durcissement structural.

Ces additions ont notablement augmenté la limite élastique des spiraux dont l'erreur secondaire reste faible. Ces spiraux présentent encore certains défauts que les savants cherchent à éliminer ou, tout au moins,

à atténuer, tels que le frottement intérieur et l'influence sur l'isochronisme. Ils ont par contre des propriétés très appréciées : ils sont beaucoup moins sujets que les spiraux d'acier à la corrosion et à l'aimantation.

Il est très important pour le fabricant de montres de pouvoir disposer de spiraux ayant, dans une même série, les mêmes propriétés. Les éléments qui entrent dans la composition des élinvars sont nombreux ; certains s'altèrent pendant l'opération de la fonte, d'autres se mélangent difficilement et l'homogénéité de l'alliage est très difficile à réaliser. Une fois fondu, l'alliage subit, jusqu'au moment où il a pris la forme des spiraux, toute une série de traitements thermiques et mécaniques qui ont une influence marquée sur les propriétés du produit définitif. Les améliorations réalisées au sujet de la compensation, de l'erreur secondaire, de la limite élastique, de la résistance à la corrosion et à l'aimantation, du frottement interne et de l'influence sur l'isochronisme montrent que les métallurgistes et les fabricants de spiraux dominent le problème de mieux en mieux.

Correction du coefficient thermique des spiraux compensateurs. —

Théoriquement, le coefficient thermique d'un spiral compensateur est nul ; en réalité, il a une certaine valeur bien inférieure à celle d'un spiral d'acier.

Le métallurgiste cherche à réaliser un alliage avec des teneurs bien déterminées ; il n'y réussit qu'à peu près et c'est la raison pour laquelle on a dû recourir à une classification des spiraux en élinvar ; il y a l'élinvar I, l'élinvar II, etc. ; on admet que l'élinvar I (mételinvar I, nivarox I, etc.) a un coefficient thermique ne dépassant pas $\pm 0,5$ s.

Un des avantages du spiral compensateur est de permettre l'emploi d'un balancier monométallique non coupé. Mais alors l'ensemble balancier-spiral a un coefficient thermique déterminé par le coefficient thermo-élastique du spiral et par les coefficients de dilatation du balancier et du spiral.

Tandis que le déplacement des vis le long de la serge d'un balancier bimétallique coupé permet de corriger le coefficient thermique, il n'en est plus de même avec le balancier monométallique ; on a ainsi perdu la possibilité d'ajuster la compensation.

Or, le coefficient thermique d'un spiral d'élinvar associé à un balancier monométallique est très rarement nul. Pour l'amener à zéro, on a imaginé différents dispositifs.

Paul Ditisheim a proposé le *balancier à affixe* qui porte une courte lame bimétallique amovible attachée à l'extérieur ou à l'intérieur de la serge (fig. 396 ; pl. XIV, fig. 397 et 398) ; le sens de la correction dépend de la position de l'acier et du laiton de la bilame par rapport au centre du balancier ; pour corriger un retard au chaud, le métal le plus dilatable

de la bilame, donc le laiton, doit être plus éloigné du centre que l'autre métal ; pour corriger une avance au chaud, la disposition des métaux doit être inversée. Les vis fixées sur la bilame sont déplaçables et permettent de doser l'effet correcteur.

Volet a décrit deux types de *balanciers différentiels* qui sont formés d'une serge monométallique et d'un bras fait d'un métal dont la dilatabilité est différente de celle de la serge.

Dans le premier type, le balancier est coupé (fig. 399). Si les coupures sont en C et C' , la dilatation du bras éloigne A et B du centre O , mais rapproche C et C' du même point ; le moment d'inertie n'est pas sensiblement modifié si la masse est régulièrement répartie le long de la serge ; il n'en est

plus de même lorsque des vis distribuées inégalement constituent une notable partie de la masse du balancier. Si les vis des segments AC' et BC sont près des coupures, l'élévation de la température diminue le moment d'inertie et la période du balancier. L'effet contraire se produit lorsque les vis sont près de A et de B . On peut augmenter l'efficacité du balancier en le coupant en deux autres points : l'effet sera maximum si les coupures sont en D et D' .

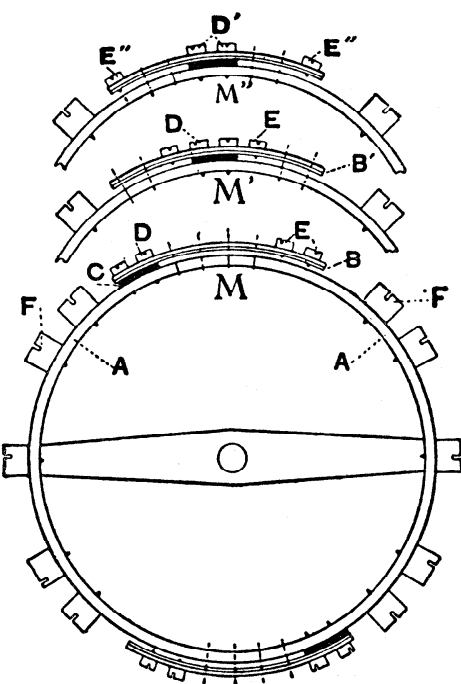


Fig. 396

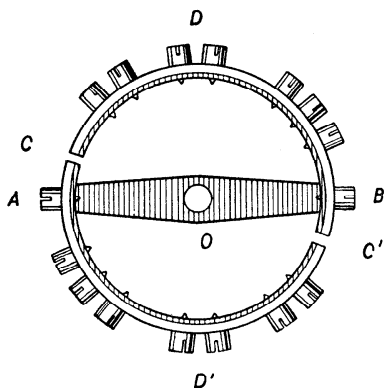


Fig. 399

Dans le second type, le balancier n'est pas coupé et, sous l'effet d'une variation de la température, la serge s'ovalise. Dans ce cas aussi, le déplacement des vis permet de modifier le sens et l'effet d'une variation de la température sur le moment d'inertie du balancier.

C'est encore à la différence de la dilatabilité du bras et de la serge que le *balancier anisotrope* de Straumann doit son efficacité, mais cette différence est obtenue avec une seule matière. Les métaux à réseau cristallin hexagonal ont une anisotropie thermique considérable ; pour le zinc, le coefficient de dilatation est $64 \cdot 10^{-6}$ dans la direction de l'axe du prisme hexagonal, de $13 \cdot 10^{-6}$ dans la direction perpendiculaire à cet axe. Si le balancier est découpé dans une planche dont les cristaux ont été orientés de même façon (par laminage), il s'ovalisera dès que la température changera. Le déplacement des vis permet, comme pour le balancier différentiel non coupé, de modifier l'efficacité du balancier.

Straumann a aussi proposé de corriger l'effet résiduel du spiral auto-compensateur au moyen d'un petit aimant placé dans la noyure du balancier, à une certaine distance du spiral.

La force centrifuge. — Le balancier bimétallique coupé est déformé par la force centrifuge.

Une masse m tournant avec la vitesse v autour d'un axe, à la distance r , est sollicitée par une force centrifuge F_c telle que :

$$F_c = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r,$$

où ω désigne la vitesse angulaire.

Puisque, d'après la loi de Hooke, les déformations sont proportionnelles aux forces, nous admettrons que le rayon de giration R du balancier est augmenté d'une quantité proportionnelle à ω^2 et nous poserons :

$$R' = R(1 + a\omega^2),$$

a étant, pour un balancier donné, une constante dont la valeur dépend des dimensions et des propriétés élastiques de la serge. Nous avons :

$$R'^2 = R^2(1 + 2a\omega^2 + a^2\omega^4)$$

et, en négligeant $a^2\omega^4$ qui est petit vis-à-vis de 1 :

$$R'^2 = R^2(1 + 2a\omega^2).$$

Le moment d'inertie I' du balancier vaut :

$$I' = MR'^2 = MR^2(1 + 2a\omega^2) = I(1 + 2a\omega^2),$$

soit :

$$I' = I(1 + b\omega^2),$$

si nous posons $b = 2a$.

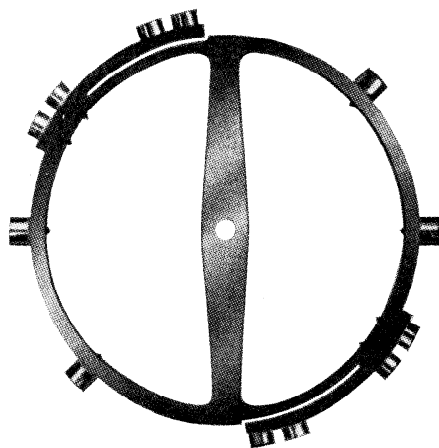


Fig. 397

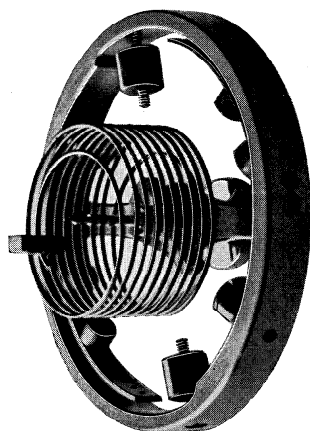


Fig. 398

L'équation du mouvement du balancier déformé est :

$$I' \frac{d^2\varphi}{dt^2} + C\varphi = 0,$$

soit :

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} + Ib\omega^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} + C\varphi = 0$$

ou

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + b\omega^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{C}{I} \varphi = 0.$$

L'expression $-\frac{C}{I}\varphi$ est l'accélération angulaire $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ lorsque le balancier n'est pas déformé. A cause de la force centrifuge, l'accélération est augmentée de :

$$\gamma = -b\omega^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Nous ne connaissons ni la valeur de ω ni celle de $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$, mais nous savons que la perturbation de la période, occasionnée par la force centrifuge, est peu importante, de sorte que nous pouvons admettre pour $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ la valeur de l'accélération angulaire dans le mouvement normal, soit :

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{C}{I}\varphi$$

et, pour ω :

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{I}} \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}.$$

Ainsi :

$$\gamma = b \frac{C}{I} (\varphi_0^2 - \varphi^2) \frac{C}{I} \varphi = b \frac{C^2}{I^2} \varphi (\varphi_0^2 - \varphi^2).$$

Appliquons la formule d'Airy (326) :

$$\frac{\Delta T_1}{T_1} = \frac{T_1^2}{\pi^3 \varphi_0^2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\gamma \varphi d\varphi}{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}}$$

qui devient dans notre cas :

$$\frac{\Delta T_1}{T_1} = \frac{T_1^2}{\pi^3 \varphi_0^2} \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} b \frac{C^2}{I^2} \varphi (\varphi_0^2 - \varphi^2) \frac{\varphi d\varphi}{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}} = \frac{T_1^2 b C^2}{\pi^3 \varphi_0^2 I^2} \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \varphi^2 \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2} d\varphi.$$

L'intégrale vaut :

$$\left[\frac{\varphi}{8} (2\varphi^2 - \varphi_0^2) \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2} + \frac{\varphi_0^4}{8} \arcsin \frac{\varphi}{\varphi_0} \right]_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} = \frac{\pi \varphi_0^4}{8},$$

de sorte que :

$$\frac{\Delta T_1}{T_1} = \frac{T_1^2 b C^2}{\pi^3 \varphi_0^2 I^2} \frac{\pi \varphi_0^4}{8}.$$

Mais :

$$T_1^2 = \pi^2 \frac{I}{C},$$

donc :

$$\frac{T_1^2 C^2}{I^2} = \pi^2 \frac{C}{I}$$

et

$$\frac{\Delta T_1}{T_1} = \frac{b C \varphi_0^2}{8 I}$$

ou

$$\frac{\Delta T_1}{T_1} = \frac{\pi^2 b}{8} \left(\frac{\varphi_0}{T_1} \right)^2. \quad (424)$$

La perturbation relative de la période, due à la force centrifuge, est proportionnelle au carré de l'amplitude et inversement proportionnelle au carré de la période; elle dépend encore du facteur b déterminé lui-même par l'épaisseur de la serge, ses propriétés élastiques, la longueur des segments libres et la répartition des vis.

A ce point de vue, le balancier Guillaume est supérieur au balancier acier-laiton, parce qu'il a une serge plus épaisse, des segments libres moins longs $\left(\frac{\pi}{4} \varrho \text{ au lieu d'environ } \frac{\pi}{2} \varrho \right)$ et que les masses compensatrices peuvent être réduites ou placées plus près des bras à cause du plus grand pouvoir compensateur du balancier.

La force centrifuge augmente la période; dans certains cas le retard diurne est d'environ 6,5 s pour $\varphi_0 = 200^\circ$ et $T = 0,5$ s; mais lorsque l'amplitude atteint 300° , le retard est de 14,6 s.

L'inertie du spiral. — La formule de la période normale contient I qui représente, avons-nous dit, le moment d'inertie du balancier; remarquons que I est le moment d'inertie de tout l'ensemble qui participe au mouvement: balancier, arbre, plateau, virole et spiral.

La force centrifuge déforme le balancier et augmente son moment d'inertie; un phénomène analogue se produit quand le spiral travaille.

Les parties du spiral sont différemment déformées puisque l'extrémité attachée à la virole décrit le même angle que le balancier, tandis que l'extrémité du spiral attachée au piton est fixe. Pour les points intermédiaires, nous avons à envisager, outre la déformation due à la rotation, une modification du rayon, qui ne se produit ni au piton ni à la virole. Pour chaque élément du spiral, nous devons étudier l'effet de ces deux causes sur la période du balancier-spiral.

Spiral cylindrique. — Appelons α le développement angulaire d'un spiral cylindrique de n spires; nous avons:

$$\alpha = 2\pi n.$$

Soit φ l'élongation du balancier, l la longueur du spiral, r_0 et r les rayons du spiral avant et après la rotation φ . Nous supposons que le spiral se développe concentriquement; il est muni de courbes terminales dont nous négligerons les moments d'inertie puisque leurs longueurs sont relativement petites. Nous avons dans ces conditions:

$$l = r_0 \alpha = r(\alpha + \varphi)$$

ou

$$r = r_0 \frac{\alpha}{\alpha + \varphi}. \quad (425)$$

Considérons, à la distance s du piton, un élément de longueur ds , mesuré le long du spiral. Nous admettons que l'angle de rotation décrit par chaque élément est proportionnel à la distance s . Un élément décrit un angle β tel que:

$$\beta = \varphi \frac{s}{l}. \quad (426)$$

Cherchons à évaluer l'accélération supplémentaire γ provoquée par l'augmentation du moment d'inertie du spiral, consécutive à la rotation.

L'accélération est la dérivée par rapport au temps du moment de la quantité de mouvement, divisé par le moment d'inertie. En effet, la quantité de mouvement:

$$q = mv = m\omega r$$

a pour moment par rapport à l'axe du balancier :

$$qr = m\omega r^2 = I\omega,$$

d'où :

$$\omega = \frac{qr}{I}$$

et, par conséquent :

$$\gamma = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{qr}{I} \right) = \frac{1}{I} \frac{d(qr)}{dt}$$

ou

$$\gamma = \frac{1}{I} \frac{d(m\omega r^2)}{dt} = \frac{m}{I} \left(r^2 \frac{d\omega}{dt} + \omega \cdot 2r \frac{dr}{dt} \right). \quad (427)$$

Le mouvement de l'élément de spiral considéré est composé d'un déplacement radial et d'une rotation. Le déplacement radial n'a aucun moment par rapport à l'axe du balancier ; il ne provoque aucune accélération angulaire du balancier. La rotation d'angle β a une vitesse angulaire ω :

$$\omega = \frac{d\beta}{dt} = \frac{s}{l} \frac{d\varphi}{dt},$$

d'où :

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{s}{l} \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Elle provoque une accélération angulaire $d\gamma$ qui vaut, d'après (427) :

$$d\gamma = \frac{eh\delta ds}{I} \left(r^2 \frac{s}{l} \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{s}{l} \frac{d\varphi}{dt} \cdot 2r \frac{dr}{dt} \right).$$

Dans cette formule, e et h désignent l'épaisseur et la hauteur de la lame du spiral et δ la masse spécifique du métal.

Outre γ , cette dernière équation contient les variables s , φ et r . Cherchons à éliminer r ; à cet effet, dérivons (425) par rapport à t :

$$\frac{dr}{dt} = - \frac{r_0 \alpha}{(\alpha + \varphi)^2} \frac{d\varphi}{dt} = - \frac{r}{\alpha + \varphi} \frac{d\varphi}{dt}.$$

En portant cette valeur dans l'équation précédente, nous obtenons pour l'accélération angulaire γ :

$$\gamma = \frac{eh\delta}{I} \int_0^l \left(r^2 \frac{s}{l} \frac{d^2\varphi}{dt^2} - \frac{s}{l} \frac{d\varphi}{dt} \cdot 2r \frac{r}{\alpha + \varphi} \frac{d\varphi}{dt} \right) ds,$$

soit :

$$\gamma = \frac{eh\delta}{Il} \int_0^l \left[r^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} - \frac{2r^2}{\alpha + \varphi} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] s ds$$

ou, en remplaçant r par sa valeur (425) :

$$\gamma = \frac{eh\delta}{Il} \int_0^l \left[r_0^2 \frac{\alpha^2}{(\alpha + \varphi)^2} \frac{d^2\varphi}{dt^2} - \frac{2r_0^2\alpha^2}{(\alpha + \varphi)^3} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] s ds.$$

A un instant donné, φ est déterminé ; nous pouvons donc le considérer comme constant et intégrer le long du spiral ; nous obtenons :

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{eh\delta}{Il} \left[r_0^2 \frac{\alpha^2}{(\alpha + \varphi)^2} \frac{l^2}{2} \frac{d^2\varphi}{dt^2} - \frac{2r_0^2\alpha^2}{(\alpha + \varphi)^3} \frac{l^2}{2} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] \\ &= \frac{eh\delta l^3}{2I(\alpha + \varphi)^2} \left[\frac{d^2\varphi}{dt^2} - \frac{2}{\alpha + \varphi} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right], \end{aligned}$$

puisque $r_0 \alpha = l$. Mais $ehl\delta = m$, la masse du spiral, donc :

$$\gamma = \frac{ml^2}{2I(\alpha + \varphi)^2} \left[\frac{d^2\varphi}{dt^2} - \frac{2}{\alpha + \varphi} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right].$$

Introduisons cette valeur de γ dans la formule d'Airy :

$$\frac{\Delta T_1}{T_1} = \frac{T_1^2}{\pi^3 \varphi_0^3} \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \frac{ml^2}{2I(\alpha + \varphi)^2} \left[\frac{d^2\varphi}{dt^2} - \frac{2}{\alpha + \varphi} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] \frac{\varphi d\varphi}{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}}.$$

La perturbation du mouvement du balancier reste petite, de sorte que nous pouvons admettre que le mouvement continue à être harmonique et que son équation a la forme :

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} + C\varphi = 0,$$

d'où :

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{C}{I}\varphi = -\frac{\varepsilon}{II}\varphi,$$

si $\varepsilon = \frac{Ee^3h}{12}$; d'après la formule (124) du chapitre VII, nous avons en outre :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{C}{I}} \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}$$

ou

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{C}{I}(\varphi_0^2 - \varphi^2) = \frac{\varepsilon}{II}(\varphi_0^2 - \varphi^2).$$

La formule pour $\frac{\Delta T_1}{T_1}$ devient ainsi :

$$\frac{\Delta T_1}{T_1} = \frac{T_1^2 m l^2}{2\pi^3 \varphi_0^2 I} \left[- \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \frac{1}{(\alpha + \varphi)^2} \frac{\varepsilon}{II} \varphi^2 \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}} - \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \frac{2}{(\alpha + \varphi)^3} \frac{\varepsilon}{II} \frac{(\varphi_0^2 - \varphi^2) \varphi d\varphi}{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}} \right].$$

Mais :

$$T_1 = \pi \sqrt{\frac{I}{C}} = \pi \sqrt{\frac{II}{\varepsilon}},$$

donc :

$$\frac{\Delta T_1}{T_1} = \frac{m l^2}{2\pi \varphi_0^2 I} \left[\int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \frac{\varphi^2 d\varphi}{(\alpha + \varphi)^2 \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}} - 2 \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \frac{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2} \varphi d\varphi}{(\alpha + \varphi)^3} \right].$$

Intégrons l'expression :

$$\int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \frac{\varphi^2 d\varphi}{(\alpha + \varphi)^2 \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}}$$

par parties, en posant :

$$u = \frac{\varphi}{(\alpha + \varphi)^2}, \quad dv = \frac{\varphi d\varphi}{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}};$$

nous avons :

$$du = \frac{(\alpha + \varphi)^2 d\varphi - 2\varphi(\alpha + \varphi)d\varphi}{(\alpha + \varphi)^4} = \frac{(\alpha - \varphi)d\varphi}{(\alpha + \varphi)^3}, \quad v = -\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2},$$

d'où :

$$\begin{aligned} \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \frac{\varphi^2 d\varphi}{(\alpha + \varphi)^2 \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}} &= \left[uv \right]_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} - \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} v du \\ &= \left[-\frac{\varphi}{(\alpha + \varphi)^2} \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2} \right]_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} - \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \frac{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2} (\alpha + \varphi - 2\varphi) d\varphi}{(\alpha + \varphi)^3}. \end{aligned}$$

Le premier terme du second membre est égal à zéro, donc :

$$\int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \frac{\varphi^2 d\varphi}{(\alpha + \varphi)^2 \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}} = - \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \frac{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}}{(\alpha + \varphi)^2} d\varphi + 2 \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \frac{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2} \varphi d\varphi}{(\alpha + \varphi)^3}.$$

Mais le dernier terme de cette équation annule la seconde intégrale de l'expression $\frac{\Delta T_1}{T_1}$ qui devient :

$$\frac{\Delta T_1}{T_1} = \frac{ml^2}{2\pi\varphi_0^2 I} \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \frac{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}}{(\alpha + \varphi)^2} d\varphi.$$

Comparé à α , l'angle φ est toujours petit, ce qui permet de poser :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\alpha + \varphi)^2} &= \frac{1}{\alpha^2 \left(1 + \frac{\varphi}{\alpha}\right)^2} = \frac{1}{\alpha^2} \left(1 + \frac{\varphi}{\alpha}\right)^{-2} \\ &= \frac{1}{\alpha^2} \left[1 - 2\left(\frac{\varphi}{\alpha}\right) + 3\left(\frac{\varphi}{\alpha}\right)^2 - 4\left(\frac{\varphi}{\alpha}\right)^3 + \dots \right]. \end{aligned}$$

Nous pouvons donc écrire :

$$\int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \frac{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}}{(\alpha + \varphi)^2} d\varphi = \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \frac{1}{\alpha^2} \left[1 - 2\left(\frac{\varphi}{\alpha}\right) + 3\left(\frac{\varphi}{\alpha}\right)^2 - 4\left(\frac{\varphi}{\alpha}\right)^3 + \dots \right] \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2} d\varphi.$$

Les limites d'intégration étant $+\varphi_0$ et $-\varphi_0$, les termes contenant des puissances impaires de $\frac{\varphi}{\alpha}$ n'ont aucune influence sur le résultat ; donc :

$$\int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \frac{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}}{(\alpha + \varphi)^2} d\varphi = \frac{1}{\alpha^2} \left[\int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2} d\varphi + \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} 3\left(\frac{\varphi}{\alpha}\right)^2 \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2} d\varphi + \dots \right].$$

Le terme général de cette série est :

$$\int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} (n+1) \left(\frac{\varphi}{\alpha}\right)^n \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2} d\varphi = \frac{n+1}{\alpha^n} \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \varphi^n \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2} d\varphi, \quad (428)$$

où n ne prend que des valeurs paires : 0, 2, 4, 6, 8, ... Puisque φ et φ_0 sont les élongations d'un mouvement harmonique, nous pouvons poser :

$$\varphi = \varphi_0 \sin x,$$

d'où :

$$d\varphi = \varphi_0 \cos x \, dx.$$

L'intégrale du terme général (428) devient dès lors :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \varphi_0^n \sin^n x \cdot \varphi_0^2 \cos^2 x \, dx = \varphi_0^{n+2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^2 x \, dx.$$

Posons :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^2 x \, dx = S_n.$$

L'intégrale du terme général (428) vaut donc :

$$\int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \varphi^n \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2} d\varphi = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (n-1)}{4 \cdot 6 \cdot 8 \dots (n+2)} \frac{\pi}{2} \varphi_0^{n+2};$$

l'expression $\frac{\Delta T_1}{T_1}$ devient ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T_1}{T_1} &= \frac{m l^2}{2 \pi \varphi_0^2 I} \frac{1}{\alpha^2} \varphi_0^2 \frac{\pi}{2} \left[1 + \frac{3}{4} \left(\frac{\varphi_0}{\alpha} \right)^2 + \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6} \left(\frac{\varphi_0}{\alpha} \right)^4 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 6 \cdot 8} \left(\frac{\varphi_0}{\alpha} \right)^6 + \dots \right] \\ &= \frac{m l^2}{4 I \alpha^2} \left[1 + \frac{3}{4} \left(\frac{\varphi_0}{\alpha} \right)^2 + \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6} \left(\frac{\varphi_0}{\alpha} \right)^4 + \dots \right] \\ &= \frac{m r_0^2}{4 I} \left[1 + \frac{3}{4} \left(\frac{\varphi_0}{\alpha} \right)^2 + \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6} \left(\frac{\varphi_0}{\alpha} \right)^4 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 6 \cdot 8} \left(\frac{\varphi_0}{\alpha} \right)^6 + \dots \right]. \quad (430) \end{aligned}$$

Cette formule montre que l'inertie du spiral crée un défaut d'isochronisme. Si l'amplitude devient très petite, nous avons :

$$\frac{\Delta T_1}{T_1} = \frac{m r_0^2}{4 I}.$$

L'effet de l'inertie augmente rapidement avec le rayon, d'où un inconvénient à utiliser des spiraux de grand diamètre. D'autre part, l'utilisation de spiraux lourds ne présente aucun avantage puisque m est proportionnel à la masse spécifique δ . Ainsi les spiraux en alliage de palladium sont plus lourds que les spiraux d'acier de même volume dans la proportion 11,4 à 7,8.

Par rapport à l'axe, le moment d'inertie du spiral est $m r_0^2$; il fait partie du moment d'inertie I du balancier-spiral. Si I varie de ΔI , la perturbation relative de la période est, d'après (148) :

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta I}{2 I}.$$

Le moment d'inertie du spiral augmente celui du balancier de $m r_0^2$. La formule (430) montre que la perturbation relative de la période n'est pas proportionnelle à la moitié de ΔI , mais seulement au quart.

L'effet de l'inertie du spiral cylindrique n'est que la moitié de ce qu'il serait si tout le spiral était entraîné par le balancier.

La longueur du spiral dépend de la période, du moment d'inertie du balancier, des dimensions de la lame, du module d'élasticité du métal. Mais son rayon r_0 dépend du nombre de tours :

$$r_0 = \frac{l}{2\pi n}.$$

Il y a donc avantage à augmenter le nombre de spires pour diminuer le rayon du spiral.

Spiral plat. — La même méthode de calcul peut être appliquée au spiral plat dont la forme est celle d'une spirale d'Archimède d'équation :

$$r = qa;$$

elle conduit à des calculs longs et à des formules compliquées que nous ne reproduirons pas ici. Mais nous donnons la valeur de la perturbation relative de la période au moyen d'une formule qui contient la constante q , les angles α_1 et α_0 correspondant aux extrémités du spiral et les valeurs $a_n, a'_n, b_n, b'_n, c_n, c'_n$, calculées d'après les relations :

$$a_n = \frac{1 - \left(\frac{\alpha_0}{\alpha_1}\right)^{n+4}}{\left(1 + \frac{\alpha_0}{\alpha_1}\right)^n}, \quad a'_n = \frac{1 - \left(\frac{\alpha_0}{\alpha_1}\right)^{n+6}}{\left(1 + \frac{\alpha_0}{\alpha_1}\right)^n},$$

$$b_n = \frac{1 - \left(\frac{\alpha_0}{\alpha_1}\right)^{n+5}}{\left(1 + \frac{\alpha_0}{\alpha_1}\right)^n}, \quad b'_n = \frac{1 - \left(\frac{\alpha_0}{\alpha_1}\right)^{n+7}}{\left(1 + \frac{\alpha_0}{\alpha_1}\right)^n},$$

$$c_n = \frac{1 - \left(\frac{\alpha_0}{\alpha_1}\right)^{n+5}}{1 + \left(\frac{\alpha_0}{\alpha_1}\right)^{n+1}}, \quad c'_n = \frac{1 - \left(\frac{\alpha_0}{\alpha_1}\right)^{n+7}}{\left(1 + \frac{\alpha_0}{\alpha_1}\right)^{n+1}}.$$

Le résultat final est :

$$\frac{\Delta T_1}{T_1} = \frac{mq^4 \alpha_1^6}{4Il^2} \left[\left(\frac{a_0}{4} - \frac{a'_0}{6} \right) + \left\{ \frac{9}{4} \left(\frac{a_2}{6} - \frac{a'_2}{8} \right) - \frac{3}{2} \left(\frac{c_1}{6} - \frac{c'_1}{8} \right) \right\} \left(\frac{2\varphi_0}{\alpha'} \right)^2 \right. \\ \left. + \left\{ \frac{25}{8} \left(\frac{a_4}{8} - \frac{a'_4}{10} \right) - \frac{5}{2} \left(\frac{c_3}{8} - \frac{c'_3}{10} \right) \right\} \left(\frac{2\varphi_0}{\alpha'} \right)^4 + \dots \right], \quad (431)$$

où :

$$\alpha' = \alpha_1 - \alpha_0.$$

Cette formule due à Keelhoff est bien compliquée ; elle montre que l'inertie du spiral plat engendre un défaut d'isochronisme d'autant plus considérable que le rayon du spiral est plus grand et que le spiral est plus lourd.

Des variations de la pression barométrique. — Bien que notablement plus faible que celle de la température, l'influence de la pression atmosphérique ne peut pas être ignorée, dès qu'il s'agit de mesures précises du temps, effectuées au moyen de chronomètres dont la précision est de l'ordre de 0,1 s par jour, soit de $1 \cdot 10^{-6}$.

Depuis longtemps les régleurs tiennent plus ou moins compte de cette influence, lorsqu'ils règlent un chronomètre destiné à être contrôlé ou utilisé à une altitude notablement différente de celle à laquelle ils travaillent ; pour une différence d'altitude de 1000 m, la marche diurne peut être modifiée de 1 s.

Pour combattre cet effet, on a imaginé des dispositifs agissant comme le balancier bimétallique ; jusqu'à présent ces compensations compliquées n'ont été appliquées qu'aux horloges de précision. On peut imaginer de soustraire les montres aux variations de la pression en les mettant dans un récipient absolument étanche. Cette solution n'est simple qu'en apparence, car il est très difficile d'obtenir et de maintenir une étanchéité parfaite.

Si, pendant la période d'examen d'un chronomètre, dans un observatoire par exemple, la pression atmosphérique varie notablement, la marche du chronomètre en sera affectée ; or, si l'on ne tient pas compte de cet effet, le jugement porté sur la qualité du chronomètre sera erroné ; on attribuera au chronomètre des écarts dus aux variations de la pression. Il semble qu'en soumettant tous les chronomètres d'une compétition aux mêmes changements de pression, par exemple en faisant commencer le concours à date fixe, on ne commette aucune injustice, puisque toutes les montres auront subi les mêmes influences. Cependant

si un chronomètre est surcompensé (c'est-à-dire avance au chaud) et si, pendant le temps où il est à la glacière, la pression est beaucoup plus forte que lorsqu'il est à l'étuve, il avancera au chaud sous l'effet de la pression ; son coefficient thermique sera augmenté. Placé dans les mêmes conditions, un chronomètre à compensation trop faible (qui retarde au chaud) aura son coefficient thermique diminué du fait de la pression.

Pour mettre des chronomètres de concours sur un pied d'égalité, l'unique moyen, si l'on ne peut pas les soustraire aux variations de la pression, est de tenir compte de l'influence de cette pression sur la marche des chronomètres.

On parle souvent de la résistance de l'air, comme si l'effet de la pression provenait uniquement de l'air déplacé par le balancier. S'il en était ainsi, la pression ne devrait avoir aucun effet sur la marche d'une montre munie d'un balancier constitué par un disque sans aspérités. Or, les expériences d'Attinger montrent que, dans des conditions bien déterminées (les balanciers se meuvent dans un milieu illimité, dans l'air à une pression voisine de 710 mm Hg), l'effet de la pression sur la marche est donné, pour un balancier formé par un disque en aluminium, par :

$$\frac{\Delta T}{T} = 13 \cdot 10^{-5}$$

et, pour un balancier monométallique à vis :

$$\frac{\Delta T}{T} = 22 \cdot 10^{-5},$$

où T désigne la période du balancier-spiral oscillant dans le vide.

La pression a donc deux effets directs : l'un provient de la résistance de l'air déplacé, l'autre est celui de l'air entraîné par frottement, grâce à la viscosité de l'air.

On peut supposer que l'air entourant le balancier est partagé en couches minces, parallèles au plan du disque ; celui-ci entraîne d'abord la première couche d'air qui, en raison de la viscosité, entraîne la seconde et ainsi de suite ; d'une couche à l'autre il se produit un retard, une différence de phase.

Deux grandeurs interviennent dans les calculs : la densité δ et le coefficient de viscosité η de l'air (ou du gaz ambiant). Le fluide entraîné est une masse qui augmente le moment d'inertie I du balancier oscillant dans le vide. Dans un gaz et à une pression donnée, le moment d'inertie devient $I + \Delta I$ et la période, T' . On a :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C}},$$

donc :

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{I + \Delta I}{C}} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C}} \sqrt{1 + \frac{\Delta I}{I}}.$$

Or, comparativement à l'unité, $\frac{\Delta I}{I}$ est petit, d'où :

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{1}{C}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta I}{I}\right) = T \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta I}{I}\right),$$

ce qui conduit finalement à la formule connue (148) :

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2} \frac{\Delta I}{I}.$$

Il reste à déterminer ΔI .

Soit (fig. 400) un disque de rayon R tournant avec la vitesse angulaire ω autour d'un axe zz à proximité d'une paroi AB parallèle au disque et à la distance h de celui-ci. Si h est très grand par rapport à l'épaisseur

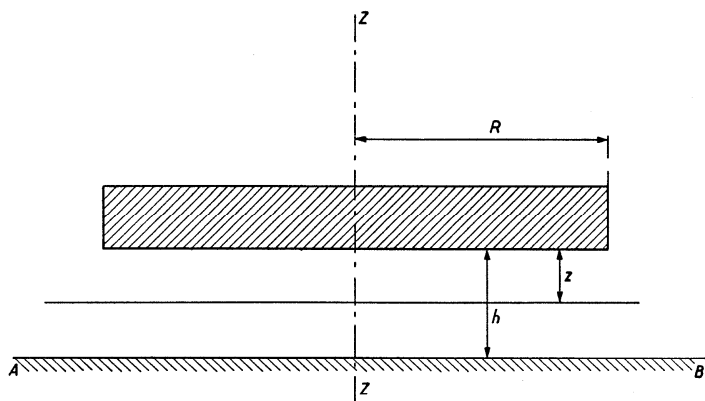


Fig. 400

du disque, on admettra que le balancier se meut dans un *milieu illimité* ; dans le cas contraire, on parlera d'un *milieu limité* : ce cas est généralement réalisé dans les montres. Ces deux expressions ne sont pas nettement définies ; leur sens n'est pas précis.

Le disque de rayon R entraîne successivement chacune des couches d'air (ou de gaz) situées entre lui et la paroi AB . La vitesse angulaire de

la première couche est celle du disque, c'est-à-dire ω ; elle diminue d'une couche à l'autre ; dans un milieu illimité $\omega = 0$, lorsque la distance $h = \infty$; dans un milieu limité, on admet que la vitesse angulaire est nulle à une distance h .

Dans un milieu illimité, on a, d'après la théorie des fluides, l'équation aux dérivées partielles :

$$\eta \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} = \delta \frac{\partial \omega}{\partial t}, \quad (432)$$

z désignant la distance d'une couche à la surface du disque. La solution de cette équation est :

$$\omega = \Omega_0 e^{-mz} \cos (nt - mz), \quad (433)$$

où :

$$n = \frac{2\pi}{T}, \quad m = \sqrt{\frac{\delta n}{2\eta}} = \sqrt{\frac{\pi \delta}{\eta T}}$$

et Ω_0 est la vitesse angulaire maximum. La formule (433) permet de calculer la vitesse angulaire d'une couche d'air entraîné, lorsqu'on connaît la distance z et le temps t .

La couche d'air entraîné agit sur le disque, diminue sa vitesse et augmente sa période. La tension tangentielle agissant sur le disque est proportionnelle à la distance r , au coefficient de viscosité η et à la variation de la vitesse angulaire en fonction de la distance z . Soit \mathfrak{F} cette tension :

$$\mathfrak{F} = \eta r \frac{\partial \omega}{\partial z}.$$

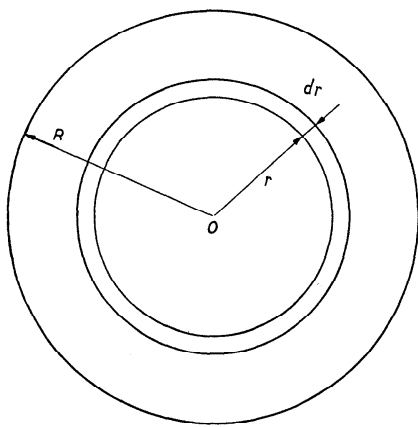


Fig. 401

La force élémentaire agissant sur le disque à la distance r est proportionnelle à \mathfrak{F} et à la surface de l'élément ; elle vaut (fig. 401) :

$$dF = 2\pi r dr \cdot \mathfrak{F}.$$

Le couple élémentaire dC aura pour expression :

$$dC = 2\pi r^2 dr \cdot \mathfrak{F} = 2\pi r^2 dr \cdot \eta r \frac{\partial \omega}{\partial z}.$$

En intégrant de 0 à R , on obtient :

$$C = -\frac{\pi R^4}{2} \eta m \Omega_0 (\cos nt - \sin nt)$$

ou

$$C = -\frac{\pi R^4}{2} \eta m \left(\Omega + \frac{1}{n} \frac{d\Omega}{dt} \right),$$

Ω étant la vitesse angulaire au temps t .

Le second terme de cette équation contient l'accélération ; il augmente apparemment le moment d'inertie I de la quantité ΔI , et l'on a :

$$\Delta I = \frac{\pi R^4}{2} \eta \frac{m}{n},$$

soit, en remplaçant m et n par leurs valeurs :

$$\Delta I = \frac{R^4}{4} \sqrt{\pi \delta \eta T}.$$

Pour les deux faces du disque, on a une modification du moment d'inertie $\Delta I_1 = 2\Delta I$:

$$\Delta I_1 = \frac{R^4}{2} \sqrt{\pi \delta \eta T}$$

et, d'après (148) :

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{R^4}{4I} \sqrt{\pi \delta \eta T}. \quad (434)$$

Cette formule donne la variation relative de la période due à la pression atmosphérique, lorsqu'on ne tient compte que des deux faces du disque constituant le balancier.

Il y a lieu de chercher à évaluer l'influence du bord du disque. Soit un disque de rayon R et d'épaisseur s (fig. 402) tournant autour de zz dans un cylindre coaxial de rayon $R + h$.

La force ΔF agissant à la distance $R + z = r$ de l'axe a pour valeur :

$$\Delta F = 2\pi R s \mathfrak{F};$$

le couple correspondant vaut :

$$\Delta C = 2\pi R s r \mathfrak{F},$$

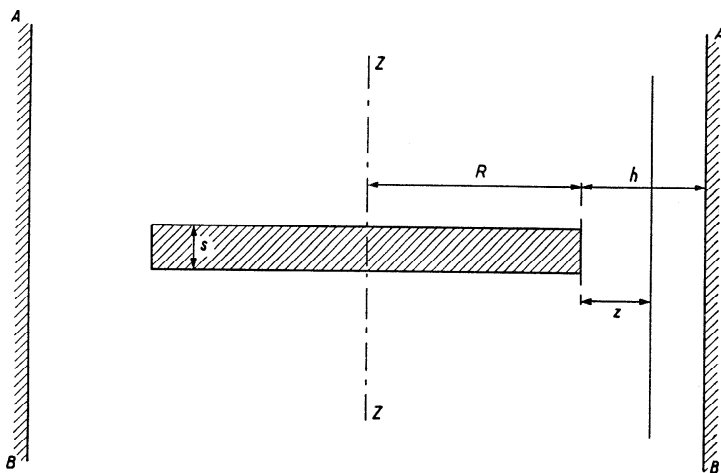


Fig. 402

mais :

$$\mathfrak{F} = \eta r \frac{\partial \omega}{\partial z} = \eta r \frac{\partial \omega}{\partial r},$$

donc :

$$\Delta C = 2\pi R s \eta r^2 \frac{\partial \omega}{\partial r}.$$

Compte tenu de la valeur de $\frac{\partial \omega}{\partial r}$, l'intégration donne finalement :

$$\Delta I_2 = R^3 s \sqrt{\pi \delta \eta T},$$

de sorte que la modification apparente du moment d'inertie est :

$$\Delta I = \frac{R^4}{2} \sqrt{\pi \delta \eta T} + R^3 s \sqrt{\pi \delta \eta T} = \sqrt{\pi \delta \eta T} \left(\frac{R^4}{2} + R^3 s \right).$$

La perturbation relative de la période vaut donc :

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2I} \sqrt{\pi \delta \eta T} \left(\frac{R^4}{2} + R^3 s \right). \quad (435)$$

La perturbation relative de la période d'un balancier qui oscille dans un milieu illimité est proportionnelle à la racine carrée de la densité δ , c'est-à-dire à la racine carrée de la pression; les facteurs T , R , s et I sont des constantes pour un balancier donné; le coefficient de viscosité η varie peu avec la pression, du moins pour les pressions qui nous intéressent.

On a intérêt à augmenter le moment d'inertie du balancier; il ne faut cependant pas que ce soit en augmentant R et s , mais en choisissant un métal plus lourd.

Attinger obtient, pour la perturbation relative de la période d'un balancier oscillant dans un milieu limité :

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\pi}{6} \frac{\delta h R^3}{I} (R + 2s). \quad (436)$$

Cette perturbation est proportionnelle à la pression, puisqu'elle est proportionnelle à la densité δ . Il est remarquable que dans un milieu limité, la viscosité du gaz ne joue aucun rôle.

Les expériences d'Attinger ont montré que les conclusions tirées de l'étude théorique sont exactes si l'on tient compte du fait que cette étude n'a envisagé que des cas extrêmes.

Dans un espace illimité, $\frac{\Delta T}{T}$ est proportionnel à la racine carrée de la pression; une parabole représentera $\frac{\Delta T}{T}$ en fonction de la pression. Si l'espace est limité, la même fonction sera représentée par une droite. Mais, dans la réalité, les cas extrêmes ne se présentent pas; en augmentant h , on passe insensiblement d'un espace limité à un espace illimité. Suivant les cas, $\frac{\Delta T}{T}$ sera représenté par une courbe qui se rapprochera plus ou moins d'une droite.

La figure 403 représente les relations trouvées par Jaquerod au cours d'expériences sur des montres du genre habituel, placées dans l'air, dans l'anhydride carbonique et dans l'hydrogène, à des pressions variant entre quelques mm et 1500 mm Hg.

A propos du désaccord qui apparaît entre les expériences et la théorie, il faut ajouter que cette dernière ne tient compte ni de l'effet de l'amortissement sur la période ni de l'influence de la force centrifuge sur l'air entraîné ni de l'effet de l'air déplacé par le spiral.

Ces études théoriques et expérimentales faites au Laboratoire suisse de recherches horlogères montrent bien que l'influence de la

pression est suffisamment importante pour qu'on ne puisse pas la négliger dans des mesures très précises. On tient compte de cette influence au moyen du *coefficient barométrique* qui exprime la modification de la marche diurne pour une variation de la pression atmosphérique de 1 mm Hg.

On suppose ce coefficient constant pour les variations auxquelles les montres sont normalement soumises, ce qui revient à admettre que le balancier se meut dans un milieu limité.

D'après ces expériences, le coefficient barométrique est fonction des dimensions du balancier.

Jaquerod a trouvé les valeurs suivantes :

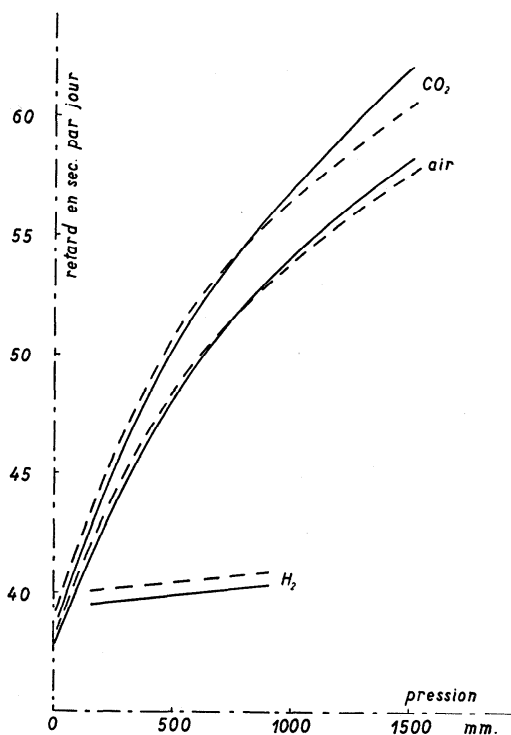


Fig. 403

Diamètre du balancier (extérieur de la serge)	Coefficient barométrique dans le voisinage de 725 mm Hg
21,2 mm	0,008 3 s
19,3	0,007 3
17,7	0,009 0
15,2	0,010 9
12,6	0,018 7
9,7	0,017 9

On ne s'étonnera pas que d'autres expérimentateurs obtiennent des valeurs différentes en opérant sur d'autres balanciers et d'autres montres.

L'augmentation de la pression crée un amortissement supplémentaire ; si l'isochronisme des oscillations du balancier-spiral n'est pas parfait

— et il ne l'est jamais — la perturbation de la période constatée pendant les expériences provient en partie de la pression et en partie du défaut d'isochronisme.

Le tableau ci-dessus montre que *le coefficient barométrique augmente lorsque le diamètre du balancier diminue*.

Contrairement à ce qu'on croit parfois, les aspérités du balancier et en particulier les vis n'ont pas une grande influence sur le coefficient barométrique. En remplaçant les vis par des palettes orientables, dans un balancier de 15,1 mm de diamètre de serge, Attinger trouve que le coefficient barométrique passe de 0,018 s, lorsque les palettes sont parallèles au plan d'oscillation du balancier, à 0,022 s, lorsqu'elles sont perpendiculaires à ce plan. Si les vis sont noyées dans la serge du balancier, le coefficient barométrique est peu affecté.

On peut agir sur le coefficient barométrique en limitant autant que possible l'espace dans lequel le balancier se meut. Attinger trouve, pour un disque plein en avional et pour une pression de 760 mm Hg, dans un milieu illimité :

$$\frac{\Delta T}{T} = 13,9 \cdot 10^{-5},$$

ce qui correspond à un coefficient barométrique de 0,016 ; dans un milieu limité :

$$\frac{\Delta T}{T} = 4,8 \cdot 10^{-5},$$

ce qui correspond à un coefficient barométrique de 0,0054.

L'emploi de boîte étanche serait un excellent moyen de soustraire le balancier aux fluctuations de la pression atmosphérique ; mais on sait assez que l'étanchéité d'une boîte ne peut être assurée que lorsque celle-ci est neuve et jusqu'au jour où elle est ouverte.

Les champs magnétiques. — Un champ magnétique est une région de l'espace où règne l'action d'un aimant, d'un électro-aimant ou d'un circuit parcouru par un courant électrique. Le champ magnétique est défini par la direction et l'intensité de la force magnétique ; il varie généralement d'un point de l'espace à un autre.

Placée dans un champ magnétique, une aiguille aimantée mobile s'oriente dans la direction du champ ; le couple maximum qui s'exerce sur elle est une mesure de l'intensité du champ. Cette intensité est définie comme le quotient du couple par la masse magnétique de l'aiguille. Toutes ces grandeurs : intensité du champ, couple exercé sur l'aiguille aimantée,

masse magnétique, sont exprimées dans le système C.G.S. ; on appelle *unité de masse magnétique*, la masse magnétique qui, placée à 1 cm d'une masse égale, la repousse avec une force de 1 dyne. Le couple agissant sur l'aiguille aimantée est donné en dyne-cm ; l'*intensité du champ* est mesurée par la force en dynes qu'y subit l'unité de masse magnétique.

Soit (fig. 404) NS une aiguille aimantée (ou un barreau) de longueur l placée dans un champ magnétique uniforme, représenté par des lignes

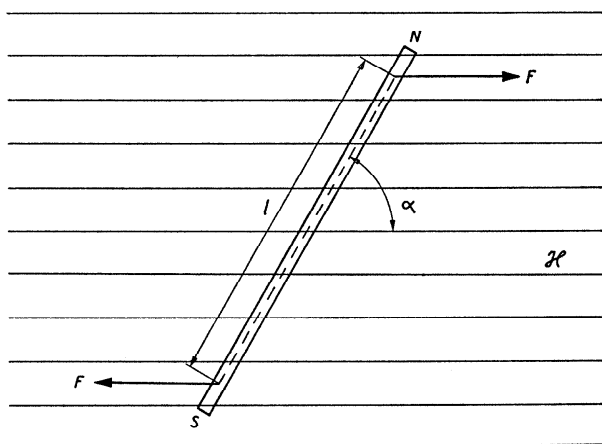


Fig. 404

de force rectilignes, parallèles et uniformément réparties. Deux forces F agissent sur les pôles N et S ; elles tendent à faire tourner l'aiguille de façon que la ligne des pôles soit parallèle aux lignes de force ; elles forment un couple dont le moment est :

$$\mu = Fl \sin \alpha.$$

La force F est proportionnelle à l'intensité \mathcal{H} du champ et à la masse magnétique de l'aiguille. Dans l'expression de μ , on peut introduire le moment magnétique \mathfrak{M} de l'aiguille — moment qui dépend de la masse magnétique et des dimensions de l'aiguille — et écrire :

$$\mu = \mathfrak{M} \mathcal{H} \sin \alpha.$$

On admet généralement que \mathfrak{M} est indépendant de \mathcal{H} ; cette hypothèse n'est toutefois vraie que pour des champs peu intenses ; dès que \mathcal{H} a une certaine valeur, le moment \mathfrak{M} de l'aiguille est fonction de \mathcal{H} .

L'aiguille (ou le barreau) libre de s'orienter (on la suppose suspendue

à un fil) et sollicitée par le couple μ exécutera une série d'oscillations autour de la position d'équilibre définie par le parallélisme de NS et des lignes de force du champ.

Pour des oscillations de faible amplitude, le couple de rappel peut être considéré comme proportionnel à l'élongation α ; on peut donc poser :

$$\sin \alpha \cong \alpha ,$$

d'où :

$$\mu = \mathfrak{M} \mathcal{H} \alpha .$$

On a ainsi affaire à des oscillations harmoniques et isochrones dont la période est :

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{I}{\mathfrak{M} \mathcal{H}}} , \quad (437)$$

où I désigne le moment d'inertie de l'aiguille ou du barreau par rapport à l'axe d'oscillation.

Connaissant le moment magnétique \mathfrak{M} et le moment d'inertie I du barreau, on peut déduire \mathcal{H} de (437) ; on trouve :

$$\mathcal{H} = \frac{4 \pi^2 I}{\mathfrak{M} T^2} . \quad (438)$$

Cette formule peut être appliquée dès que la période des oscillations a été déterminée.

On peut aussi calculer l'intensité du champ magnétique dans la partie centrale d'un solénoïde de n spires parcouru par un courant de i ampères :

$$\mathcal{H} = 0,4 \pi n i .$$

L'unité d'intensité du champ magnétique est l'intensité d'un champ qui exerce sur l'unité de masse magnétique une force de 1 dyne ; cette unité s'appelle un gauss.

Les champs magnétiques auxquels les montres peuvent être soumises sont d'intensités très différentes.

Toutes les montres se trouvent continuellement dans le champ magnétique terrestre dont l'intensité est de 0,5 gauss et dont la composante horizontale vaut 0,2 gauss.

A proximité d'un écouteur téléphonique, d'un appareil de radio, d'un ampèremètre ou d'un voltmètre courant, le champ est de l'ordre de 10 gauss ; près d'un haut-parleur ou de la table d'une planeuse à plateau magnétique, il peut atteindre 100 gauss ; à côté de certains électro-aimants, le champ peut atteindre plusieurs milliers de gauss.

Une tige de fer doux placée dans un champ magnétique se comporte comme un aimant, mais dès qu'elle est sortie du champ, elle perd son aimantation. Un morceau d'acier se comporte comme un morceau de fer tant qu'il est dans le champ magnétique : il a deux pôles, mais une fois sorti du champ, il reste un aimant.

Dans une montre, il y a beaucoup de pièces en acier : le balancier bimétallique acier-laiton, le spiral en acier, les pièces de l'assortiment à ancre — roue, ancre-fourchette, plateau — les arbres de toutes les roues, les pignons, le ressort de barillet, presque tous les organes du mécanisme de remontage, enfin toutes les vis et souvent les aiguilles. Cette énumération suffit à faire voir que l'influence d'un champ magnétique sur une montre doit être complexe ; elle l'est d'autant plus que la plupart des organes susceptibles d'aimantation sont en mouvement.

On distingue plusieurs actions d'un champ magnétique. L'acier (serge et bras) d'un balancier acier-laiton placé dans un champ magnétique sera aimanté ; le balancier aura deux pôles (dans certains cas, même 4) et sera sollicité de se placer dans le champ de façon que la ligne reliant ses pôles soit parallèle aux lignes de force du champ ; il subit l'influence d'un couple qui s'ajoute au couple du spiral. La période normale du balancier-spiral est :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C}} ;$$

dans le champ magnétique, elle devient :

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C + \mathfrak{M}\mathcal{H}}} . \quad (439)$$

Comme $T' < T$, la montre avance.

Les mesures exécutées par Jaquerod et Mügeli montrent qu'il en est bien ainsi : T'^2 est plus ou moins proportionnel à $\frac{1}{\mathcal{H}}$ (fig. 405). Il n'y a pas lieu de s'étonner que les points représentant T'^2 en fonction de \mathcal{H} ne soient pas sur une droite, car les formules (438) et (439) ne sont rigoureusement valables que pour des oscillations de faible amplitude et pour un champ magnétique uniforme et peu intense. Or, les oscillations d'un balancier sont loin d'être petites et le mouvement du balancier et du spiral qui sont des aimants modifie constamment la structure du champ.

Pour des oscillations de grande amplitude, on ne peut plus poser $\sin \alpha \cong \alpha$.

Lorsqu'un balancier oscille dans un champ magnétique, il y a lieu

de distinguer l'élongation φ et l'angle α d'inclinaison de la ligne des pôles du balancier-spiral au repos sur les lignes de force du champ. L'équation du mouvement du balancier-spiral est, dans le cas considéré :

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + C\varphi + \mathfrak{M}\mathcal{H} \sin(\varphi + \alpha) = 0; \quad (440)$$

elle ressemble à l'équation (332) qui est celle du mouvement d'un balancier déséquilibré.

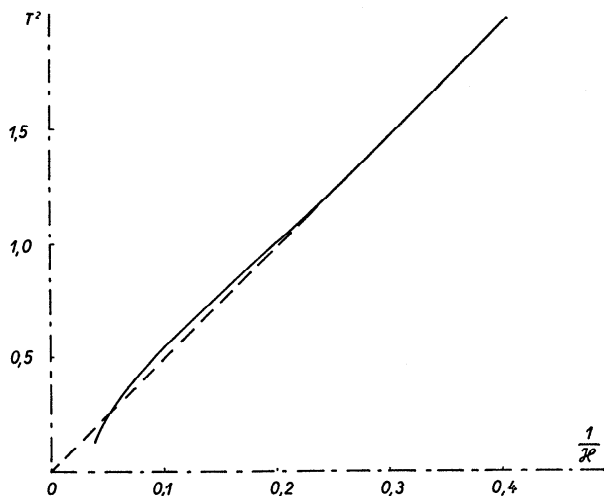


Fig. 405

On peut s'attendre à obtenir pour la variation relative de la période du balancier (ou pour la marche diurne) une courbe semblable à celle de la figure 355.

Le champ magnétique crée un défaut d'isochronisme; son influence sur la période est nulle lorsque l'amplitude est d'environ 220° ; elle est très sensible sur la période des oscillations de faible amplitude; or ces petites oscillations sont fréquentes, car le champ magnétique peut amortir considérablement le mouvement du balancier-spiral.

Influence du champ magnétique sur l'amplitude. — Cette influence a une grande importance, puisque le champ magnétique accélère considérablement les oscillations de faible amplitude ($< 220^\circ$).

Les facteurs qui modifient l'amplitude des oscillations d'un balancier-spiral placé dans un champ magnétique sont :

1° *l'hystérésis* qui se produit lorsqu'une pièce (en fer ou en acier)

susceptible d'aimantation est soumise à l'action d'un champ magnétique variable ; ce phénomène correspond à une absorption d'énergie donc à un freinage ;

2° *les courants de Foucault* induits dans les pièces, telles que le balancier et le spiral, qui se déplacent dans un champ magnétique. Ces courants sont dirigés de sorte qu'ils s'opposent à la cause qui les produit (loi de Lenz), donc ici au mouvement de l'organe réglant.

Jaquerod et Mügeli ont montré que l'amplitude du balancier reste stationnaire dans les champs de faible intensité (< 5 gauss), puis diminue rapidement (fig. 406), jusqu'à ce que le champ ait atteint une certaine

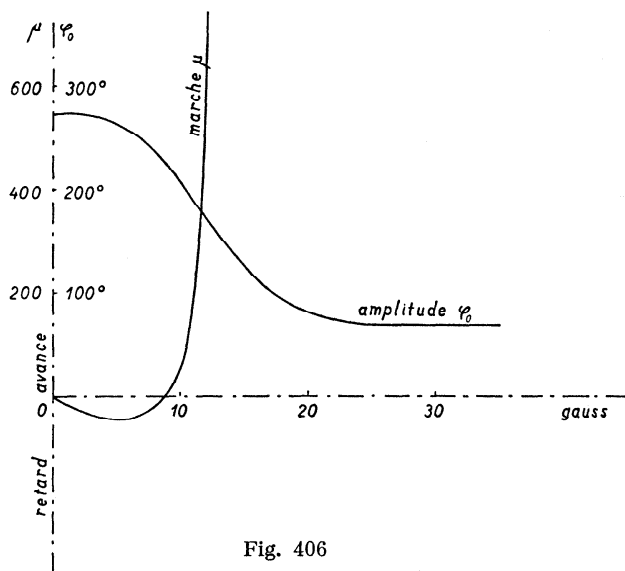


Fig. 406

valeur (dans l'expérience en question, cette intensité du champ était de 20 gauss). A partir de cette valeur, l'amplitude reste constante jusqu'à l'arrêt ; ce dernier a lieu alors que l'amplitude est encore assez grande pour que les fonctions de l'échappement puissent se faire. L'arrêt ne se produit donc pas à la suite d'une diminution progressive de l'amplitude, allant jusqu'à ce que les organes de l'échappement ne puissent plus fonctionner, mais sans doute lorsque des pièces sont bloquées les unes contre les autres (spires du spiral, fourchette et plateau).

Influence du champ magnétique sur la marche des montres. — La figure 406 indique aussi la marche de la montre en fonction de l'intensité du champ magnétique dans lequel elle est placée. La forme de la courbe

permet d'affirmer que les déductions tirées de l'analogie des équations (440) et (332) sont exactes : de 270° à 220° , la montre retarde, puis elle avance dès que l'amplitude est plus petite que 220° ; l'avance est considérable lorsque l'amplitude des oscillations est petite.

L'influence du champ sur la marche de la montre dépend de l'équipement de cette dernière.

A côté de la variation de la marche de la montre placée dans un champ magnétique — variation qui peut atteindre des centaines, voire des milliers de secondes par jour — il y a la variation de la marche de la montre après son passage dans le champ magnétique. La première variation est l'*effet temporaire*, la seconde est l'*effet résiduel*. Pour le possesseur de la montre, l'effet résiduel est plus important que l'effet temporaire bien qu'il soit moins considérable.

L'effet résiduel provient de l'aimantation des pièces d'acier qui restent aimantées après leur passage dans le champ magnétique : le balancier continue à osciller dans le champ magnétique produit par les pièces aimantées.

Protection des montres contre les effets du champ magnétique. — Un moyen radical de protéger les montres contre les effets du champ magnétique serait de faire tous les organes de la montre en métal ou en alliage non magnétique. Mais il se révèle inapplicable lorsqu'on veut construire une montre ayant une bonne marche.

On obtient des avantages appréciables en associant un balancier monométallique (laiton, maillechort, glucidur) à un spiral autocompensateur du genre élinvar (mételinvar, nivarox, isoval) ; toutefois, l'autocompensation étant liée aux propriétés magnétiques de l'alliage, un spiral non magnétique fait en un alliage dérivé des ferro-nickels ne peut pas être autocompensateur. Pour arriver à un résultat satisfaisant dans la pratique, on s'efforce de trouver des alliages peu magnétiques et à peu près autocompensateurs ; on y parvient à l'aide d'alliages dont le point de Curie est relativement bas. Le point de Curie est la température à laquelle un métal ou un alliage perd ses propriétés magnétiques.

Dans le même but, on a aussi fait certaines parties de l'assortiment (roue, ancre, parfois le plateau) en un alliage non magnétique tel que le bronze de glucinium (glucidur). Enfin les ressorts de barillet en alliages non magnétiques (durapower, durober, etc.) contribuent à rendre les montres moins sensibles au champ magnétique.

Jusqu'à présent on n'est pas parvenu à faire des montres complètement amagnétiques, puisque toutes contiennent des pièces en acier. Les montres dites antimagnétiques ou non magnétiques sont plus ou moins insensibles aux champs magnétiques habituels.

On pourrait protéger efficacement les montres contre les effets des champs magnétiques en utilisant un *écran magnétique*, c'est-à-dire une pièce en alliage à forte perméabilité magnétique (fer doux, mumétal, permalloy, etc.) enveloppant le mouvement ; cet écran pourrait être constitué par le boîtier de la montre fermé par une plaque supportant le cadran. Les essais faits par différents expérimentateurs ont prouvé l'efficacité d'écrans magnétiques bien conçus et bien exécutés.

Définition de la montre amagnétique. — La définition « théorique » de la montre amagnétique est facile à formuler : c'est une montre complètement insensible aux champs magnétiques, quels qu'ils soient. Seules des montres composées uniquement de matériaux non magnétiques ou efficacement protégées par un écran magnétique pourraient remplir les conditions contenues dans la définition théorique.

En réalité, il faut admettre que le qualificatif amagnétique (non magnétique, antimagnétique) puisse être appliqué à des montres qui supportent les champs magnétiques les plus fréquents sans que leur marche soit trop altérée. Il faut donc définir ce que l'on entend par les « champs magnétiques les plus fréquents » et en même temps déterminer les variations de marche tolérables. Seul un examen dans un laboratoire permettra de dire si une montre mérite ou non le qualificatif d'amagnétique.

Diverses propositions ont été faites en ce qui concerne les limites que ne doivent pas dépasser les montres pratiquement amagnétiques. Rappelons celles préconisées, en 1948, par une commission spéciale de la Société suisse de chronométrie : les montres seront soumises à deux sortes d'épreuves dans le but de déterminer : 1° l'*influence temporaire* d'un champ de 20 gauss ; la variation de la marche diurne ne devra pas dépasser 30 s ; 2° l'intensité du champ magnétique provoquant l'*arrêt* ; cette intensité ne devra pas être inférieure à 80 gauss ; 3° l'*effet résiduel*, après le passage dans un champ de 80 gauss ; cet effet ne devra pas dépasser 15 s pour la variation de la marche diurne. La montre devra être observée dans la position cadran en haut sur une machine à déterminer la marche instantanée des montres, dans le champ magnétique horizontal d'une bobine de Helmholtz de dimensions bien définies.

Dès que les fabricants auront accepté ces normes (ou d'autres du même genre), il faudra définir la conduite des essais : désaimantation préalable, observation de la montre désaimantée, éventuellement seconde désaimantation, aimantation, augmentation de l'intensité du champ jusqu'à l'arrêt de la montre, puis détermination de l'effet résiduel. Il s'agira aussi de définir la nature et les dimensions des appareils destinés à produire le champ magnétique et à en mesurer l'intensité, ainsi que les machines à désaimanter et leur utilisation.

Comme la composante horizontale du champ magnétique terrestre est faible (0,2 gauss), elle peut être négligée dans les essais industriels ; il n'y a donc pas lieu de s'inquiéter de la position du pendant ou surtout de la position du bras du balancier au repos par rapport aux lignes de force du champ magnétique de la Terre.

La théorie du réglage et le réglage pratique. — Dans le présent chapitre, nous avons étudié l'influence de certains facteurs sur la marche des montres ; cette étude constitue la *théorie du réglage*.

Les facteurs étudiés sont de différentes sortes ; les uns ne peuvent pas être éliminés : nous ne sommes maîtres ni des secousses ni des variations de la température, de la pression, etc. ; d'autres sont inhérents à la construction de la montre ou aux propriétés de la matière (échappement, variation du module d'élasticité de l'acier en fonction de l'état de contrainte du spiral, changement de la viscosité des huiles, ...) ; nous ne pouvons pas les annuler. Enfin certains peuvent être éliminés, c'est le cas pour les défauts d'équilibre, le jeu du spiral entre les goupilles de la raquette.

Si considérable que soit un effet sur la marche d'une montre, nous pouvons toujours le corriger en modifiant le moment d'inertie du balancier ou le moment élastique du spiral, à la condition que cet effet reste constant. Les influences les plus néfastes sont celles dont l'importance dépend de l'amplitude, c'est-à-dire celles qui créent un défaut d'isochronisme.

Ce défaut ne se manifesterait pas si l'amplitude des oscillations restait constante. Mais l'amplitude varie d'une oscillation à l'autre en raison de la transmission irrégulière de la force motrice par les engrenages ; elle varie pendant la journée par suite de la détente du ressort et au cours des années par le fait de l'épaississement des huiles et de la fatigue du ressort moteur ; enfin elle varie de façon imprévisible en raison des secousses, des changements de position de la montre, des variations de la température ou de la pression atmosphérique, de la présence d'un champ magnétique, etc.

Plusieurs des facteurs que nous avons étudiés séparément pour les besoins de l'analyse, agissent ou peuvent agir simultanément ; le régleur se trouve devant un effet global. Ne pouvant éliminer tous les facteurs, il essaie de compenser certains effets par d'autres de sens contraires ; au besoin, il crée un défaut pour en corriger un autre. Cette compensation n'est jamais parfaite ; elle peut l'être pour une amplitude déterminée, mais ne le sera plus pour une autre.

Le défaut le plus grave est le défaut d'isochronisme ; nous avons étudié les facteurs qui le créent. Pour en réduire l'importance, il faut chercher à obtenir des oscillations dont l'amplitude varie le moins pos-

sible. A cet effet, les horlogers ont utilisé dans les montres et utilisent encore dans les chronomètres de marine la fusée qui permet d'égaliser le moment du ressort-moteur au cours de la détente ; certains ont proposé des échappements à impulsions constantes, qui sont souvent fort ingénieux, mais trop compliqués et trop délicats pour la pratique. Le régleur cherche à réduire la différence entre les grandes et les petites amplitudes et pour cela il s'assure d'abord que le ressort est libre dans le barillet, qu'il se développe concentriquement ; il en étudie minutieusement le diagramme de développement ; il vérifie les engrenages, les pivots, les pierres, les fonctions de l'échappement. Le régleur et surtout le régleur de précision doit connaître les fonctions de tous les organes de la montre ; il doit être renseigné sur l'influence des différents facteurs qui peuvent modifier la marche d'une montre, de façon que lorsqu'une variation de la marche se produit, il puisse en général en déceler rapidement la cause.

Le régleur doit se familiariser avec la théorie du réglage. Même si certains développements mathématiques lui échappent, il peut en comprendre les conclusions et en tirer profit. Il se rappellera que les théories sont fondées sur des hypothèses simplificatrices, qui ne sont qu'approximativement vraies. Dans la plupart des cas, la théorie donne l'ordre de grandeur et le sens de la modification de la marche diurne provoquée par tel ou tel agent ; elle indique surtout les facteurs qui influencent le résultat, de sorte que le régleur saura où agir pour obtenir un certain effet. Il n'ignore pas, par exemple, que pour augmenter le pouvoir compensateur d'un balancier bimétallique, il peut diminuer l'épaisseur totale de la bilame ou modifier le rapport des épaisseurs des deux lames.

Le réglage des montres et des chronomètres, dans les différentes positions, donne parfois bien des soucis au régleur ; le réglage du plat au pendu serait facile si l'amplitude des oscillations était la même dans les positions verticales et horizontales. Si tout a été fait pour que l'amplitude des oscillations du balancier varie le moins possible, lorsque la montre passe d'une position à une autre, et pour que les facteurs perturbateurs de l'isochronisme soient petits, il ne reste plus qu'à tenter de compenser l'une par l'autre deux actions de sens contraires. Ainsi, le jeu entre les goupilles de la raquette est-il parfois créé pour provoquer un retard aux petits arcs.

De telles corrections ne sont acceptables que lorsqu'elles sont de peu d'importance, car, avec le temps, l'huile s'épaissit ou disparaît, l'amplitude des oscillations baisse et la compensation de deux défauts l'un par l'autre risque fort de ne plus être exacte.

Pour égaliser les marches dans les positions horizontales et verticales, certains régleurs cherchent à rendre les amplitudes égales en modifiant le frottement de façon qu'il soit à peu près le même dans les deux positions. Ils diminuent le frottement le plus fort — ce qui est une excellente

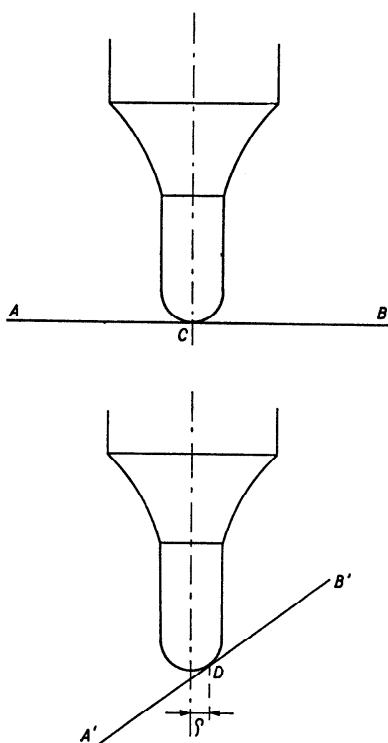


Fig. 407

modification — en réduisant le diamètre des pivots de l'arbre du balancier sans compromettre la solidité. Parfois ils augmentent le frottement le plus faible en aplatissant les extrémités des pivots ou en inclinant le contre-pivot ; accroître le frottement n'est pas recommandable. Soit (fig. 407) AB la position correcte de la face plate du contre-pivot sur lequel repose l'extrémité du pivot arrondie en demi-sphère ; le point de contact est en C ; théoriquement, il n'y a aucune énergie absorbée par le frottement puisqu'en C il n'y a pas de mouvement (en réalité, le contact se fait sur une petite surface autour de C). Lorsque le contre-pivot est incliné en $A'B'$, le point de contact est en D et le travail du frottement est :

$$P\varphi \cdot 2\pi r$$

pour chaque rotation du pivot, où P désigne la pression entre le pivot et le contre-pivot, φ le coefficient de frottement et r le rayon du cercle décrit par le point de contact D .

Nous connaissons les raisons pour lesquelles il faut chercher à réduire le frottement qui est une force capricieuse, variable dans de grandes proportions et provoquant l'usure ainsi que la détérioration des surfaces de contact.

Un autre moyen plus rationnel d'égaliser les amplitudes au plat et au pendu serait de diminuer le frottement en remplaçant le glissement par le roulement. L'utilisation des roulements à billes diminuerait les frottements dans les deux positions et surtout les égaliserait. L'introduction de roulements à billes dans les montres présente certainement de très grandes difficultés, mais la technique moderne a résolu tant de problèmes délicats qu'il n'est pas insensé de croire qu'elle parviendra à appliquer les roulements à billes en horlogerie.

CHAPITRE XIV

LES HORLOGES

Montres et horloges. — Au cours des siècles, le mot *horloge* a changé d'acception ; jusque vers 1800, il servait à désigner un instrument horaire quelconque ; on parlait d'horloge au soleil (cadran solaire ou gnomon), à eau (clepsydre), au sable (sablier), de poche, d'horloge marine, d'horloge à pendule, etc. Aujourd'hui, on désigne sous le nom d'horloges des instruments horaires qui ne peuvent ou ne doivent pas être souvent déplacés ; on a des horloges de cuisine, d'appartement, de tour, des horloges à pendule, des horloges électriques.

Une *pendule* est une horloge à pendule ; cependant ce terme et son diminutif *pendulette* sont aussi appliqués à des horloges à balancier-spiral.

Horloges à pendule et montres sont actuellement nettement séparées ; elles ont des organes communs, les roues dentées par exemple, mais elles diffèrent souvent par le genre de force motrice, par l'échappement et par l'organe régulateur.

Plusieurs paragraphes du chapitre IV (t. I., p. 81) sont consacrés au poids comme force motrice ; celui-ci ne peut pas être utilisé dans les montres, aussi les dispositifs décrits alors sont-ils tous propres aux horloges.

Le dernier chapitre de cette *Théorie générale de l'horlogerie* sera réservé à l'étude des échappements utilisés dans les horloges à pendule et de l'organe régulateur de celles-ci.

Les échappements des horloges à pendule. — Le pendule est un organe oscillant comme le balancier-spiral des montres. Il y a cependant une différence essentielle entre ces deux régulateurs : le balancier doit accomplir des oscillations d'amplitude aussi grande que possible, tandis que les oscillations du pendule sont de faible amplitude. Dans les horloges précises, l'arc supplémentaire aux fonctions de l'échappement n'est plus guère qu'une sécurité sans laquelle l'échappement risquerait de ne pas fonctionner.

Il y a dans les échappements d'horloges à pendule, des échappements à contact permanent à recul ou sans recul et des échappements libres.

Parmi les nombreux échappements d'horloges, seuls quelques types utilisés pour la plupart dans les horloges précises des observatoires ou des laboratoires scientifiques seront décrits ici.

Nous avons déjà parlé, dans le chapitre IX, de l'échappement à roue de rencontre très répandu dans les horloges anciennes. Dans les montres, la verge qui porte les palettes soutient aussi le balancier ou le foliot ; son axe coïncide avec celui du balancier. Dans les horloges à pendule, la verge horizontale porte la fourchette qui agit sur le pendule pour entretenir son mouvement.

L'échappement de Brocot. — L'échappement inventé par Achille Brocot (1817-1878) est à faible recul ; il ressemble à un échappement à ancre dont les palettes seraient des rouleaux demi-cylindriques (fig. 408).

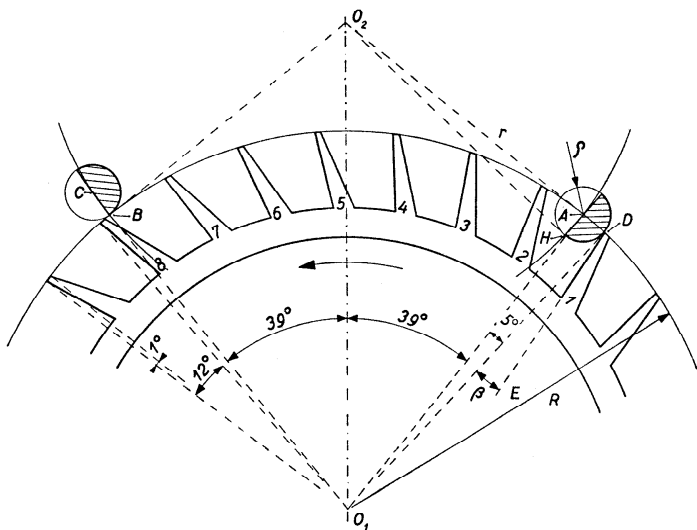


Fig. 408

La roue d'échappement a des dents pointues ; nous appellerons « ancre » la pièce qui porte les rouleaux.

Dans les échappements d'horloges plus ou moins apparentés à l'échappement à ancre des montres (échappement à recul de Brocot, échappement de Graham), la roue a généralement plus de 15 ou 18 dents et l'emprise de l'ancre est plus grande que $2\frac{1}{2}$ ou $3\frac{1}{2}$ pas de la roue. Ces grandeurs

— nombre de dents et emprise de l'ancre — varient d'une construction à l'autre ; elles déterminent l'angle α dont dépend la distance entre les centres de la roue et de l'ancre.

En fonction du rayon R de la roue, la distance O_1O_2 vaut :

$$O_1O_2 = \frac{R}{\cos \alpha}.$$

Cette distance est importante pour le constructeur qui, suivant les besoins, modifiera le nombre de dents de la roue ou l'emprise de l'ancre. Il n'est pas possible de choisir un autre nombre de dents pour la roue d'échappement sans tenir compte de ce changement dans le calcul des nombres de dents des mobiles du rouage.

Pour une roue de z dents, le pas angulaire est $\frac{360}{z}$ degrés ou $\frac{2\pi}{z}$ radians ; si l'ancre embrasse n fois le pas de la roue, l'angle α vaut en degrés :

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{360}{z} n.$$

Soient $z = 30$, $n = 6\frac{1}{2}$; le pas angulaire vaut $\frac{360}{30} = 12^\circ$, d'où $\alpha = 39^\circ$.

Le rayon R (fig. 408) de la roue étant connu, le centre O_2 de l'ancre est donné par les relations :

$$\sphericalangle O_2O_1A = \alpha = 39^\circ, \quad \sphericalangle O_1AO_2 = 90^\circ.$$

A est le centre d'un des rouleaux ; le centre B du rouleau de sortie est symétrique de A par rapport à O_1O_2 . A chaque alternance la roue tourne d'un angle égal au demi-pas angulaire ; cette rotation comprend l'impulsion et la chute. Admettons un angle de chute de 1° , l'angle d'impulsion sera de 5° et embrassera le rayon ρ du rouleau. Dessinons l'angle $AO_1D = 5^\circ$:

$$AD = \rho = 2 R \sin 2^\circ 30' = 0,087\,24 R.$$

Si la roue d'échappement est au repos sur le rouleau d'entrée A , la pointe de la dent 1 est en D ; en portant, à partir de O_1D , des angles de 12, 24, 36, ... degrés, nous aurons la position des pointes de toutes les dents de la roue.

Le devant DE de la dent 1 fait avec le rayon O_1D un angle β indispensable pour assurer le contact de la pointe de la dent et du rouleau ; β n'est pas un angle de tirage car, ici, il ne sert pas à assurer la position de l'ancre pendant l'arc supplémentaire, puisque l'ancre est obligée de suivre le mouvement du pendule.

Le dos de la dent est construit de manière que celle-ci reste solide et soit terminée par un petit plat peu visible qui doit à peine diminuer la sécurité que représente la chute.

Pour dessiner le rouleau B , considérons la dent 8 qui vient de décrire l'angle de chute après l'impulsion ; le rouleau est tangent au cercle (O_1, R) ; son centre C est sur l'arc de cercle de centre O_2 et de rayon $O_2B = O_2A = r$:

$$r = R \operatorname{tg} \alpha$$

et, dans notre cas :

$$r = R \operatorname{tg} 39^\circ = 0,809\,78\,R.$$

Pendant l'impulsion, l'ancre tourne d'un angle égal à AO_2H . Nous avons :

$$\operatorname{tg} AO_2H = \frac{\varrho}{r},$$

soit, avec les données admises :

$$\operatorname{tg} AO_2H = \frac{0,087\,24}{0,809\,78} = 0,107\,73,$$

d'où :

$$AO_2H \cong 6^\circ 10'.$$

A la fin de l'impulsion communiquée par la dent 8, la dent 1 décrit l'angle de chute et atteint le rouleau A dans la position représentée par la figure 408.

Le pendule décrit alors l'arc supplémentaire et oblige l'ancre à faire de même.

Dans la figure 409, nous représentons la position extrême A_1 atteinte par le centre du rouleau à la fin de l'arc supplémentaire ascendant. Le devant de la dent passe de DE en D_1E_1 ; la roue tourne de l'angle DO_1D_1 dans le sens de la flèche 1.

Pendant l'arc supplémentaire descendant (rotation de l'ancre dans le sens de la flèche 3), le devant de la dent passe de D_1E_1 en DE ; celle-ci recule.

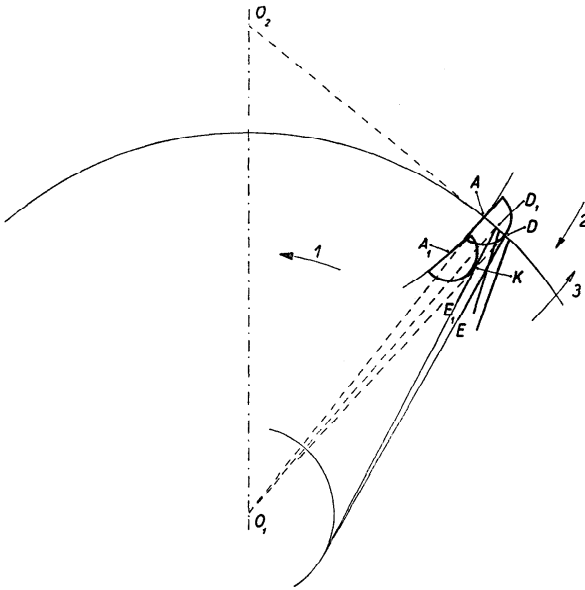


Fig. 409

L'échappement de Brocot est un échappement à recul, mais à recul très modéré.

Pendant l'arc supplémentaire, le point de contact entre la paroi antérieure de la dent et le rouleau se déplace de D_1 en K ou de K en D_1 .

Liaison du pendule et de l'échappement. — L'ancre de l'échappement de Brocot porte, fixée à son arbre AA (fig. 410), la *fourchette*; celle-ci est terminée par deux becs CC entre lesquels passe la tige T du pendule.

Pour que le point de contact entre les becs C et la tige T ne se déplace pas, il faut que les axes de rotation de l'ancre et du pendule coïncident. Si le pendule était suspendu à un arbre tournant dans des coussinets, cette condition serait facile à remplir. Mais ce mode de suspension n'est pas employé, car il provoque un frottement trop considérable dans les paliers. Lorsque le pendule est porté par un couteau ou par un ressort, l'axe de rotation n'est pas déterminé de façon stricte : sa position dépend du rayon de l'arête du couteau, de la longueur et de l'épaisseur des lames de suspension et de l'amplitude. Ainsi, dans tous les cas, l'arc décrit par le point de contact entre C et T n'est pas constamment le même ; qu'il s'agisse du point situé sur C ou de celui qui est sur T , il y aura un glissement de la tige du pendule dans l'entrée de la fourchette. Pour que ce glisse-

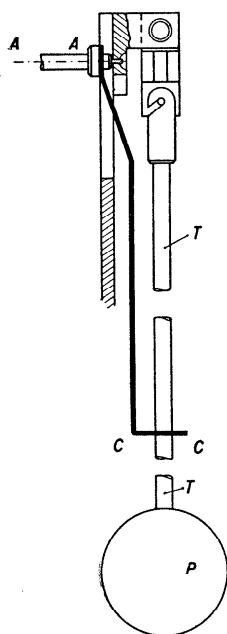


Fig. 410

ment soit possible, il faut réserver un peu de jeu ; celui-ci peut varier avec la température, mais ne doit jamais disparaître. L'entrée de la fourchette doit être bien polie et légèrement graissée.

Pour que les réactions sur la suspension provoquées par la pression de la fourchette sur la tige du pendule soient nulles, il faudrait que le point où se donne l'impulsion de la fourchette soit à la hauteur du centre d'oscillation défini plus loin. Cette condition ne pourrait être réalisée qu'avec une longue fourchette qui augmenterait considérablement le moment d'inertie de l'ancrer. On se contente d'une fourchette relativement courte. Du reste, la suspension subit de toutes façons une pression considérable provoquée principalement par le poids du pendule.

Comme l'amplitude du pendule reste faible, les angles parcourus par l'ancrer et par le pendule sont égaux, à peu de choses près.

L'angle d'impulsion de l'ancrer dans l'échappement de Brocot. — La construction d'un échappement de Brocot ne se fait pas comme celle de l'échappement à ancre des montres à partir de l'angle d'impulsion ou de l'angle de levée de l'ancrer. On se donne l'angle de chute qui détermine le rayon ϱ du rouleau ; l'angle d'impulsion de l'ancrer est alors défini.

Soient ε l'angle de chute, p_a le pas angulaire de la roue, i l'angle d'impulsion de l'ancrer, n le nombre de pas embrassés par l'ancrer. On a (fig. 408) :

$$\operatorname{tg} AO_2H = \operatorname{tg} i = \frac{\varrho}{r}.$$

Or :

$$\varrho = 2R \sin \frac{1}{2} \left(\frac{p_a}{2} - \varepsilon \right)$$

et

$$r = R \operatorname{tg} \alpha = R \operatorname{tg} \frac{1}{2} (p_a \cdot n),$$

donc :

$$\operatorname{tg} i = \frac{2 \sin \frac{1}{2} \left(\frac{p_a}{2} - \varepsilon \right)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (p_a \cdot n)} . \quad (441)$$

On diminue i en accroissant l'emprise de l'ancre ou le pas angulaire ; on peut aussi réduire i en augmentant la chute.

Comme l'angle d'impulsion de l'ancre est égal à l'angle d'impulsion du pendule, l'échappement ne peut fonctionner que si :

$$\varphi_0 > \frac{i}{2}$$

ou si :

$$\varphi_0 = \frac{i}{2} + s ,$$

s désignant l'angle supplémentaire qui ne peut pas être réduit à zéro.

Transmission de la force dans l'échappement de Brocot. — Considérons la roue et l'ancre pendant l'impulsion : la pointe de la dent de la roue est en D (fig. 411) et tend à se déplacer dans le sens de la flèche 1. La pression P de la dent contre le rouleau est dirigée suivant le rayon DA_1 .

La pression normale P est une composante de la force F tangente au cercle (O_1, R) en D ; appelons γ l'angle fait par A_1D avec la partie plane du rouleau. Nous pouvons admettre que, pendant l'impulsion, F passe par O_2 ; soit γ l'angle de F avec la force Q tangente au rouleau ; nous avons :

$$P = F \sin \gamma .$$

Or, γ varie de 90° (position de repos) à 0° à la fin de l'impulsion. La pression normale P varie donc notablement pendant l'impulsion, ce qui constitue un des inconvénients de l'échappement de Brocot.

Ce qui importe ce n'est pas la valeur de P , mais celle de son moment par rapport à O_2 . Lorsque P a sa plus grande valeur, son moment est à peu près nul, puisque AD (fig. 408) passe très près de O_2 . Si M_1 désigne le moment de la force motrice par rapport à O_1 , l'équation d'équilibre de la roue est :

$$M_1 - P \cdot O_1B - P\varphi O_1C = 0 ;$$

celle de l'ancre est :

$$M_2 - P \cdot O_2E + P\varphi \cdot O_2H = 0 .$$

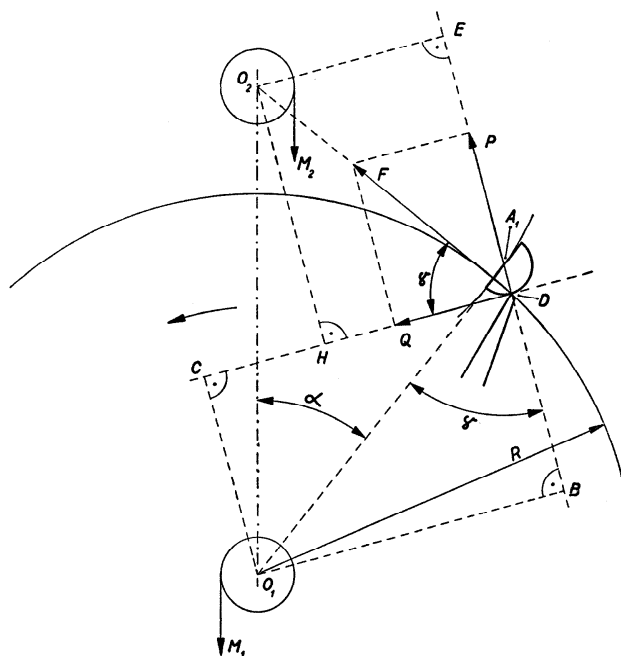


Fig. 411

Nous pouvons poser, sans commettre d'erreur appréciable :

$$O_1B = R \sin \gamma, \quad O_1C = R \cos \gamma, \quad O_2E = r \cos \gamma, \quad O_2H = r \sin \gamma.$$

Compte tenu de ces relations, nous pouvons tirer des équations d'équilibre :

$$M_2 = M_1 \frac{r}{R} \frac{1 - \varphi \operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \gamma + \varphi}. \quad (442)$$

Puisque l'angle γ varie de 90° à 0° , le moment M_2 varie aussi pendant l'impulsion. Cependant, il ne faut pas oublier que la formule (442) est approximative.

Malgré la grande variabilité du moment de la force transmise, l'échappement de Brocot présente des avantages qui en font un échappement souvent utilisé dans les horloges dont on ne demande pas une grande précision : il est robuste et facile à construire ; son rendement peut être amélioré en diminuant le coefficient de frottement φ (en faisant les rou-

leaux en rubis par exemple). En modifiant la position de la surface plane des rouleaux, on règle l'angle de chute.

Lorsque l'ancre embrasse un grand nombre de pas de la roue, ses bras sont longs et son moment d'inertie considérable.

L'échappement de Graham. — L'échappement de Graham ressemble lui aussi à l'échappement à ancre des montres. En ne considérant que la roue et l'ancre, on peut dire qu'il est un échappement à ancre à dents pointues dans lequel les surfaces de repos des palettes sont cylindriques et ont pour axe l'axe de rotation de l'ancre. De ce fait, le mouvement de l'ancre ne provoque aucun recul de la roue d'échappement pendant que le pendule décrit l'arc supplémentaire ou l'angle de dégagement ; c'est donc un échappement à contact permanent sans recul.

Comme dans l'échappement de Brocot, la liaison entre l'ancre et le pendule est faite par la fourchette ; le pendule n'est jamais libre.

Le nombre des dents de la roue est arbitraire. Lorsque cet échappement est utilisé dans une horloge à seconde, on donne généralement trente dents à la roue ; ainsi la roue d'échappement fait un tour en une minute, et son arbre peut porter l'aiguille des secondes.

L'emprise de l'ancre est variable ; elle est souvent de $7\frac{1}{2}$ pas angulaires de la roue. L'échappement peut être construit à repos équidistants, à palettes équidistantes ou d'après un tracé intermédiaire.

Pour le constructeur, il est important que les palettes soient de même largeur ; elles peuvent alors être faites simultanément et découpées dans un même anneau circulaire. Le tracé à palettes équidistantes est le plus courant.

L'angle de la roue correspondant à une emprise n de l'ancre est :

$$2\alpha = \frac{360}{z} \cdot n,$$

soit, pour $n = 7\frac{1}{2}$ et $z = 30$:

$$\alpha = 45^\circ.$$

Le tracé de l'échappement de Graham est suffisamment expliqué par la figure 412.

Le calcul du moment de la force transmise de la roue à l'ancre n'offre aucune difficulté ; il est semblable à celui qui a été fait à propos de l'échappement à ancre des montres.

La transmission de la force est plus régulière dans l'échappement de Graham que dans l'échappement de Brocot.

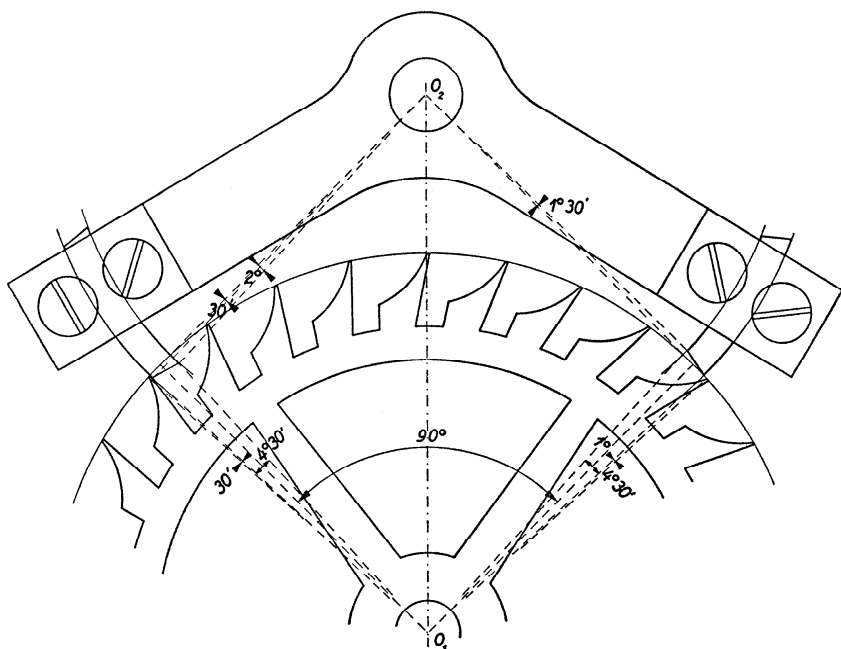


Fig. 412

La construction est simple ; la roue et le corps de l'ancre sont en laiton durci, les palettes en acier trempé et poli ou en pierre dure. S'il s'agit d'un échappement destiné à une horloge de précision, le frottement doit être réduit autant que possible ; on y parvient par différents artifices : graissage, poli spéculaire des surfaces de repos et des pivots, adoucissage des pointes des dents de la roue.

L'échappement de Graham a donné d'excellents résultats ; on lui apporte parfois certaines modifications ; ainsi, on utilise maintenant des palettes mobiles le long de rainures fraisées dans le corps de l'ancre ; ce dispositif permet de régler sans peine la force de l'échappement. L'ancre est parfois en deux parties ; ses bras sont reliés l'un à l'autre par une vis qui permet de les écarter ou de les rapprocher l'un de l'autre.

L'échappement de Reid. — L'échappement de Reid se distingue des échappements que nous venons de décrire par l'absence de fourchette et par l'élasticité des bras de l'ancre.

C'est un échappement à dents pointues (fig. 413). L'angle α qui sert

à déterminer la position du centre de l'ancre est égal à $\frac{1}{2} \frac{360^\circ}{z} \cdot n$; pour une roue de 30 dents et $n = 10\frac{1}{2}$, $\alpha = 63^\circ$. Les bras B_1 et B_2 de l'ancre sont amincis en E_1 et E_2 , où leur épaisseur est réduite à environ 0,05 mm; l'axe de flexion des ressorts est en O_2 , point que nous considérons comme le centre de l'ancre. La position de O_2 est déterminée par le triangle O_1O_2A dont nous connaissons $O_1A = R$, $\angle O_2O_1A = \alpha$ et $\angle O_1AO_2 = 90^\circ$. Le point O_2 doit se trouver également sur l'axe de flexion du ressort de suspension. Le support S des bras est solidaire de la partie mobile de la suspension du pendule. Les bras de l'ancre portent des plans d'impulsion C_1 et C_2 et des becs de repos R_1 et R_2 ; ils portent parfois des plots placés face aux butées F_1F_2 ; les plans d'impulsion, les becs de repos et les plots sont généralement en saphir. Le support et les bras ne sont pas liés d'une façon rigide; ils peuvent se déplacer légèrement l'un par rapport à l'autre. Les butées F_1 et F_2 , munies de vis de réglage, sont fixées sur S .

Supposons que la dent 1 soit appuyée sur le repos R_1 ; la roue est arrêtée; le bras B_1 de l'ancre est immobilisé. Le support S se meut avec le pendule dans le sens de la flèche 1; bientôt la butée F_1 atteint le bras B_1 et l'écarte, libérant ainsi la roue d'échappement qui se met à tourner selon la flèche 3. Le ressort E_1 est armé et s'oppose au mouvement du pendule.

La dent 11 tombe sur le plan d'impulsion C_2 , arme un peu le ressort E_2 , puis tombe sur le bec R_2 ; la roue d'échappement est arrêtée. F_2 quitte

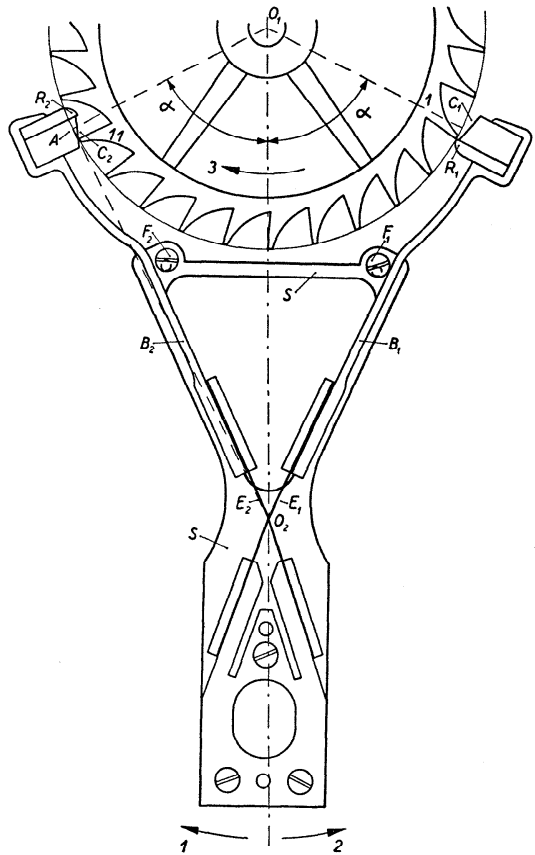


Fig. 413

le bras B_2 ; le ressort E_1 s'oppose donc au mouvement du pendule qui décrit l'arc supplémentaire ascendant. Lorsque le pendule revient vers sa position d'équilibre (selon la flèche 2), le bras B_1 agit sur le pendule et accélère son mouvement. Dès que B_1 atteint F_1 , la butée F_2 atteint le bras B_2 et dégage la roue.

Les ressorts E_1 et E_2 sont armés en deux temps : d'abord par l'action de la roue sur les plans d'impulsion, puis par les butées pendant l'arc supplémentaire ascendant du pendule ; ils restituent au pendule l'énergie emmagasinée pendant l'arc supplémentaire descendant. Le pendule dépense une partie de son énergie à armer les ressorts, mais ceux-ci lui restituent plus d'énergie qu'il ne leur en a donné ; la différence est fournie par la roue d'échappement, au moment où elle agit sur les plans d'impulsion C_1 et C_2 .

Les deux actions qui accompagnent le parcours des arcs supplémentaires — résistance du bras-ressort pendant l'arc ascendant et impulsion du même bras pendant l'arc descendant — diminuent la période du pendule. Leur effet dépend du degré d'armage des ressorts, par conséquent de l'amplitude du pendule ; il entraîne donc un défaut d'isochronisme. Mais ici l'amplitude varie peu, car les variations de la force motrice dues à la détente du ressort-moteur — quand il en existe un — et aux imperfections des engrenages n'ont aucune influence sur la tension des ressorts constamment armés d'un même angle par les dents de la roue d'échappement.

L'impulsion que reçoit le pendule est indépendante des variations de la force motrice transmise par le rouage. La période du pendule est cependant influencée par cette force motrice qui s'oppose au dégagement de la roue d'échappement. Cette force doit donc être réglée de façon à être exactement suffisante pour armer les bras-ressorts pendant l'action des dents sur les plans d'impulsion C_1 et C_2 . Augmenter outre mesure la force motrice serait rendre le dégagement plus difficile, renforcer un facteur qui varie d'autant moins qu'il est plus petit.

L'échappement de Reid donne d'excellents résultats dans les horloges astronomiques auxquelles il est appliqué.

La suppression de la fourchette est avantageuse ; le frottement entre la fourchette et la tige du pendule disparaît ainsi que les risques de torsion des lames de suspension et les chocs qui se produisent, à cause du jeu, lorsque le mouvement du pendule change de sens.

L'huile joue dans l'échappement de Reid un rôle très effacé, le graissage de la fourchette et des pivots de la tige d'ancre étant automatiquement supprimé.

Les inconvénients de la fourchette ont peu d'importance dans les horloges ordinaires, mais ils prennent une valeur considérable dans les

horloges de précision où les variations de la marche diurne doivent rester de quelques centièmes de seconde.

Leroy a perfectionné l'échappement de Reid en plaçant la roue d'échappement et les bras-ressorts de l'ancre dans le plan d'oscillation du pendule.

Influence des échappements de Brocot, de Graham et de Reid sur la période du pendule. — Dans tous les échappements, la roue doit être libérée à intervalles plus ou moins réguliers ; à ce moment, et sous l'influence de la force motrice, elle agit sur l'organe réglant ou sur une pièce intermédiaire chargée d'actionner le pendule ou le balancier.

Dans les *échappements de Brocot et de Graham*, la roue agit sur une ancre solidaire d'une fourchette chargée de donner les impulsions d'entretien.

Le dégagement se fait pendant la moitié descendante de l'alternance, tandis que l'impulsion qui suit est inégalement répartie des deux côtés de la position d'équilibre.

Ces échappements étant à contact permanent, une résistance agit pendant que le pendule parcourt les arcs supplémentaires aux fonctions de l'échappement.

Nous avons représenté dans la figure 414 les variations de la période pour ces deux échappements. OA est la position d'équilibre du pendule ; OE_1 et OE_2 sont les positions extrêmes. L'angle AOE_1 , égal à l'angle AOE_2 , est l'amplitude φ_0 qui est beaucoup plus petite pour le pendule des horloges que pour le balancier des montres (pour la clarté du dessin tous les angles sont exagérés dans la figure). L'amplitude est d'autant plus petite que la précision requise est plus grande ; elle ne dépasse pas 2° dans les horloges de précision.

Pendant le parcours de l'angle E_1OB (angle supplémentaire descendant), nous avons une augmentation de la période, due au frottement de la dent de la roue contre la surface de repos de la palette ou du rouleau ;

pendant le parcours de l'angle BOC (dégagement ici plutôt théorique), une augmentation de la période, due également au frottement de la dent contre la palette ou le rouleau ;

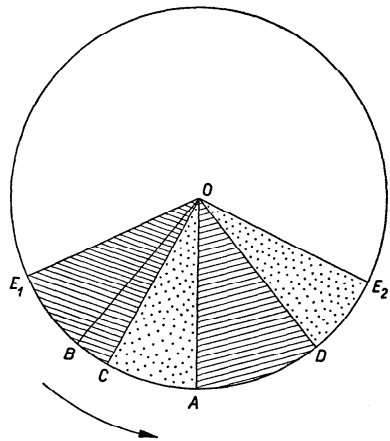


Fig. 414

pendant le parcours de l'angle COD (impulsion) inégalement réparti des deux côtés de OA , une diminution de la période avant et une augmentation de la période après le point mort ;

pendant le parcours DOE_2 (angle supplémentaire ascendant), une diminution de la période.

Le retard dû au parcours E_1OC est en général compensé par l'avance produite pendant le parcours DOE_2 .

L'effet global des échappements de Brocot et de Graham est une augmentation de la période (retard), d'autant plus grande que l'amplitude du pendule est plus faible.

Ces échappements créent un défaut d'isochronisme.

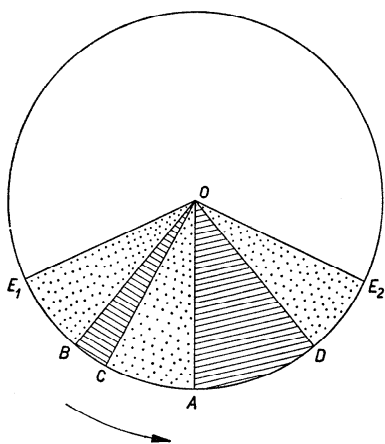


Fig. 415

Dans l'échappement de Reid, l'alternance se compose des parties suivantes (fig. 415) :

l'angle E_1OB , décrit pendant que le bras-ressort B_2 accélère le mouvement du pendule et diminue la période ;

l'angle de dégagement BOC pendant lequel la période est augmentée ;

l'angle d'impulsion COD ; le bras-ressort B_1 est armé jusqu'au moment où la dent 11 atteint le bec de repos ; il augmente la période avant le point mort et la diminue ensuite ;

l'angle supplémentaire DOE_2 ; le bras-ressort B_1 est armé davantage, la période du pendule diminue.

Contrairement aux échappements de Brocot et de Graham, celui de Reid réduit d'autant plus la période du pendule que l'amplitude est plus grande. *Il crée un défaut d'isochronisme qui atténue celui dû à l'amplitude.*

Les échappements à force ou à impulsions constantes. — Nous avons parlé de l'échappement de Reid comme s'il était à force ou à impulsions constantes. Cependant les impulsions ne sont d'égale intensité que si diverses conditions sont remplies : il faut non seulement que l'amplitude des oscillations du pendule reste la même, mais encore que l'élasticité des bras-ressorts et du ressort de suspension du pendule soit constante.

Si l'amplitude des oscillations ne varie pas beaucoup, puisque les impulsions ne dépendent plus de la force motrice agissant sur la roue d'échappement, la résistance au dégagement augmente avec la force

motrice ; or, les variations de celle-ci ont une petite influence sur l'amplitude du pendule.

La force élastique des bras-ressorts et de la suspension dépend de la flexion subie, donc de l'amplitude, ainsi que de la température qui influence notablement le module d'Young.

Si la température s'élève, la force élastique des bras-ressorts diminue ; pour un angle d'armage donné, les impulsions sont plus faibles. D'autre part le ressort de suspension est aussi affaibli ; ces deux actions ont des effets contraires sur l'amplitude et se compensent plus ou moins ; l'amplitude des oscillations du pendule est peu modifiée ; ce résultat est très important pour la bonne marche de l'horloge.

L'échappement de Reid rentre donc dans la catégorie des dispositifs à force constante, définis au chapitre IX. Il a bien une force-relais remontée à chaque alternance en partie par la roue d'échappement, c'est-à-dire par la force motrice de l'horloge. Au point de vue technique, il présente cependant deux particularités : le bras-ressort n'est pas un ressort-spiral et il agit directement sur le pendule et non sur la roue d'échappement.

L'organe qui donne l'impulsion au pendule peut être un poids remonté périodiquement par la roue d'échappement ; ce dispositif constitue alors ce que les Anglais désignent sous le nom d'« échappement de gravité ». Celui qui fut imaginé par Denison (1816-1905) pour l'horloge de Westminster est représenté par la figure 416. Deux leviers d'impulsion — en somme deux pendules auxiliaires — *A* et *B* portent les chevilles *c* et *d* qui agissent sur les têtes de deux vis fixées à la tige *P* du pendule. La roue d'échappement *R* est une étoile à trois bras, 1, 2 et 3, qui portent les chevilles 4, 5 et 6, capables d'agir sur les becs *a* et *b* des leviers *A* et *B*. Les bras 1, 2 et 3 peuvent être arrêtés par les butées *s* et *e* solidaires des bras *A* et *B*. Supposons le pendule oscillant vers la droite ; *B*, entraîné par la vis *d*, quitte l'appui *n* ; il libère la roue d'échappement qui se met à tourner dans le sens de la flèche. La cheville 4 rencontre le bec *a* et soulève le levier *A* qui quitte l'appui *u* ; le bras 2 de l'étoile heurte le plan de repos de la butée *s* et la roue *R* est arrêtée. Le bras *A* est maintenu levé par la cheville 4.

Poussé par le levier *B*, le pendule revient vers la gauche jusqu'au

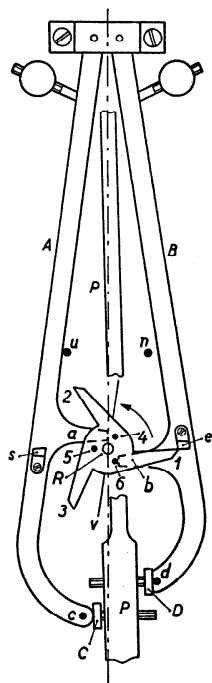


Fig. 416

moment où B est arrêté par l'appui n . Le pendule continue son mouvement pendant lequel la vis c soulève le levier A et dégage la roue d'échappement. C'est alors la cheville 5 qui agit sur le bec b , soulève le levier B et le détache de n .

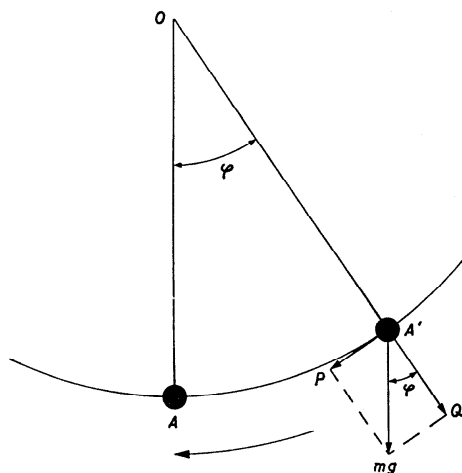


Fig. 417

Le principe de l'échappement de Denison a reçu diverses applications : récemment encore, dans l'échappement de Galm, où les pendules auxiliaires sont remplacés par les deux bras de l'ancre, ce qui permet de faire coïncider l'axe de rotation des pendules auxiliaires avec celui du pendule principal.

L'échappement de Riefler. — Riefler donne au pendule son impulsion en modifiant périodiquement la position d'équilibre du ressort de suspension.

Considérons (fig. 417) une masse m concentrée en A et attachée à un fil mobile autour de O ; ce dispositif constitue un pendule au repos. Déplacé en OA' , le poids mg peut être décomposé en deux forces dont l'une, P , est tangente au cercle décrit par A et l'autre, Q , est dirigée

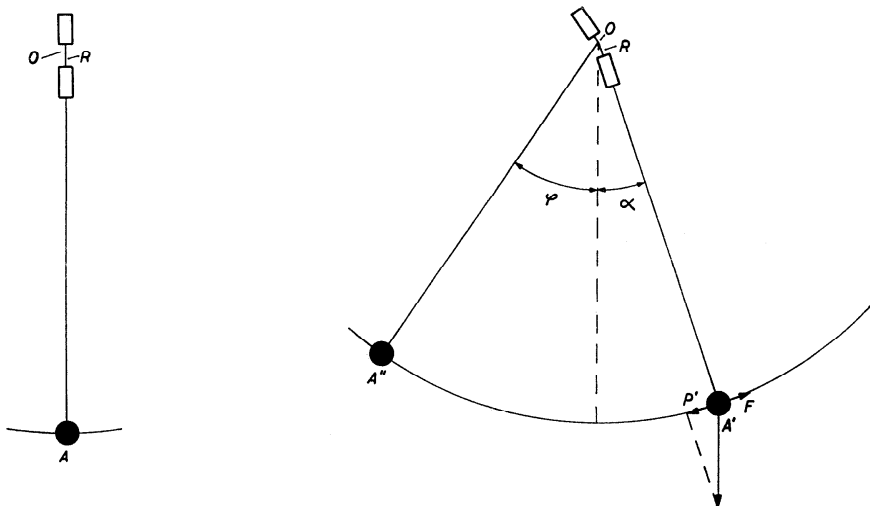


Fig. 418

vers O ; cette dernière composante tend le fil OA' , tandis que P fait tourner le pendule dans le sens de la flèche.

Soit (fig. 418) OA un pendule suspendu à un ressort R ; fléchissons le ressort de suspension ; celui-ci exerce sur le pendule une force F qui tend à faire cesser la flexion. Le pendule est en équilibre dès que $P' = mg \sin \alpha = F$. Lorsque le pendule est en OA'' , l'élongation ne vaut plus φ , mais $\varphi + \alpha$. Augmenter l'élongation, c'est accroître la force de rappel, c'est donner une impulsion au pendule.

Riefler munit la partie supérieure M de la suspension (fig. 420) de couteaux reposant sur des surfaces dures, bien polies et fixes P (en agathe, onyx, etc.). Les ressorts i de suspension du pendule sont encastrés dans la pièce M qui est solidaire de l'ancre A . L'arête des couteaux coïncide avec l'axe de flexion des ressorts i . La roue d'échappement est double ; l'une de ses parties, R , porte les plans de repos r (fig. 419 et 420), l'autre, H , les plans d'impulsion h .

Lorsque le pendule oscille dans le sens de la flèche (fig. 419), la palette S' se rapproche de h , tandis que S s'écarte de la roue R qui est libérée en même temps que H , puisque les roues sont solidaires. Le levier h repousse S' et fait tourner l'ancre dans le sens contraire à celui de la flèche ; la tension du ressort de suspension est ainsi accrue ; le pendule reçoit une impulsion. La figure 420 donne une vue de la manière dont les ressorts de suspension i sont reliés au pendule et à l'ancre.

La flexion des ressorts de suspension est toujours la même ; l'amplitude du pendule ne varie qu'en fonction du dégagement et de la température. L'échappement de Riefler fournit d'excellents résultats dans les horloges de précision.

L'échappement de Strasser. — Strasser a simplifié l'échappement de Riefler tout en conservant le mode d'entretien du mouvement du pendule.

La suspension est formée de trois pièces (fig. 421) réunies par des lames de ressort. A est une pièce fixe dont la goupille O repose sur le support S du pendule ; elle est reliée par les lames i à la pièce B ; celle-ci porte le crochet C auquel est suspendu le pendule P . Les lames K relient B à D qui porte la tige E destinée à être déplacée par la fourchette F (fig. 422). Strasser parvient ainsi à supprimer les couteaux de la suspension Riefler et à simplifier la roue d'échappement qui n'est plus double. Roue et ancre rappellent la construction de Graham, avec cette différence que les plans de repos des palettes de l'ancre sont atteints immédiatement après l'impulsion.

La dent 1 est appuyée sur le repos de la palette d'entrée e ; la roue est immobile. A un moment donné, le pendule entraîne la fourchette de gauche à droite ; la palette e est levée et la roue est libérée. La dent 2

Fig. 419

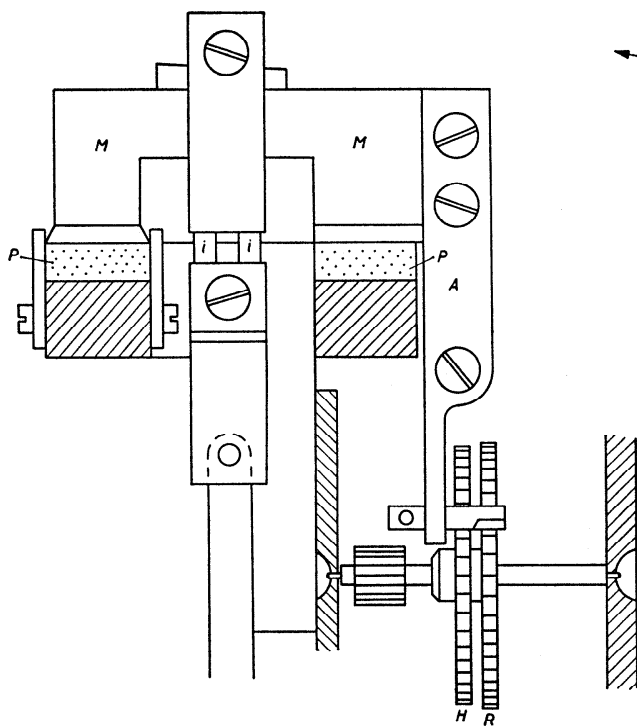
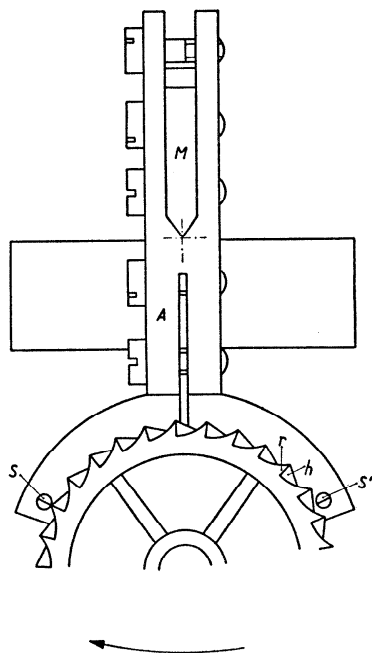


Fig. 420

Fig. 421

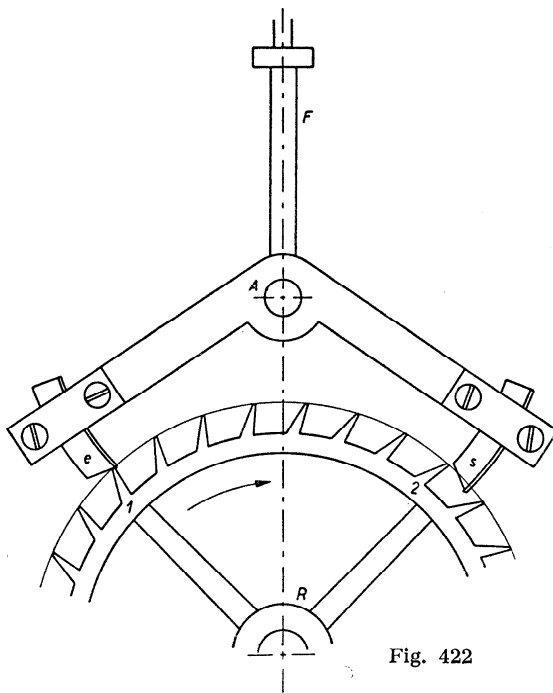
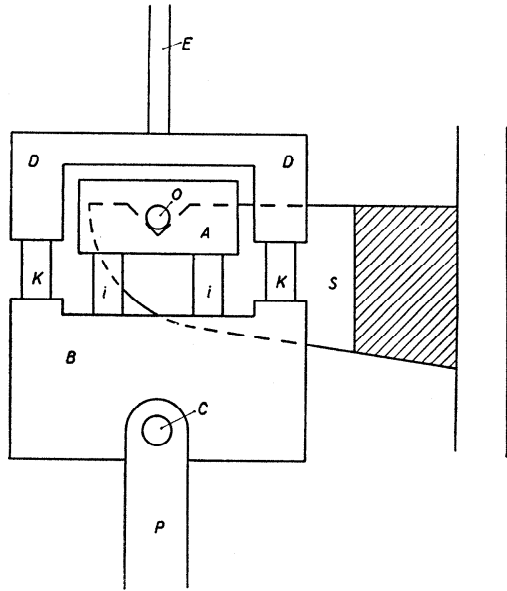


Fig. 422

tombe sur le plan d'impulsion de la palette s qui est soulevée et entraîne F de droite à gauche. Le mouvement de F provoque celui de la tige E (fig. 421), c'est-à-dire la flexion des ressorts K dont la réaction entretient le mouvement du pendule.

Influence des échappements de Riefler et de Strasser sur la période du pendule. — En décomposant l'alternance du pendule comme nous l'avons fait pour les échappements précédents, nous verrons que les ressorts de la suspension entravent le mouvement dans la période supplémentaire ascendante et le favorisent dans la même période descendante; il en résulte une diminution notable de la période, c'est-à-dire une avance de l'horloge. Ce phénomène croît avec l'amplitude. *Les échappements de Riefler et de Strasser créent un défaut d'isochronisme qui s'oppose au défaut dû à l'amplitude du pendule.*

Ces défauts d'isochronisme sont ici peu importants parce que l'impulsion est à peu de chose près constante, de sorte que l'amplitude du pendule varie peu.

En effet, sauf pendant le dégagement, l'impulsion est indépendante des fluctuations de la force motrice et de l'état des huiles; elle est par contre fonction de la température dont les variations modifient la force élastique des ressorts. Mais ces échappements sont utilisés dans des horloges de précision qui sont en général soustraites dans la mesure du possible aux variations de la température.

Dans ces échappements, le pendule est parfois considéré comme libre; or, par sa suspension, il est en contact indirect, mais constant avec la fourchette.

Les échappements de Riefler et de Strasser donnent d'excellents résultats de marche, grâce aux très faibles variations de l'amplitude du pendule et bien que l'impulsion (par déplacement de la position d'équilibre) ne se fasse pas dans les conditions que nous avons déduites plus haut (p. 143).

La période du pendule physique ou pendule composé. — Un corps mobile autour d'un axe qui ne passe pas par son centre de gravité est un *pendule physique* appelé aussi *pendule composé*.

Soit A un corps de masse m , mobile autour d'un axe passant par O (fig. 423); appelons G le centre de gravité et OG l'axe du pendule.

Ecarté de la position dans laquelle OG est vertical, le pendule tend à reprendre cette position de repos (ou d'équilibre) sous l'influence de la gravité; il va exécuter une série d'oscillations d'amplitude décroissante autour de la position d'équilibre.

La position OG est déterminée par l'écart angulaire φ mesuré à partir

de la position de repos ; φ est l'*élongation* du pendule ; l'élongation maximum φ_0 est l'*amplitude*. Celle-ci est une caractéristique importante pour le pendule des horloges ; le mouvement d'horlogerie a pour fonction d'entretenir le mouvement du pendule de sorte que, théoriquement du moins, toutes les oscillations aient la même amplitude φ_0 .

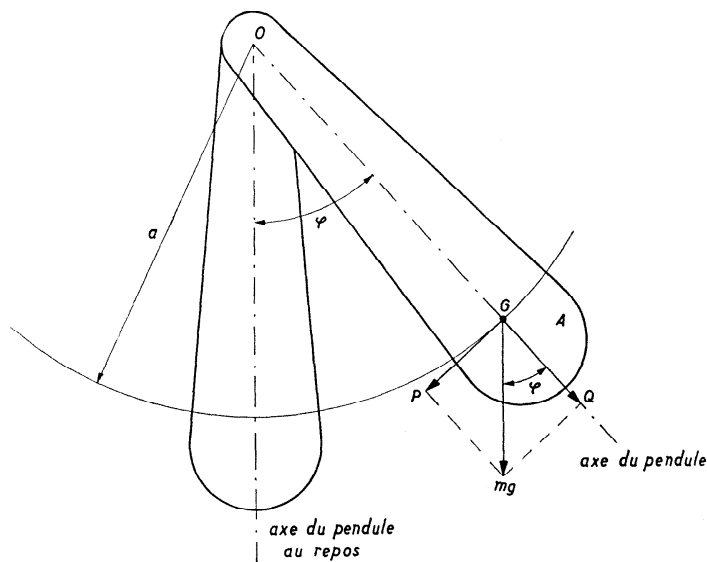


Fig. 423

Les forces de pesanteur agissant sur tous les éléments du corps A ont comme résultante une force égale au poids mg du corps, dirigée verticalement de haut en bas et appliquée au centre de gravité G . La grandeur g est l'accélération de la pesanteur ; elle varie d'un point à un autre de la Terre, suivant la latitude, l'altitude et la répartition des masses dans le globe terrestre.

Décomposons la force mg en une force P tangente au cercle (O, OG) et en une force Q dirigée suivant OG :

$$P = mg \sin \varphi, \quad Q = mg \cos \varphi.$$

L'équation du mouvement pendulaire est :

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + mga \sin \varphi = 0, \quad (443)$$

si nous désignons par a la distance OG et par I le moment d'inertie de A par rapport à l'axe de rotation O .

La force de rappel P n'est pas proportionnelle à l'élongation φ , donc *les oscillations du pendule ne sont pas isochrones*.

L'équation (443) rappelle l'équation (122) du chapitre VII.

Introduisons la vitesse angulaire ω :

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

L'équation (443) devient :

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{mga}{I} \sin \varphi,$$

soit :

$$d\omega = -\frac{mga}{I} \sin \varphi \, dt = -\frac{mga}{I} \sin \varphi \frac{d\varphi}{\omega}$$

ou

$$\omega d\omega = -\frac{mga}{I} \sin \varphi d\varphi.$$

Posons, pour simplifier l'écriture :

$$\frac{ma}{I} = \frac{1}{l}; \quad (444)$$

nous obtiendrons :

$$\omega d\omega = -\frac{g}{l} \sin \varphi \, d\varphi.$$

La quantité l est constante pour un pendule donné ; l'équation (444) indique que l est une longueur. Intégrons :

$$\frac{1}{2} \omega^2 = \frac{g}{l} \cos \varphi + C.$$

La constante C est déterminée par la condition que $\omega = 0$, pour $\varphi = \varphi_0$, d'où :

$$0 = \frac{g}{l} \cos \varphi_0 + C$$

et

$$C = -\frac{g}{l} \cos \varphi_0.$$

Il viendra donc :

$$\frac{1}{2} \omega^2 = \frac{g}{l} (\cos \varphi - \cos \varphi_0),$$

d'où :

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{l} (\cos \varphi - \cos \varphi_0)}. \quad (445)$$

La vitesse angulaire atteint sa valeur maximum Ω pour $\varphi = 0$:

$$\Omega = \sqrt{\frac{2g}{l} (1 - \cos \varphi_0)}$$

ou

$$\Omega = 2 \sqrt{\frac{g}{l}} \sin \frac{\varphi_0}{2}. \quad (446)$$

L'équation (445) peut s'écrire :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l} (\cos \varphi - \cos \varphi_0)},$$

soit :

$$dt = \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{2g}{l} (\cos \varphi - \cos \varphi_0)}}$$

ou

$$t = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}}. \quad (447)$$

Puisque :

$$\cos \varphi = 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2},$$

nous aurons :

$$\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0} = \sqrt{2 \left(\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right)}.$$

Comme $\varphi_0 > \varphi$, nous pouvons poser :

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \sin \frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin u, \quad (448)$$

d'où :

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 u}.$$

Différentions la formule (448) :

$$\frac{1}{2} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = \sin \frac{\varphi_0}{2} \cos u du ,$$

soit :

$$d\varphi = \frac{2 \sin \frac{\varphi_0}{2} \cos u du}{\cos \frac{\varphi}{2}} = \frac{2 \sin \frac{\varphi_0}{2} \cos u du}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 u}} .$$

L'équation (447) devient :

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{l}{2g}} \int \frac{2 \sin \frac{\varphi_0}{2} \cos u}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 u} \sqrt{2 \left(\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 u \right)}} du \\ &= \sqrt{\frac{l}{2g}} \int \frac{2 \sin \frac{\varphi_0}{2} \cos u}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 u} \cdot \sqrt{2 \sin \frac{\varphi_0}{2} \cos u}} du \\ &= \sqrt{\frac{l}{g}} \int \frac{du}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 u}} . \end{aligned}$$

Posons $\sin \frac{\varphi_0}{2} \sin u = x$; nous avons :

$$\frac{1}{\sqrt{l - \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 u}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} .$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^6 + \dots ,$$

donc :

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int \left[1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 u + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \sin^4 \frac{\varphi_0}{2} \sin^4 u + \dots \right] du .$$

Nous sommes conduits à la résolution d'intégrales de la forme :

$$\int \sin^n u \, du ,$$

dans lesquelles n est toujours un entier pair. Nous trouverons :

$$\int \sin^2 u \, du = -\frac{1}{2} \cos u \sin u + \frac{1}{2} u ,$$

$$\int \sin^4 u \, du = -\frac{1}{4} \cos u \sin^3 u - \frac{3}{8} \cos u \sin u + \frac{3}{8} u ;$$

l'intégrale générale aura pour valeur :

$$\int \sin^n u \, du = -\frac{1}{n} \cos u \sin^{n-1} u + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} u \, du .$$

Il est facile de voir que :

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \left[u + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \left(-\frac{1}{2} \cos u \sin u + \frac{1}{2} u \right) \right. \\ \left. + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \sin^4 \frac{\varphi_0}{2} \left(-\frac{1}{4} \cos u \sin^3 u - \frac{3}{8} \cos u \sin u + \frac{3}{8} u \right) + \dots \right] .$$

Remplaçons u par sa valeur tirée de (448) :

$$u = \arcsin \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2}} .$$

En intégrant entre les limites $\varphi = 0$ et $\varphi = \varphi_0$, nous aurons la durée du quart de l'oscillation, soit $\frac{T}{4}$. Or, pour $\varphi = 0$:

$$u = 0 , \quad \sin u = 0 , \quad \cos u = 1 ,$$

pour $\varphi = \varphi_0$:

$$u = \frac{\pi}{2} , \quad \sin u = 1 , \quad \cos u = 0 ,$$

donc :

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{l}{g}} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{3\pi}{16} \sin^4 \frac{\varphi_0}{2} + \dots \right]$$

ou

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\varphi_0}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \sin^6 \frac{\varphi_0}{2} + \dots \right].$$

Remplaçons enfin l par sa valeur tirée de (444) :

$$l = \frac{I}{ma}.$$

Nous obtiendrons :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mga}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\varphi_0}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \sin^6 \frac{\varphi_0}{2} + \dots \right]. \quad (449)$$

Au lieu de l'amplitude φ_0 , il est possible d'introduire la hauteur de chute h (fig. 424) du centre de gravité du pendule :

$$h = a - a \cos \varphi_0 = a (1 - \cos \varphi_0) = 2a \sin^2 \frac{\varphi_0}{2},$$

d'où :

$$\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} = \frac{h}{2a}.$$

La période T a pour valeur :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mga}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{h}{2a} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \left(\frac{h}{2a}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \left(\frac{h}{2a}\right)^3 + \dots \right]. \quad (450)$$

Le pendule des horloges a une amplitude d'autant plus petite que l'horloge est plus précise. Dans les horloges courantes, φ_0 peut atteindre 8 à 10° ; dans les horloges de précision φ_0 n'atteint jamais 2°.

Supposons que φ_0 soit égal à 5° :

$$\frac{\varphi_0}{2} = 2^\circ 30',$$

$$\sin \frac{\varphi_0}{2} = 0,043\,62 \dots,$$

$$\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} = 0,001\,902 \dots,$$

$$\sin^4 \frac{\varphi_0}{2} = 0,000\,003\,617 \dots$$

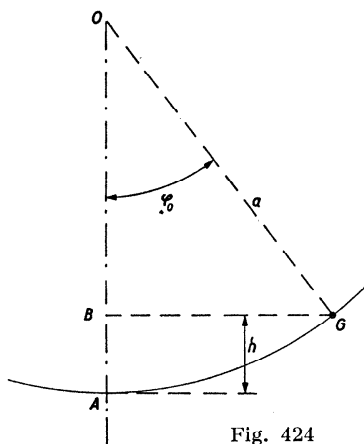


Fig. 424

En ne tenant compte que des deux premiers termes de la série, nous négligeons des termes dont la somme vaut près de :

$$0,000\,003\,617 \cdot \frac{9}{64} = 0,000\,000\,5 \dots,$$

tandis que le second terme vaut 0,000 475 ...

Pour de petites oscillations ($\varphi_0 < 5^\circ$), le calcul de la période d'après la formule :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mga}} \left[1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \right] \quad (451)$$

est entaché d'une erreur supportable s'il ne s'agit pas d'une horloge de précision.

En remplaçant $\sin \frac{\varphi_0}{2}$ par $\frac{\varphi_0}{2}$, nous commettons, pour $\varphi_0 = 5^\circ$, une erreur de 0,000 01 ... Cette erreur n'est pas négligeable. Nous n'aurons recours à la formule simplifiée, obtenue en posant :

$$\sin \frac{\varphi_0}{2} = \frac{\varphi_0}{2}$$

que si φ_0 ne dépasse pas 2° . Dans ce cas :

$$\frac{\varphi_0}{2} - \sin \frac{\varphi_0}{2} = 0,017\,453\,3 - 0,017\,452\,4 = 0,000\,000\,9$$

et

$$\left(\frac{\varphi_0}{2} \right)^2 - \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \cong 0,000\,000\,031.$$

La formule (451) devient :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mga}} \left[1 + \frac{\varphi_0^2}{16} \right]. \quad (452)$$

Enfin si nous considérons des oscillations infiniment petites, nous pourrions écrire :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mga}}, \quad (453)$$

formule qui exprime l'isochronisme des oscillations d'amplitude infiniment petite.

La formule (446) :

$$\Omega = 2 \sqrt{\frac{g}{l}} \sin \frac{\varphi_0}{2}$$

devient, en remplaçant l par sa valeur :

$$\Omega = 2 \sqrt{\frac{mga}{I}} \sin \frac{\varphi_0}{2}.$$

D'après (453) :

$$\sqrt{\frac{mga}{I}} = \frac{2\pi}{T_0},$$

T_0 désignant la période pour des oscillations infiniment petites. Donc :

$$\Omega = \frac{4\pi}{T_0} \sin \frac{\varphi_0}{2}. \quad (454)$$

Pour un pendule à secondes, $T_0 = 2$, et si $\varphi_0 = 2^\circ$, la vitesse angulaire maximum est égale à :

$$\Omega = 0,109\ 66 \text{ rad/s}.$$

La période du pendule mathématique ou pendule simple. — Imaginons que toute la masse du pendule soit concentrée au point G , centre de gravité du pendule (fig. 424) ; le fil auquel la masse m est attachée n'a donc aucune masse ; le pendule ainsi constitué est un *pendule mathématique* ou *pendule simple*. Un tel pendule n'est qu'un concept de l'esprit.

Reprenons la formule générale pour les oscillations d'amplitude infiniment petite :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mga}}.$$

Dans le pendule simple :

$$I = ma^2;$$

la période a donc pour valeur :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{ma^2}{mga}} = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Précédemment nous avons utilisé la grandeur l définie par :

$$l = \frac{I}{ma}.$$

Ici l devient :

$$l = \frac{ma^2}{ma} = a.$$

Les formules pour la période du pendule simple de longueur l sont, pour les oscillations d'amplitude infiniment petite :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (455)$$

pour les oscillations de faible amplitude ($\varphi_0 < 5^\circ$) :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} \left(1 + \frac{\varphi_0^2}{16} \right)}, \quad (456)$$

pour les oscillations de plus grande amplitude ($\varphi_0 > 5^\circ$) :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \sin^4 \frac{\varphi_0}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 \sin^6 \frac{\varphi_0}{2} + \dots \right]}. \quad (457)$$

Discussion de la formule (449). — Le moment d'inertie I qui figure dans la formule (449) est égal à :

$$I = m\rho^2,$$

ρ désignant le rayon de giration du pendule par rapport à l'axe de rotation ; on a :

$$\frac{I}{mga} = \frac{m\rho^2}{mga} = \frac{\rho^2}{ga}.$$

La formule (449) devient :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\rho^2}{ga} \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \sin^4 \frac{\varphi_0}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 \sin^6 \frac{\varphi_0}{2} + \dots \right]}. \quad (458)$$

La période du pendule physique dépend :

- 1° de la valeur de g , donc du lieu d'observation ;
- 2° de l'amplitude φ_0 ;
- 3° de la répartition de la masse qui détermine ρ et a .

La période ne dépend pas de la masse du pendule. Si dans les horloges précises, on utilise des pendules lourds, ce n'est pas pour influencer la période, mais pour augmenter l'énergie cinétique du pendule et, en même temps, son insensibilité aux perturbations.

La longueur réduite du pendule physique. — La période T est exprimée par :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mga}} f(\varphi_0), \quad (459)$$

si

$$f(\varphi_0) = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\varphi_0}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \sin^6 \frac{\varphi_0}{2} + \dots$$

Il existe un pendule mathématique ayant la même période :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} f(\varphi_0). \quad (460)$$

De (459) et (460), nous tirons :

$$\frac{l}{g} = \frac{I}{mga},$$

soit :

$$l = \frac{I}{ma}.$$

La longueur l est celle de la formule (444) ; l est donc la longueur du pendule mathématique ayant la même période que le pendule physique ; c'est la *longueur réduite du pendule physique*.

Reprenons la valeur de la période T_0 pour les oscillations d'amplitude infiniment petite :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

d'où nous tirons :

$$l = \frac{T_0^2 g}{4\pi^2}. \quad (461)$$

Il est possible d'employer le pendule pour déterminer l'accélération de la pesanteur en un endroit donné ; la formule (462) sert de base à une telle opération :

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T_0^2}. \quad (462)$$

Le centre d'oscillation du pendule. — Supposons que dans un pendule physique toute la masse soit concentrée en un point S et que cette concentration n'ait pas modifié la période. Il est clair que la distance OS (fig. 425) est égale à la longueur réduite du pendule.

S est appelé le *centre d'oscillation du pendule* ; c'est parmi les points du pendule qui ont conservé leur période propre celui qui est situé sur l'axe OG du pendule, G étant le centre de gravité :

$$OS = l, \quad OG = a, \quad GS = l - a.$$

Dans le pendule simple G et S coïncident.

Appelons I_o , I_g et I_s les moments d'inertie du pendule par rapport à des axes perpendiculaires au plan d'oscillation du pendule et passant par O , G ou S .

D'après (444) :

$$l = \frac{I}{ma} = \frac{I_o}{ma}. \quad (463)$$

Faisons osciller le pendule autour de l'axe passant par S . Cherchons la longueur réduite l' de ce nouveau pendule. Nous avons :

$$l' = \frac{I_s}{m(l-a)}.$$

Entre I_o et I_s existe une relation qui découle de la formule (201) :

$$I_o = I_g + ma^2;$$

en effet :

$$\begin{aligned} I_s &= I_g + m(l-a)^2 = I_g + ml^2 - 2mla + ma^2 \\ &= I_o - 2mla + ml^2 = I_o + ml(l-2a). \end{aligned}$$

Fig. 425

Mais, d'après (463), $ml = \frac{I_o}{a}$ et, par conséquent :

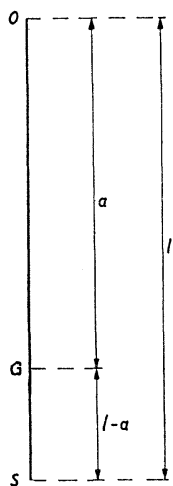
$$I_s = I_o + I_o \frac{l-2a}{a} = I_o \frac{l-a}{a}.$$

Donc :

$$l' = \frac{I_o \frac{l-a}{a}}{m(l-a)} = \frac{I_o}{ma}$$

et

$$l' = l.$$



La longueur réduite du pendule ne change pas si l'on fait osciller le pendule autour d'un axe passant par son centre d'oscillation. Autrement dit : les centres d'oscillation et de suspension d'un pendule physique sont réciproques.

Cette constatation a permis de construire le *pendule réversible* qui porte deux couteaux, l'un en O , l'autre en S (fig. 426).

Soit S un couteau mobile dans une rainure r . En déplaçant S , il est possible d'égaliser les périodes des deux pendules dont l'un oscille autour de O , l'autre autour de S . A ce moment, la distance OS est égale à la longueur réduite du pendule ; la formule (462) permet de calculer g dès que l et T_0 ont été mesurés.

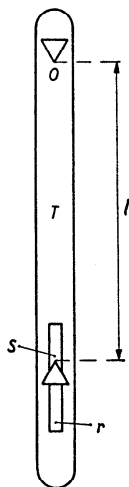


Fig. 426

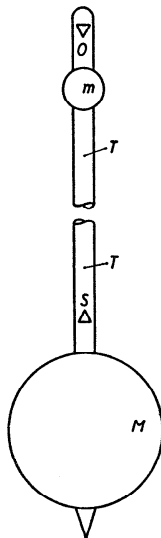


Fig. 427

Cette méthode est grossière et ne peut être appliquée à une mesure précise de g .

Le *pendule réversible de Kater* permet des mesures plus exactes ; il est composé d'une tige T (fig. 427), de deux masses M et m dont l'une, M , est fixe, tandis que l'autre, m , est mobile le long de T . Les couteaux O et S sont fixes. En déplaçant m , les périodes du pendule oscillant autour de O ou de S pourront être rendues égales. D'emblée S a été placé à peu près au centre d'oscillation, de sorte que le déplacement de m est petit. Les couteaux étant fixes, il est possible de mesurer très exactement la distance OS , c'est-à-dire la longueur réduite du pendule. T_0 peut être déterminé par une méthode de coïncidences.

Si, dans un certain milieu, un pendule à seconde possède une longueur réduite $l = 99,39$ cm, nous aurons :

$$g = \frac{4\pi^2 \cdot 99,39}{4} = 890,94 \text{ cm/s}^2.$$

La mesure de g est une opération très délicate ; elle a été exécutée en mesurant la longueur réduite du pendule à seconde par Borda, Cassini, Prony, Kater, Bessel. Elle peut être faite plus rapidement aujourd'hui grâce au pendule de Holweck-Lejay.

La position du centre d'oscillation. — Cette position n'est pas facile à déterminer uniquement par le calcul. La longueur l dépend du moment d'inertie I et du moment statique ma ; pour les pendules d'horloges le calcul de I et de ma est long et fastidieux.

Cependant il est bon de se rendre compte de la position approximative du centre d'oscillation ; cela nous permettra de comprendre pourquoi les impulsions d'entretien du mouvement du pendule ne sont pas données au centre d'oscillation malgré l'avantage qui en résulterait.

Déterminons la position du centre d'oscillation pour quelques cas simples.

Pendule formé d'une tige mince et homogène de section constante. — Une tige de longueur L (fig. 428), de section droite F est mobile autour d'un axe passant par une des extrémités O de la tige ; son centre de gravité est en G , à la distance $\frac{L}{2}$ de O .

La longueur réduite du pendule est :

$$l = \frac{I}{ma}.$$

Considérons un élément de la tige situé à la distance x de l'axe O et d'épaisseur infiniment petite dx ; son volume est Fdx et sa masse $F\delta dx$, δ étant la masse spécifique ou la masse de l'unité de volume en g/cm³ dans le système C.G.S. Le moment d'inertie de cet élément par rapport à l'axe O est :

$$dI = F\delta x^2 dx,$$

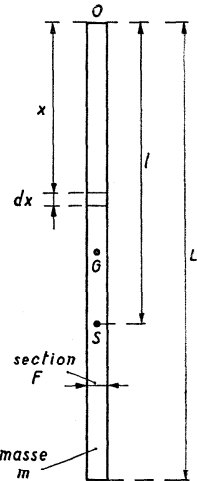


Fig. 428

d'où :

$$I = \int_0^L F\delta x^2 dx = F\delta \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^L = F\delta \frac{L^3}{3}.$$

Le moment statique ma vaut :

$$FL\delta \cdot \frac{L}{2} = F\delta \frac{L^2}{2}.$$

Donc :

$$l = \frac{F\delta \frac{L^3}{3}}{F\delta \frac{L^2}{2}} = \frac{2}{3} L. \quad (464)$$

Le centre d'oscillation S est situé aux $\frac{2}{3}$ de la longueur de la tige à partir de l'axe de rotation.

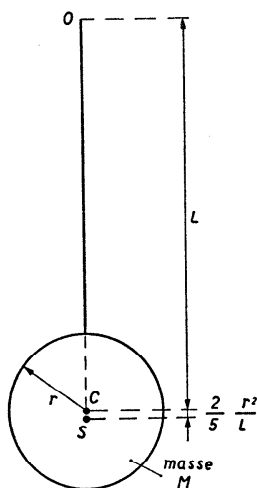


Fig. 429

Pendule composé d'une sphère homogène suspendue à un fil de masse négligeable. — La sphère homogène de centre C (fig. 429) et de rayon r aura, par rapport à un de ses diamètres, un moment d'inertie I' égal, d'après (216 b), à :

$$I' = \frac{2}{5} Mr^2.$$

Soit L la distance OC ; le moment d'inertie de la sphère par rapport à l'axe O est :

$$I = I' + ML^2 = M \left(\frac{2}{5} r^2 + L^2 \right).$$

Le moment statique vaut ML , donc :

$$l = \frac{M \left(\frac{2}{5} r^2 + L^2 \right)}{ML} = L + \frac{2}{5} \frac{r^2}{L}. \quad (465)$$

Le centre d'oscillation est en dessous du centre de la sphère à une distance $\frac{2}{5} \frac{r^2}{L}$.

Pendule composé d'une sphère homogène attachée à une tige mince et homogène de section constante. — Le moment d'inertie I du pendule suspendu en O (fig. 430) se compose du moment d'inertie I_t de la tige et du moment d'inertie I_s de la sphère. Si la tige et la sphère ne sont pas de la même matière :

$$I_t = \frac{1}{3} F \delta_1 (L-r)^3, \quad I_s = \frac{4}{3} \pi \delta_2 r^3 \left(\frac{2}{5} r^2 + L^2 \right)$$

et

$$I = I_t + I_s = \frac{1}{3} F \delta_1 (L-r)^3 + \frac{4}{3} \pi \delta_2 r^3 \left(\frac{2}{5} r^2 + L^2 \right).$$

Le moment statique vaut :

$$\frac{1}{2} F \delta_1 (L-r)^2 + \frac{4}{3} \pi \delta_2 r^3 L.$$

La longueur réduite du pendule est :

$$l = \frac{\frac{1}{3} F \delta_1 (L-r)^3 + \frac{4}{3} \pi \delta_2 r^3 \left(\frac{2}{5} r^2 + L^2 \right)}{\frac{1}{2} F \delta_1 (L-r)^2 + \frac{4}{3} \pi \delta_2 r^3 L}.$$

Introduisons dans cette formule les valeurs de m et M , les masses de la tige et de la sphère ; nous obtenons :

$$l = \frac{\frac{m}{3} (L-r)^2 + M \left(\frac{2}{5} r^2 + L^2 \right)}{\frac{m}{2} (L-r) + ML}. \quad (466)$$

Pendule composé d'une lentille cylindrique homogène attachée à une tige mince et homogène de section constante. — Le centre de gravité C (fig. 431) d'une lentille cylindrique de rayon r , de hauteur h et de masse M est à la distance L de l'axe de rotation passant par O .

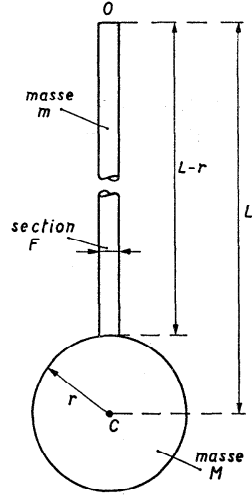


Fig. 430

Le moment d'inertie de cette lentille, par rapport à un axe parallèle à l'axe de rotation et passant par C , est, d'après (212) :

$$I'_c = M \frac{3r^2 + h^2}{12} = \pi r^2 h \delta_2 \frac{3r^2 + h^2}{12},$$

où δ_2 désigne la masse spécifique de la lentille. Par rapport à l'axe de rotation, ce moment d'inertie devient :

$$I_c = I'_c + ML^2 = M \left(\frac{3r^2 + h^2}{12} + L^2 \right).$$

Le moment d'inertie, par rapport à l'axe de rotation, d'une tige de section F , de masse spécifique δ_1 et de masse m est :

$$I_t = \frac{1}{3} F \delta_1 \left(L - \frac{h}{2} \right)^3 = \frac{m}{3} \left(L - \frac{h}{2} \right)^2.$$

D'autre part, le moment statique vaut :

$$ML + \frac{m}{2} \left(L - \frac{h}{2} \right).$$

Donc :

$$I = \frac{M \left(\frac{3r^2 + h^2}{12} + L^2 \right) + \frac{m}{3} \left(L - \frac{h}{2} \right)^2}{ML + \frac{m}{2} \left(L - \frac{h}{2} \right)}. \quad (467)$$

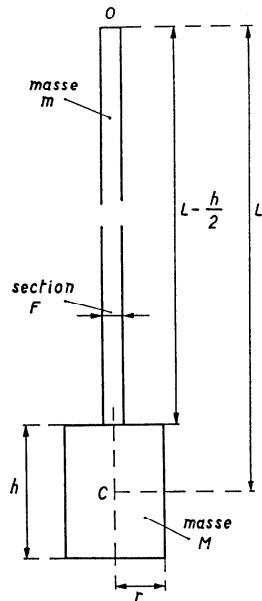


Fig. 431

Pendule partiellement équilibré composé de deux sphères homogènes attachées à une tige de masse négligeable. — Soient (fig. 432) deux sphères de centres C_1 et C_2 , de rayons R_1 et R_2 , situées à des distances L_1 et L_2 de part et d'autre de l'axe de rotation O ; leurs masses sont M_1 et M_2 . Le moment d'inertie I du pendule est :

$$I = M_1 \left(\frac{2}{5} R_1^2 + L_1^2 \right) + M_2 \left(\frac{2}{5} R_2^2 + L_2^2 \right).$$

Son moment statique vaut :

$$M_1 L_1 - M_2 L_2$$

Donc :

$$l = \frac{M_1 \left(\frac{2}{5} R_1^2 + L_1^2 \right) + M_2 \left(\frac{2}{5} R_2^2 + L_2^2 \right)}{M_1 L_1 - M_2 L_2} \quad (468)$$

Si la sphère C_2 était du même côté que C_1 , nous aurions :

$$l' = \frac{M_1 \left(\frac{2}{5} R_1^2 + L_1^2 \right) + M_2 \left(\frac{2}{5} R_2^2 + L_2^2 \right)}{M_1 L_1 + M_2 L_2} \quad (469)$$

Donc $l' < l$.

La répartition des masses des deux côtés de l'axe de rotation est un moyen commode pour augmenter la longueur réduite du pendule, c'est-à-dire la période, sans augmenter beaucoup la longueur réelle. D'après la formule (468), $l = \infty$ si $M_1 L_1 = M_2 L_2$. Admettons que :

$$R_2 < R_1, \quad L_2 < L_1$$

et posons :

$$R_2 = p R_1, \quad L_2 = q L_1.$$

Si les deux sphères sont de même matière :

$$M_1 = \frac{4}{3} \pi R_1^3 \delta, \quad M_2 = \frac{4}{3} \pi R_2^3 \delta.$$

Donc :

$$l = \frac{\frac{4}{3} \pi \delta \left[R_1^3 \left(\frac{2}{5} R_1^2 + L_1^2 \right) + R_2^3 \left(\frac{2}{5} R_2^2 + L_2^2 \right) \right]}{\frac{4}{3} \pi \delta \left[R_1^3 L_1 - R_2^3 L_2 \right]}.$$

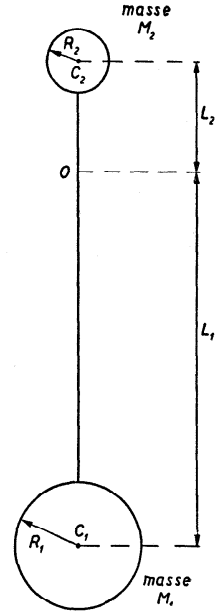


Fig. 432

ou

$$l = \frac{R_1^3 \left(\frac{2}{5} R_1^2 + L_1^2 \right) + p^3 R_1^3 \left(\frac{2}{5} p^2 R_1^2 + q^2 L_1^2 \right)}{\left(R_1^3 L_1 - p^3 R_1^3 q L_1 \right)}$$

$$= \frac{\frac{2}{5} R_1^2 (1 + p^5) + L_1^2 (1 + p^3 q^2)}{L_1 (1 - p^3 q)}.$$

Imaginons, par exemple, que :

$$p = 0,5, \quad q = 0,2, \quad R_1 = 0,05 L_1;$$

nous trouvons :

$$l = 1,0318 L_1.$$

Si les masses se trouvaient du même côté de O , nous aurions :

$$l' = 0,9815 L_1.$$

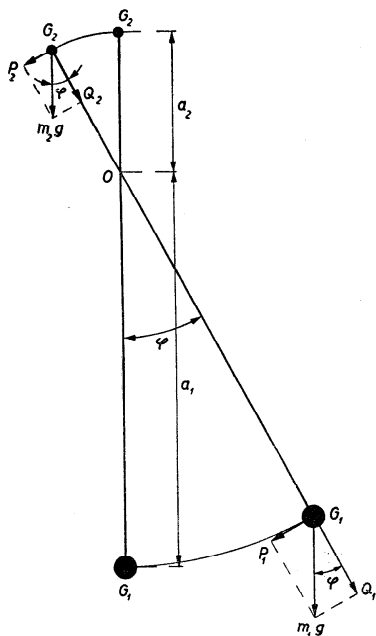


Fig. 433

La période du pendule partiellement équilibré. — Soit (fig. 433) un pendule dont les masses m_1 et m_2 sont situées de part et d'autre de l'axe de rotation O ; le centre de gravité de m_1 est en G_1 , celui de m_2 en G_2 .

L'équation du mouvement du pendule est :

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + m_1 g a_1 \sin \varphi - m_2 g a_2 \sin \varphi = 0$$

ou

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + g (m_1 a_1 - m_2 a_2) \sin \varphi = 0.$$

La période T est égale à :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{g(m_1 a_1 - m_2 a_2)}} \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \frac{\sin^2 \varphi_0}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \frac{\sin^4 \varphi_0}{2} + \dots \right] \quad (470)$$

et, si φ_0 est infiniment petit :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{g(m_1 a_1 - m_2 a_2)}}. \quad (471)$$

La présence de la masse m_2 au-dessus de l'axe O augmente la période. Pour $m_1 a_1 = m_2 a_2$, $T = \infty$. Mais, dans ce cas, nous n'avons plus un pendule, puisque le centre de gravité se trouverait en O .

Le pendule des métronomes est un pendule partiellement équilibré ; il est formé d'une grosse masse m_1 (fig. 434) et d'une petite masse m_2 déplaçable le long de la tige T ; celle-ci porte des traits horizontaux désignés par des chiffres indiquant le nombre d'alternances effectuées par le pendule en une minute, lorsque la partie supérieure DE du curseur se trouve sur le trait. Pour calculer exactement la période du pendule, il faut utiliser la formule (470) et non la formule (471), puisque l'amplitude peut dépasser 30° .

La période varie avec a_2 .

L'anisochronisme du pendule libre. — La période T du pendule simple ou composé varie beaucoup avec l'amplitude φ_0 .

Appelons $\frac{\Delta T}{T}$ la variation relative de la période correspondant à une certaine modification de l'amplitude.

La marche diurne μ de l'horloge est donnée par la formule (146) du chapitre VII (p. 36) :

$$\mu = -\frac{86\,400 \Delta T}{T}.$$

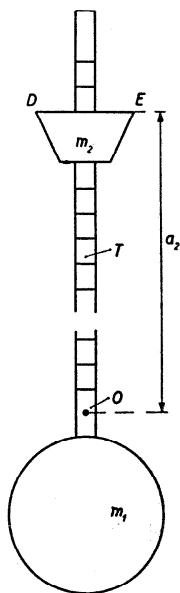


Fig. 434

Soit T la période du pendule pour l'amplitude φ_0 , T_0 la période pour une amplitude infiniment petite ; le rapport $\frac{T}{T_0}$ est donné dans la table suivante :

φ_0 en degrés	$\frac{T}{T_0}$	μ en secondes
0	1	0
1	1,000 019	— 1,65
2	1,000 076	— 6,59
3	1,000 171	— 14,80
4	1,000 304	— 26,35
5	1,000 476	— 41,15
6	1,000 685	— 59,2
7	1,000 983	— 80,0
8	1,001 22	— 105
9	1,001 54	— 133
10	1,001 90	— 165
12	1,002 75	— 237
14	1,003 76	— 324
16	1,004 92	— 425
18	1,006 20	— 535
20	1,007 65	— 660
30	1,017 4	— 1503
40	1,031 3	— 2704
50	1,049 8	— 4303
60	1,073 2	— 6324

Les dernières valeurs de $\frac{T}{T_0}$ sont données jusqu'au 1/10 000 ; les valeurs correspondantes de μ ne sont donc pas exactes ; elles indiquent l'ordre de grandeur.

La figure 435 représente μ en fonction de φ_0 .

Dans les horloges de précision, φ_0 ne dépasse pas 2° ; le tableau précédent montre que de 0 à 2° la marche diurne varie dans des proportions intolérables pour de telles horloges. En réalité l'amplitude varie peu et oscille autour de la valeur normale ; l'effort des horlogers tend à conserver au pendule une amplitude constante.

Malgré son anisochronisme, le pendule est un régulateur très précis. Pour la mesure du temps, nous ne pouvons pas nous contenter d'un pendule libre ; il faut un pendule entretenu en relation avec un rouage dont certains mobiles portent des aiguilles.

Le problème de la mesure du temps par les horloges consiste à réduire

autant que possible l'amortissement des oscillations du pendule libre et à améliorer constamment le dispositif d'entretien qui doit donner des impulsions d'intensité constante.

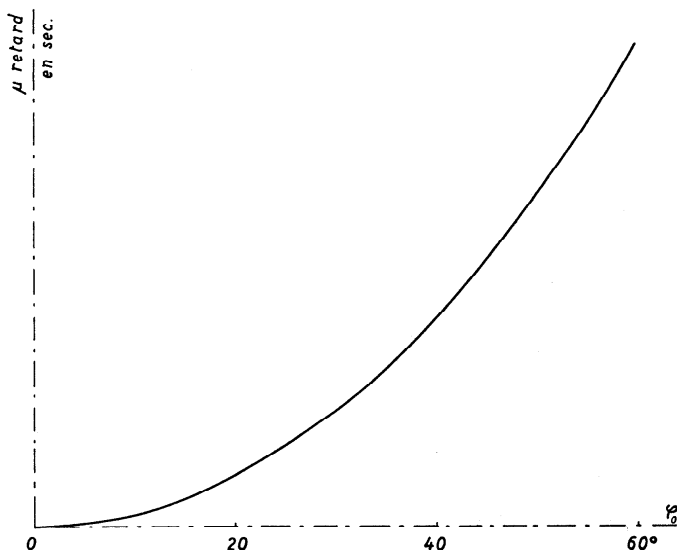


Fig. 435

L'action du pendule sur l'axe de rotation. — Dans les positions extrêmes, le pendule a une certaine énergie potentielle utilisable, qui est égale à :

$$W_p = mgh = mga (1 - \cos \varphi_0). \quad (472)$$

Dans la position d'équilibre, l'énergie potentielle est nulle ; par contre le pendule a une certaine énergie cinétique W_c :

$$W_c = \frac{1}{2} I \Omega^2.$$

Si nous faisons abstraction des résistances, nous avons :

$$W_p = W_c,$$

car :

$$\Omega = 2 \sqrt{\frac{mga}{I}} \sin \frac{\varphi_0}{2};$$

donc :

$$W_c = \frac{1}{2} I \cdot 4 \frac{mga}{I} \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} = mga \cdot 2 \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}$$

ou

$$W_c = mga (1 - \cos \varphi_0) = W_p. \quad (473)$$

Reprenons la figure 423 ; la composante Q représente la traction exercée dans le sens de l'axe du pendule par le poids mg :

$$Q = mg \cos \varphi. \quad (474)$$

Au point extrême de l'oscillation :

$$Q = mg \cos \varphi_0$$

et au point mort :

$$Q = mg.$$

Dans une horloge de précision ($\varphi_0 < 2^\circ$), Q varie de 0,999 85 mg à mg , donc très peu.

Cet effort de traction agit sur la suspension ; il est indépendant du mouvement du pendule ; c'est une traction *statique*.

Pendant le mouvement, la masse du pendule est soumise à la force centrifuge F qui a pour expression :

$$F = m \frac{v^2}{a} = ma\omega^2.$$

Puisque, d'après (445) :

$$\omega = \sqrt{\frac{2gma}{I} (\cos \varphi - \cos \varphi_0)},$$

nous avons :

$$F = 2g \frac{m^2 a^2}{I} (\cos \varphi - \cos \varphi_0). \quad (475)$$

Il est facile de vérifier que cette équation est homogène.

La force centrifuge est maximum pour $\varphi = 0$, c'est-à-dire lorsque le pendule passe par sa position d'équilibre :

$$F_{\max.} = 2g \frac{m^2 a^2}{I} (1 - \cos \varphi_0) = 4g \frac{m^2 a^2}{I} \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}.$$

Les forces F et Q provoquent des réactions sur l'axe de rotation du

pendule. La valeur absolue de cette réaction R est, pour une élongation quelconque φ :

$$R = mg \cos \varphi + 2g \frac{m^2 a^2}{I} (\cos \varphi - \cos \varphi_0). \quad (476)$$

La plus grande valeur de R correspond à l'instant où l'axe du pendule passe par la verticale :

$$R_{\max.} = mg + 4g \frac{m^2 a^2}{I} \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}. \quad (477)$$

S'il s'agit d'un pendule simple :

$$I = ma^2,$$

donc :

$$R_{\max.} = mg + 4mg \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} = mg \left(1 + 4 \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \right)$$

ou

$$R_{\max.} = mg (3 - 2 \cos \varphi_0). \quad (478)$$

Pour une élongation quelconque φ , nous avons :

$$R = mg \cos \varphi + 2mg (\cos \varphi - \cos \varphi_0),$$

soit :

$$R = mg (3 \cos \varphi - 2 \cos \varphi_0). \quad (479)$$

Dans une horloge de précision, $\cos \varphi_0 = 0,999\,85$ et $\cos \varphi$ est encore plus près de l'unité, de sorte qu'à n'importe quel moment il est possible de poser, sans commettre une grosse erreur :

$$3 \cos \varphi - 2 \cos \varphi_0 = 1,$$

soit :

$$R = mg.$$

Dans une horloge de précision, l'action sur l'axe de rotation peut, en première approximation, être considérée comme constante et égale au poids du pendule.

Cette action du pendule est considérable, puisque mg peut atteindre 15 kg* dans les horloges d'observatoires ; elle allonge les ressorts dans la suspension à ressort ou elle détériore et, à la longue, déforme les couteaux dans la suspension à couteaux.

Les forces qui agissent sur l'axe de rotation peuvent être réduites en utilisant un pendule partiellement équilibré. Nous voyons (fig. 433) que les composantes Q_1 et Q_2 agissent dans le même sens et que leurs

effets se superposent. Par contre les forces centrifuges sont de sens opposés ; seule leur différence agit. Nous savons que, pour un pendule d'amplitude $\varphi_0 < 2^\circ$, les forces centrifuges sont petites. Dans ce cas, le pendule partiellement équilibré ne peut réduire la pression sur l'axe de rotation que d'une faible quantité.

Le pendule cycloïdal et isochrone. — Huygens connaissait l'anisochronisme des oscillations du pendule circulaire. Puisque la période augmente avec l'amplitude, il faut imaginer un dispositif qui raccourcisse le pendule au fur et à mesure que l'amplitude augmente. Le pendule de Huygens est suspendu à un fil souple contraint de s'appuyer sur une surface

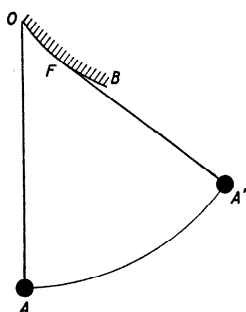


Fig. 436

surface courbe telle que OB (fig. 436). Pendant l'oscillation la masse pesante arrive en A' ; le fil de suspension est tangent à la surface OB en F ; la longueur du pendule est FA' , tandis qu'elle est égale à OA quand le pendule est vertical ; $FA' < OA$.

La courbe décrite par A n'est pas un arc de cercle, mais la développante de OB .

Pour que le raccourcissement du pendule compense, à tout instant, le retard dû à l'amplitude, il faut que OB ait une forme appropriée ; Huygens a démontré que OB doit être un arc de cycloïde ; il en est de même de la courbe AA' décrite par le centre de gravité du pendule.

Soient OB et OC (fig. 437) deux arcs de cycloïde symétriques par rapport à OA . La développante de OB et OC est une cycloïde BAC de même forme que OB et OC . Si R est le rayon du cercle générateur, les équations de la cycloïde BAC sont :

$$x = R(\alpha - \sin \alpha), \quad y = R(1 - \cos \alpha). \quad (480)$$

En faisant varier le paramètre α de 0 à 2π dans les équations (480), nous obtiendrions les coordonnées des points de BAC .

Calculons la longueur d'un arc de la cycloïde décrite par le centre de gravité du pendule. Un élément d'arc a pour valeur :

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{R^2(1 - \cos \alpha)^2 d\alpha^2 + R^2 \sin^2 \alpha d\alpha^2} \\ &= R d\alpha \sqrt{1 - 2\cos \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = R d\alpha \sqrt{2(1 - \cos \alpha)} = 2R \sin \frac{\alpha}{2} d\alpha. \end{aligned}$$

Soit arc $EA = \varphi$ l'élongation du pendule, c'est-à-dire la distance angulaire à parcourir jusqu'à la position d'équilibre ; nous avons :

$$P = \frac{mg}{4R} \varphi.$$

La force de rappel est proportionnelle à l'élongation φ , donc *les oscillations du pendule cycloïdal sont isochrones*.

L'équation du mouvement du point pesant le long de la cycloïde est :

$$m \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{mg}{4R} \varphi = 0,$$

d'où nous tirons la vitesse angulaire et la période :

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{g}{4R} (\varphi_0^2 - \varphi^2)},$$

$$\Omega = \varphi_0 \sqrt{\frac{g}{4R}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{4R}{g}}.$$

Appelons $OA = l$ la longueur du pendule :

$$l = 4R,$$

donc :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (481)$$

Le pendule cycloïdal oscille comme un pendule simple de longueur OA exécutant des oscillations d'amplitude infiniment petite.

Le pendule cycloïdal n'a pas eu de succès, bien qu'il résolve de façon ingénieuse le problème de l'isochronisme des oscillations du pendule libre. La difficulté d'exécuter parfaitement les lames cycloïdales OB et OC , de même que la nécessité de suspendre le pendule à un fil souple, donc mince et incapable de supporter un pendule lourd comme celui des horloges de précision ont rendu la solution de Huygens peu pratique. Les horlogers préfèrent rechercher l'isochronisme en obligeant le pendule à exécuter des oscillations de très faible amplitude. Cette solution préconisée par Hooke (1635-1703) était inapplicable aux horloges munies d'un échappement à roue de rencontre, mais Hooke avait inventé l'échappement à ancre à recul qui fonctionne avec un angle de levée plus faible que celui de l'échappement à palettes.

Modification de la période du pendule. — Considérons des oscillations de très faible amplitude d'un pendule physique. D'après (453) :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mga}},$$

d'où :

$$\ln T = \ln 2\pi + \frac{1}{2} \ln I - \frac{1}{2} \ln (mga).$$

En différentiant, nous obtenons :

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2} \frac{\Delta I}{I} - \frac{1}{2} \frac{\Delta(mga)}{mga}.$$

Proposons-nous de changer la période en modifiant I , tout en conservant la masse m . Alors :

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2} \frac{\Delta I}{I}.$$

La modification ΔI change la marche μ de l'horloge qui devient :

$$\mu = -86\,400 \frac{\Delta T}{T} = -43\,200 \frac{\Delta I}{I}. \quad (482)$$

Le curseur de Huygens. — On peut modifier I sans changer m au moyen d'un curseur de masse m' , déplaçable le long de la tige T du pendule (fig. 438). La masse m' est toujours plus petite que m . On admet que m est concentrée en C et m' en C' , que $OC = a$, $OC' = x$ et que la masse de la tige T est négligeable. La période T_0 du pendule sans curseur est :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g}}; \quad (483)$$

la période T du pendule avec curseur est :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ma^2 + m'x^2}{g(ma + m'x)}}. \quad (484)$$

On voit que $T = T_0$ pour $x = 0$ et pour $x = a$.

Si l'on divise membre à membre (484) par (483), on obtient :

$$\frac{T}{T_0} = \sqrt{\frac{ma^2 + m'x^2}{a(ma + m'x)}} = \sqrt{\frac{ma^2 + m'x^2}{ma^2 + m'ax}}$$

et

$$\frac{T}{T_0} = \sqrt{\frac{\frac{1 + m'x^2}{I_0}}{\frac{1 + m'ax}{I_0}}} = \left(1 + \frac{m'x^2}{I_0}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{m'ax}{I_0}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

où $ma^2 = I_0$.

En développant en série et en ne conservant que les deux premiers termes, puisque m' est beaucoup plus petit que m , on obtient :

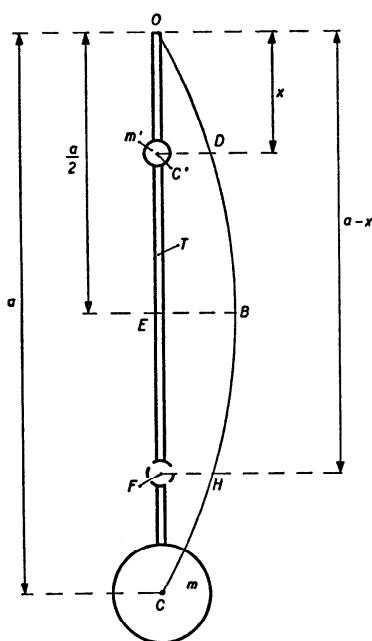


Fig. 438

$$\begin{aligned} \frac{T}{T_0} &= \left(1 + \frac{1}{2} \frac{m'x^2}{I_0}\right) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{m'ax}{I_0}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} \frac{m'x^2}{I_0} - \frac{1}{2} \frac{m'ax}{I_0} - \frac{1}{4} \frac{m'^2ax^3}{I_0^2}. \end{aligned}$$

Le quatrième terme est très petit et peut être négligé, donc :

$$\frac{T}{T_0} = 1 + \frac{1}{2} \frac{m'x^2}{I_0} - \frac{1}{2} \frac{m'ax}{I_0},$$

d'où :

$$\begin{aligned} \frac{T - T_0}{T_0} &= \frac{1}{2} \frac{m'x^2}{I_0} - \frac{1}{2} \frac{m'ax}{I_0} = \frac{1}{2} \frac{m'}{ma} \left(\frac{x^2}{a} - x\right). \end{aligned} \quad (485)$$

La marche diurne μ sera :

$$\begin{aligned} \mu &= -86\,400 \frac{\Delta T_0}{T_0} \\ &= -43\,200 \frac{m'}{ma} \left(\frac{x^2}{a} - x\right). \end{aligned} \quad (486)$$

La quantité $\frac{x^2}{a} - x$ est nulle pour $x = 0$ et pour $x = a$; si l'on pose :

$$y = \frac{x^2}{a} - x,$$

on a :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{a} - 1.$$

Si l'on égale à zéro cette dérivée :

$$\frac{2x}{a} - 1 = 0,$$

on obtient :

$$x = \frac{a}{2}.$$

L'effet du curseur est maximum pour $x = \frac{a}{2}$.

De (485) on tire :

$$T - T_0 = \frac{T_0}{2} \frac{m'}{ma} \left(\frac{x^2}{a} - x \right) = \frac{T_0}{2} \frac{m'}{ma} x \left(\frac{x}{a} - 1 \right).$$

Comme $x < a$, $\frac{x}{a} - 1 < 0$, $T - T_0 < 0$. Le curseur diminue la période du pendule ; il fait avancer l'horloge.

Lorsque le curseur occupe un point F tel que $C'E = BF$, $OF = a - x$, la période sera modifiée de :

$$T' - T_0 = \frac{T_0}{2} \frac{m'}{ma} (a - x) \left(\frac{a - x}{a} - 1 \right) = \frac{T_0}{2} \frac{m'}{ma} \left(\frac{x^2}{a} - x \right).$$

Donc $T' = T$.

L'effet du curseur est le même en deux points situés à égale distance du milieu E de la tige.

On peut représenter cet effet par une courbe telle que $ODBC$; le segment $C'D$ représente soit $\frac{T - T_0}{T_0}$, soit la valeur correspondante de μ .

On aura en EB le segment maximum et $C'D = FH$. La courbe montre que l'effet n'est pas proportionnel au déplacement. L'avance maximum a pour valeur :

$$\mu = 43\,200 \frac{m'a}{4ma} = 10\,800 \frac{m'}{m}. \quad (487)$$

Cette dernière formule permet de calculer $\frac{m'}{m}$ pour obtenir une avance maximum donnée.

Si l'on veut imposer une valeur maximum de μ égale à 10 s, il faut que :

$$\frac{m'}{m} = 0,000\,926.$$

La masse m' doit être environ la millième partie de m .

En réalité, on se sert d'un curseur de masse plus importante que l'on déplace de très peu.

La correction de la période au moyen du curseur est délicate ; elle ne peut se faire qu'en arrêtant le pendule. Ce moyen d'ajuster la période ne peut être employé dans une horloge très précise.

Modification de la période par des poids auxiliaires. — On préfère modifier la période en plaçant sur une table fixée à la tige du pendule des poids connus. Au moyen du curseur, on modifie la période en déplaçant un poids connu ; ici, on modifie le poids auxiliaire qui est toujours placé à la même distance de l'axe de rotation.

La table A (fig. 439) est à la distance b de l'axe O . La période du pendule (compte tenu de la table) est :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{C_0}};$$

$C_0 = mga$ est le moment statique.

Ajoutons sur la table un poids $m'g$; la période devient :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + m'b^2}{C_0 + m'gb}},$$

d'où :

$$\frac{T}{T_0} = \sqrt{\frac{I_0 + m'b^2}{C_0 + m'gb} \frac{C_0}{I_0}} = \left(1 + \frac{m'b^2}{I_0}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{m'gb}{C_0}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Puisque m' est petit en comparaison de m , on a :

$$\frac{T}{T_0} = \left(1 + \frac{1}{2} \frac{m'b^2}{I_0}\right) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{m'gb}{C_0}\right) = 1 + \frac{1}{2} \frac{m'b^2}{I_0} - \frac{1}{2} \frac{m'gb}{C_0}$$

et

$$\frac{T - T_0}{T_0} = \frac{\Delta T_0}{T_0} = \frac{1}{2} \left(\frac{m'b^2}{I_0} - \frac{m'gb}{C_0} \right).$$

La marche de l'horloge est alors :

$$\mu = -43\,200 \left(\frac{m'b^2}{I_0} - \frac{m'gb}{C_0} \right)$$

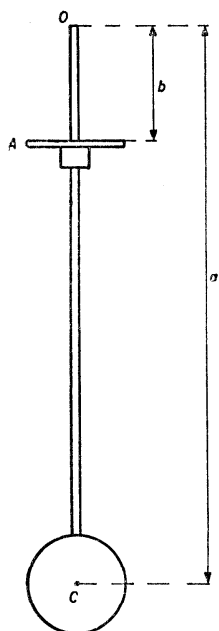


Fig. 439

ou

$$\mu = -43\,200\,m' \left(\frac{b^2}{I_0} - \frac{gb}{C_0} \right). \quad (488)$$

Pour une horloge donnée, le facteur $43\,200 \left(\frac{b^2}{I_0} - \frac{gb}{C_0} \right)$ est constant; appelons-le K . On aura donc :

$$\mu = -Km', \quad m' = -\frac{\mu}{K}.$$

Le poids auxiliaire est proportionnel à μ .

On utilise des poids étalonnés de façon à provoquer une avance diurne de 0,5, 0,1, 0,05 s, etc...; on peut poser ou enlever les poids auxiliaires sans arrêter le pendule.

Les deux moyens — curseur et poids auxiliaires — utilisés pour modifier la période reviennent à changer la longueur réduite l du pendule ou la longueur du pendule simple synchrone. Il n'est pas facile de calculer la position du curseur ou le poids auxiliaire pour le pendule physique d'une horloge. Nous y sommes parvenus en faisant des simplifications qui rendent approximatif le résultat obtenu par le calcul. En réalité, on procède de façon empirique et, pour une horloge donnée, on détermine par l'observation l'effet d'un certain déplacement du curseur ou celui de l'addition d'un poids déterminé.

La suspension du pendule. — Le pendule peut être suspendu de différentes manières. On recherche avant tout un mode de suspension qui ait une faible influence sur l'amortissement du mouvement du pendule; un pendule fortement amorti demande une plus grande force d'entretien, des impulsions plus vigoureuses d'où résultent une usure plus rapide du mécanisme, une plus grande inégalité des impulsions d'entretien et finalement des perturbations de la période du pendule.

Huygens a fait des expériences avec différentes suspensions; il avait étudié la suspension qui vient d'abord à l'esprit: celle qui consiste à attacher le pendule à un arbre dont les pivots tournent dans des coussinets; il avait vite reconnu que ce dispositif absorbe trop d'énergie et avait fini par adopter la suspension à fil.

Les qualités que doit avoir la suspension du pendule sont les suivantes :

- 1° très faible absorption de l'énergie du pendule;
- 2° définition aussi nette que possible de l'axe de rotation;
- 3° inaltérabilité;
- 4° insensibilité aux changements de température.

Mais on espère trouver une suspension qui corrige l'anisochronisme du pendule, c'est-à-dire qui provoque une diminution de la période sensiblement proportionnelle au carré de l'amplitude.

Ici aussi il faut distinguer entre les horloges courantes et les horloges de précision ; une suspension convenable pour les premières peut être inacceptable pour les secondes.

La suspension à fil. — Le pendule est suspendu en F à un fil souple et solide, donc mince. C'est souvent un fil de soie C (fig. 440) dont une extrémité est attachée en D à un arbre fixe B et l'autre à un arbre A que l'on peut faire tourner au moyen d'un bouton moleté E . On peut ainsi enrouler ou dérouler une partie du fil, c'est-à-dire monter ou descendre la tige T du pendule.

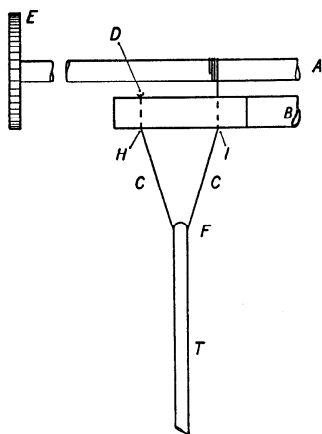


Fig. 440

Lorsque le pendule oscille, le fil plie tout près de la tige B . La souplesse du fil de suspension est obtenue en diminuant son épaisseur ; mais un fil mince ne peut pas supporter un pendule lourd qui serait favorable au réglage de l'horloge. Si le fil est hygroscopique, la longueur et la période du pendule dépendent de l'humidité de l'air.

Lorsqu'on enlève le pendule, le fil se déroule ; il faut refaire le réglage au moment de remettre le pendule en place.

La suspension à fil de soie n'est employée que dans les horloges courantes ; elle joua un certain rôle au début des horloges à pendule, car elle était la seule suspension utilisable pour le pendule cycloïdal.

Les points de flexion H et I du fil sont près de la tige B ; leur position varie avec l'amplitude des oscillations du pendule.

Le pendule à développante de cercle. — Bessel (1784-1846) a imaginé un pendule avec suspension à fil qui oscille comme un pendule dont le point de suspension est fixe.

Soit C (fig. 441) le centre d'un cylindre de rayon r auquel est attaché le fil AB de suspension du pendule dont le centre de gravité est en G . Le pendule oscille suivant la flèche 1 ; G passe en G' en décrivant une développante de cercle.

Considérons un pendule mathématique de masse m exécutant des oscillations de faible amplitude ; I est le moment d'inertie du pendule

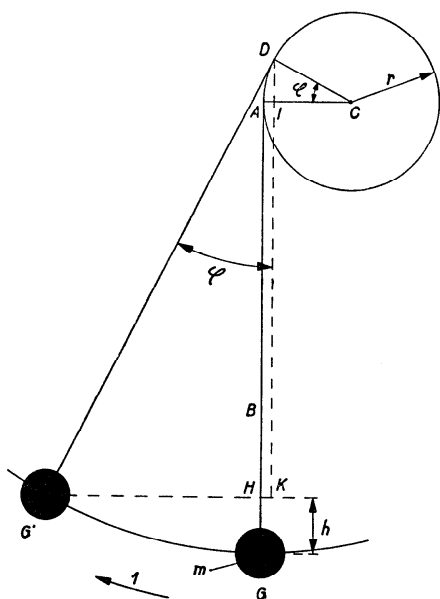


Fig. 441

quand le point de suspension est en A , I' , le moment d'inertie quand le point de suspension est en D :

$$I = m \cdot \overline{AG}^2 = ml^2,$$

si $l = AG$, et

$$I' = m \cdot \overline{DG'}.$$

Mais :

$$DG' = AG + r\varphi = l + r\varphi.$$

Pendant le mouvement, le centre de gravité s'est élevé de :

$$\begin{aligned} GH = h &= DI + AG - DK \\ &= r \sin \varphi + l - (l + r\varphi) \cos \varphi. \end{aligned}$$

Soit G_e la position extrême du centre de gravité ; elle correspond à

l'élongation d'amplitude φ_0 . A ce moment, l'énergie cinétique du pendule est nulle ; son énergie potentielle est :

$$mgh_0 = mg[r \sin \varphi_0 + l - (l + r\varphi_0) \cos \varphi_0].$$

En G' la vitesse angulaire ω est égale à $\frac{d\varphi}{dt}$; l'énergie cinétique vaut :

$$\frac{1}{2} I' \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} m (l + r\varphi)^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2.$$

Le pendule a encore l'énergie potentielle :

$$mg [r \sin \varphi + l - (l + r\varphi) \cos \varphi].$$

Puisque l'énergie totale n'a pas changé, nous avons :

$$\begin{aligned} &mg [r \sin \varphi_0 + l - (l + r\varphi_0) \cos \varphi_0] \\ &= \frac{1}{2} m (l + r\varphi)^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + mg [r \sin \varphi + l - (l + r\varphi) \cos \varphi] \end{aligned}$$

ou

$$-\frac{1}{2}\left((l+r\varphi)\right)^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \quad (489)$$

$$= g \left[r(\sin \varphi_0 - \sin \varphi) + l(\cos \varphi - \cos \varphi_0) + r(\varphi \cos \varphi - \varphi_0 \cos \varphi_0) \right].$$

Si l'amplitude reste faible, le premier membre se réduit à :

$$-\frac{1}{2}l^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2.$$

Développons en série dans le second membre et négligeons les termes contenant des puissances de φ et de φ_0 supérieures à 2 ; le second membre devient :

$$g \left[r(\varphi_0 - \varphi) + l\left(\frac{\varphi^2}{2} - \frac{\varphi_0^2}{2}\right) + r(\varphi - \varphi_0) \right] = \frac{gl}{2}(\varphi^2 - \varphi_0^2).$$

L'équation (489) prend alors la forme :

$$l^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = gl(\varphi_0^2 - \varphi^2). \quad (490)$$

Nous avons trouvé pour ω (d'après 445) :

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l}(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}$$

ou

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}(\cos \varphi - \cos \varphi_0).$$

Pour des oscillations de faible amplitude :

$$\cos \varphi - \cos \varphi_0 = \frac{1}{2}(\varphi_0^2 - \varphi^2),$$

donc :

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{g}{l}(\varphi_0^2 - \varphi^2),$$

ce que nous pouvons écrire :

$$l^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = gl(\varphi_0^2 - \varphi^2);$$

c'est l'équation (490) qui est celle du mouvement d'un pendule dont le point de suspension est fixe.

Si ingénieux que soit le pendule à développante de cercle de Bessel, il ne supprime pas l'hygroscopicité du fil et l'impossibilité d'utiliser un pendule lourd.

La suspension à couteau. — Le pendule P est parfois porté par deux couteaux CC en forme de prismes triangulaires dont une des arêtes est légèrement arrondie ; celle-ci repose sur la face plane d'un corps dur A (acier trempé et poli, onyx, agathe, etc.). Le couteau lui-même est très dur et très bien poli ; l'angle $\alpha = \angle MON$ (fig. 442) est d'environ 60° . En faisant dans A une rigole dans laquelle est placée l'arête du couteau, on évite le glissement du couteau qui pourrait se produire lorsque le pendule fait des oscillations de grande amplitude.

Pour être parfaits, les couteaux doivent avoir leurs arêtes DE et FH rectilignes et exactement dans le prolongement l'une de l'autre. Les arêtes sont un peu arrondies ; leur surface est cylindrique. Il est difficile d'obtenir le même arrondi pour les deux couteaux.

Quand l'arête est vive, comme cela est représenté dans la figure 442, le point O peut être considéré comme la projection de l'axe de rotation du pendule ; cet axe ne se déplace pas pendant l'oscillation, quelle que soit l'amplitude.

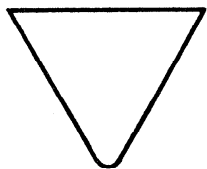


Fig. 443

Mais la pression du couteau sur le plan du support écrase l'arête vive ; cette pression est particulièrement forte dans les horloges de précision où le pendule est très lourd et pèse souvent plus de 10 kg*. L'arête vive est écrasée, si bien que, l'usure aidant, la section droite du couteau prend une forme analogue à celle qui est dessinée dans la figure 443.

Supposons que l'arrondi du couteau soit la surface d'un cylindre circulaire de rayon ρ (fig. 444) ; le point de contact entre le couteau et le support varie au cours de l'oscillation du pendule. L'axe du cylindre (ou ici l'axe du rouleau) est projeté en O et la section droite du rouleau est le demi-cercle DCE . C est le point de contact du rouleau avec le plan

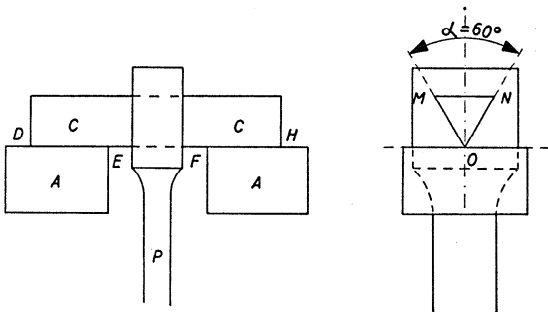


Fig. 442

Puisque $\frac{\varrho}{a}$ est petit :

$$l = a \left(1 - \frac{\varrho}{a} \right) = a - \varrho.$$

La longueur réduite est plus petite que a ; la période T vaut :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a - \varrho}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g} - \frac{\varrho}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g} \left(1 - \frac{\varrho}{a} \right)}.$$

Si $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g}}$, on a :

$$T = T_0 \left(1 - \frac{\varrho}{2a} \right). \quad (491)$$

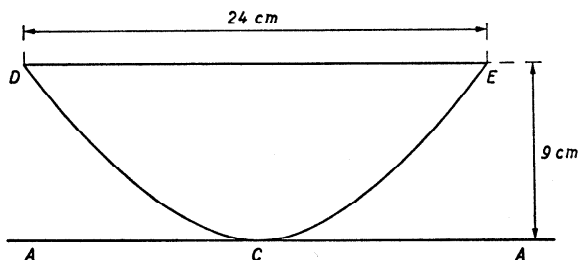


Fig. 445

Si la section droite du couteau n'est pas une portion de cercle, mais une surface projetée en DCE (fig. 445), le pendule oscille autour de O , centre de courbure du couteau en C , si les oscillations sont très petites. Lorsque le pendule s'écarte de la verticale, le point de contact se déplace sur le couteau et le centre de courbure passe en O' par exemple. La longueur du pendule se modifie suivant l'élongation, ce qui provoque un défaut d'isochronisme.

Quand le rayon de courbure du couteau augmente pendant l'oscillation infiniment petite, la période du pendule diminue suivant la formule (491).

Cette influence de la courbure du couteau est connue depuis longtemps grâce aux remarquables travaux de Laplace (1749-1827) et de Bessel.

Le couteau de Haag. — L'influence de la forme du couteau est loin d'être négligeable. Ainsi, pour un pendule à seconde, la marche diurne varie de $-4,3$ s lorsque le rayon de courbure augmente de $0,1$ mm.

En réalité l'influence reste faible ; elle est cependant intolérable pour des horloges de précision.

Haag a recherché la forme à donner au couteau pour que les oscillations du pendule soient isochrones, c'est-à-dire pour que le défaut d'isochronisme provoqué par le couteau soit égal et de signe contraire au défaut d'isochronisme dû à l'amplitude. Dans le cas du pendule libre, cette forme est celle représentée dans la figure 445.

Le défaut d'isochronisme dû à l'amplitude se traduit par un retard d'environ 370 s quand l'amplitude passe de 0 à 15° (voir le tableau de la p. 484).

Reprenons les formules (452) et (453) :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mga}} \left(1 + \frac{\varphi_0^2}{16}\right), \quad T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mga}}.$$

Nous avons :

$$\frac{T - T_0}{T_0} = \frac{\Delta T_0}{T_0} = \frac{\varphi_0^2}{16}.$$

Pour rendre le pendule isochrone, il faut que le rayon de courbure passe de ϱ à $\varrho + b$.

Pour un couteau de section circulaire de rayon ϱ , nous avons, d'après (491) :

$$T = T_0 \left(1 - \frac{\varrho}{2a}\right).$$

Quand le rayon de courbure est $\varrho + b$:

$$T' = T_0 \left(1 - \frac{\varrho + b}{2a}\right).$$

Donc :

$$T' - T = -T \frac{b}{2a} \left(1 + \frac{\varrho}{2a}\right) \cong -T \frac{b}{2a}$$

et

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{b}{2a}.$$

L'isochronisme du pendule est réalisé si :

$$\frac{b}{2a} = \frac{\varphi_0^2}{16}, \quad b = 2a \frac{\varphi_0^2}{16} = a \frac{\varphi_0^2}{8}.$$

Admettons $\varphi_0 = 15^\circ = 0,2618 \text{ rad}$ et $a = 100 \text{ cm}$ (pendule à seconde); nous avons :

$$b = 0,85 \text{ cm} = 8,5 \text{ mm},$$

ce qui est énorme.

Appliqué à un pendule d'horloge astronomique, le couteau de Haag aura des dimensions plus normales que celles qui sont données dans la figure 445; ces dernières s'appliquent à un pendule faisant des oscillations dont l'amplitude est supérieure à 15° .

Les résultats de l'unique pendule muni d'un couteau de Haag sont encourageants; l'isochronisme a été réalisé pour des amplitudes allant jusqu'à 17° ; pour de plus grandes amplitudes, il se produit un glissement du couteau sur son support, mais ces grandes amplitudes n'intéressent pas les horlogers.

Insuffisance de la solution de Haag. — La solution mathématique du problème de la forme du couteau de suspension est, comme toute solution théorique d'un problème pratique, approximative puisqu'elle ne tient compte ni de la déformation du couteau par l'usure et la pression ni de celle du support ni de l'influence du frottement. De plus, il s'agit de l'isochronisme du pendule libre; les horlogers désirent l'isochronisme du pendule entretenu. Or, ce dernier subit l'influence de l'échappement. Si l'on connaissait exactement le défaut d'isochronisme dû à l'échappement, il serait sans doute possible, en modifiant la forme du couteau, de corriger ce défaut en même temps que celui qui résulte de l'amplitude du pendule. Mais l'influence de l'échappement varie avec la force motrice; même dans les échappements libres de Reid, de Riefler et de Strasser, la résistance au dégagement est fonction de la force motrice.

Il faut chercher à réaliser la constance des impulsions, d'où résulte celle des amplitudes. Cette dernière résoud la question de l'isochronisme avec ou sans le couteau de Haag. Cette constance est un idéal sans doute irréalisable, mais dont le constructeur doit chercher à s'approcher.

La solution de Haag est digne de retenir l'attention des horlogers. On ne pourra pas déterminer le profil du couteau par le calcul, puisque l'influence de l'échappement est difficile à évaluer. Mais, comme la théorie de Phillips pour les courbes terminales des spiraux, la théorie de Haag permet de déterminer un profil approximatif que l'expérience corrigera. Le mérite de Haag est d'avoir démontré qu'on peut donner au couteau une forme qui corrige le ou les défauts d'isochronisme du pendule.

La suspension à couteau a été en faveur au XVIII^e siècle ; Ferdinand Berthoud la trouvait supérieure à la suspension à ressort qui s'est pourtant implantée aussi bien dans l'horlogerie courante que dans la construction des horloges de précision.

La suspension à couteau est utilisée, comme on l'a vu, dans les horloges munies de l'échappement de Riefler.

Si l'amplitude du pendule reste à peu près constante, on peut se contenter d'un couteau à section circulaire ; on peut aussi, comme c'est le cas dans une horloge à seconde de l'Observatoire de Genève, remplacer le couteau par une série de billes de même diamètre et bien alignées.

Dans cette dernière horloge, le pendule libre écarté de 1° de sa position d'équilibre a oscillé pendant deux jours avant de s'arrêter ; l'amortissement dû à l'air et au frottement est donc extrêmement faible ; le pendule de 10 kg* ne demande qu'une très faible force d'entretien.

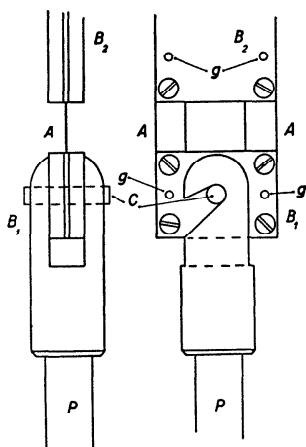


Fig. 446

La suspension à ressort. — La suspension à ressort consiste en une ou deux lames flexibles A (fig. 446) à laquelle ou auxquelles est attaché le pendule P. Les lames sont tenues par des goupilles g dans les pièces B₁ et B₂ ; cette dernière est solidement fixée au bâti de l'horloge ou à un mur, tandis que B₁ est traversé par l'arbre C auquel est suspendu le pendule.

Tandis que le pendule oscille, les lames fléchissent, mais en résistant au mouvement ; elles tendent à diminuer l'amplitude, ce qui est un avantage. Lorsque le pendule revient vers sa position d'équilibre, les ressorts agissent dans le sens du mouvement : ces deux actions — résistance dans l'alternance ascendante et impulsion pendant l'alternance descendante — diminuent la période d'autant plus que l'amplitude est plus grande. *Le ressort de suspension diminue le défaut d'isochronisme du pendule dû à l'amplitude.*

La flexion du ressort de suspension absorbe de l'énergie pour vaincre le frottement intérieur ; un pendule libre suspendu à des ressorts n'oscillerait donc pas indéfiniment dans le vide.

Il y a un danger de déformation des lames par traction surtout dans les horloges de précision où le pendule est très lourd.

Les dimensions de la lame de suspension ont une influence sur le moment élastique du ressort fléchi. La réaction du ressort dépend aussi

de l'élongation du pendule et du module d'Young. On peut admettre qu'il existe, pour la lame, des dimensions telles que la réaction élastique compense, pour un pendule et pour une amplitude donnés, exactement l'effet de l'amplitude sur la période. Ici également, si l'amplitude ne variait pas, il n'y aurait rien à compenser : tout ressort qui n'absorberait pas trop d'énergie conviendrait.

Si la lame ne subit aucune torsion, elle est soumise à un effort de traction à peu près égal au poids du pendule ; elle subit donc nécessairement un allongement ; il faut éviter que celui-ci devienne permanent, c'est dire que la limite élastique ne doit pas être dépassée.

Les lames de suspension sont en acier trempé et revenu ; on peut admettre une limite élastique d'environ $75 \text{ kg}^*/\text{mm}^2$ ou $73,5 \cdot 10^8 \text{ dynes/cm}^2$. Un pendule de 10 kg^* , supporté par un ressort de $0,1 \text{ mm}$ d'épaisseur et de 7 mm de largeur exerce un effort de traction de :

$$\frac{10}{0,1 \cdot 7} = 14,3 \text{ kg}^*/\text{mm}^2.$$

Le constructeur s'arrange de façon que l'effort de traction ne dépasse jamais $25 \text{ kg}^*/\text{mm}^2$.

Si l'on observe cette règle, seuls des allongements élastiques augmentent la longueur du pendule. Dans les horloges de précision, la traction exercée sur le ressort est sensiblement constante puisque l'amplitude est petite. La période du pendule est modifiée, mais ceci n'a aucune importance puisque la modification est toujours la même. Cependant, au cours des années et par un effet de fatigue, l'allongement se modifie, la marche de l'horloge en est affectée.

La réaction élastique du ressort de suspension. — Pour se rendre compte de l'action de la lame de suspension sur le mouvement et sur la période du pendule, il faudrait connaître la déformation de la lame pendant l'oscillation.

Ce problème a été abordé par plusieurs auteurs ; la plupart ont admis que le profil de la lame, pendant la flexion, est un arc de circonférence (fig. 447) ; c'est dire que le rayon de courbure est le même en tous les points de la lame situés entre le point d'encastrement O dans la pièce fixe et le point d'encastrement O_1 dans la pièce mobile. Cette hypothèse est loin d'être vraie ; tel qu'il est utilisé dans les suspensions de pendule, le ressort se courbe brusquement près du point O (fig. 448) ; le point de flexion est d'autant plus près de O que la lame est plus mince. Il est donc faux d'admettre que le point de flexion est au tiers de la longueur L de la lame à partir de O ; il faut choisir une fraction plus petite que $1/3$ dans les cas envisagés ici.

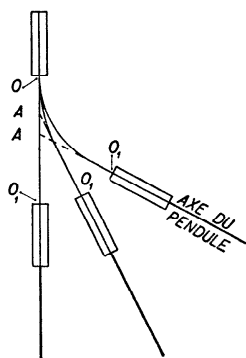


Fig. 447

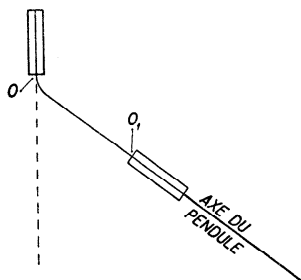


Fig. 448

Par où passe l'axe de rotation du pendule? On peut admettre qu'il passe par le point d'intersection A de la tangente en O_1 avec la verticale. Mais on voit (fig. 447) que la position de A varie au cours de l'oscillation. Il est important de savoir où passe l'axe de rotation du pendule puisque cet axe devrait coïncider avec l'axe de rotation de la fourchette d'impulsion.

On en revient toujours au même problème, celui de la forme de la lame pendant l'oscillation. Ce problème a tenté des savants comme P. Le Rolland, Tricomi et Haag.

Ce dernier part de l'équation qui relie le moment fléchissant au moment élastique M dont la valeur est :

$$M = \frac{EI_s}{\varrho},$$

E désignant le module de flexion, I_s le moment d'inertie de la section droite de la lame par rapport à l'axe de flexion et ϱ le rayon de courbure de la lame au point $P(x, y)$. Le moment fléchissant est aussi lié à la valeur du couple N et aux composantes X et Y de la réaction d'encastrement en O_1 (fig. 449).

L'équation de départ est :

$$M \frac{d^2y}{dx^2} = N + X(y - \beta) - Y(x - \alpha).$$

En posant :

$$\mu = \alpha \sqrt{\frac{mg}{M}},$$

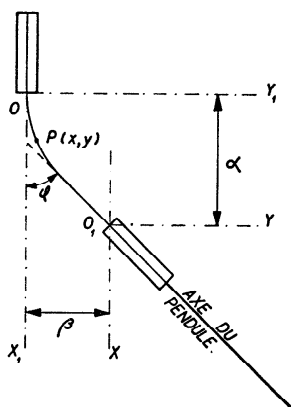


Fig. 449

m étant la masse du pendule, l'auteur trouve la relation entre les coordonnées x et y d'un point P de la lame fléchie :

$$y = \frac{e^u + e^{-u}}{e^u - e^{-u}} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1 \right) + x - \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad (492)$$

que l'on peut écrire plus simplement en utilisant les fonctions hyperboliques ¹ :

$$y = \coth u (\operatorname{ch} x - 1) + x - \operatorname{sh} x. \quad (492)$$

Cette équation est exacte : 1° si l'amplitude des oscillations est infiniment petite, 2° si le pendule est écarté par une force normale appliquée au centre de gravité, 3° si la lame est mince.

Si le ressort de suspension déformé a le profil défini par l'équation (492), les oscillations du pendule sont isochrones.

Il s'agit d'une solution approximative puisque dans la pratique, les conditions qui sont à la base des calculs de Haag ne sont généralement pas remplies. Cette solution permet cependant de réduire la période de tâtonnement.

L'influence de la température. — La température agit sur les horloges comme elle agit sur les montres ; une élévation de la température dilate les organes et affaiblit les ressorts ; la longueur réelle et la longueur réduite du pendule seront augmentées, le ressort de suspension sera moins élastique ; les deux effets entraîneront une augmentation de la période, c'est-à-dire un retard dans la marche de l'horloge.

Nous laissons de côté, pour l'instant, l'influence de la température sur la densité de l'air ambiant.

La modification de la longueur du pendule dépend des coefficients de dilatation des matières dont sont formés la tige, la lentille et la suspension.

1 Rappelons les définitions des fonctions hyperboliques :

$$\text{sinus hyperbolique de } x = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2};$$

$$\text{cosinus hyperbolique de } x = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2};$$

$$\text{tangente hyperbolique de } x = \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x};$$

$$\text{cotangente hyperbolique de } x = \operatorname{coth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x}.$$

Pour diminuer l'effet de la température, il convient d'utiliser des matériaux de faible dilatabilité ; cependant il faut tenir compte d'autres facteurs tels que la solidité, la facilité d'usinage, la stabilité des propriétés élastiques, la résistance à la corrosion, l'aspect ; dans les horloges faites en grandes séries, le prix de revient joue aussi un rôle important.

Actuellement les tiges de pendule sont en acier, en bois, en invar ou en quartz.

Soient l_0 et l_θ les longueurs réduites d'un pendule à 0°C et $\theta^\circ \text{C}$. En première approximation, on a :

$$l_\theta = l_0 (1 + \alpha \theta), \quad (493)$$

α désignant le coefficient de dilatation linéaire du métal constituant le pendule.

Pour des oscillations de très faible amplitude :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_\theta}{g}}$$

ou

$$\ln T = \ln 2\pi + \frac{1}{2} \ln l_\theta - \frac{1}{2} \ln g.$$

En différentiant, il vient :

$$\frac{dT}{T} = \frac{1}{2} \frac{dl_\theta}{l_\theta}$$

et, par conséquent :

$$\mu = -86\,400 \cdot \frac{1}{2} \frac{dl_\theta}{l_\theta} = -43\,200 \frac{dl_\theta}{l_\theta}.$$

Pour une variation $d\theta$ de la température, la grandeur l_θ subit une variation :

$$dl_\theta = \alpha l_\theta d\theta,$$

d'où :

$$\frac{dl_\theta}{l_\theta} = \alpha d\theta,$$

donc :

$$\mu = -43\,200 \alpha d\theta. \quad (494)$$

La marche diurne est proportionnelle à la variation de température et au coefficient de dilatation.

Pour l'acier $\alpha = 11 \cdot 10^{-6}$; si l'on pose $d\theta = 1^\circ$, on a :

$$\mu = -43\,200 \cdot 11 \cdot 10^{-6} = -0,475 \text{ s},$$

soit environ 0,5 s de retard diurne pour une élévation de température de 1° .

Le tableau suivant réunit quelques valeurs de α que l'on utilisera avec prudence, car elles ont été déterminées sur un échantillon qui n'est pas nécessairement identique à celui que l'on soumet au calcul. Le coefficient de dilatation est déterminé pour un intervalle de température parfois très étendu, de sorte que la valeur déterminée est une valeur moyenne.

Substances	Coefficient de dilatation linéaire $\alpha \cdot 10^{-6}$
Acier	11
Bronze (Cu 75 ; Sn 25)	18,4
Bronze (Cu 93,5 ; Sn 6,5)	17,5
Laiton	18 à 19
Invar (Fer 64 ; Ni 36)	0,9
Fer	~ 11
Zinc	~ 26
Verre	5 à 9
Verre Vycor	0,8
Verre Pyrex	3,3
Quartz fondu	0,5
Bois, parallèlement aux fibres :	
hêtre	2,57
noyer	6,6
sapin	5,4
chêne	4,9
frêne	9,5
Mercure	60
Pour un liquide, le coefficient de dilatation linéaire est environ égal au tiers du coefficient de dilatation cubique.	

L'effet de dilatation est toujours présent : faible pour certains corps (invar, quartz, verre Vycor), il est très fort pour le zinc, le mercure, le laiton. On utilise les différences de dilatabilité pour compenser les effets de la température sur la marche des horloges, comme on l'a fait pour « compenser » les montres.

Dans les horloges courantes, on utilise souvent des tiges de pendule en bois dont la dilatabilité est assez faible, mais le bois est hygroscopique ; dans l'air humide la tige du pendule s'allonge et s'alourdit. On combat ce dernier inconvénient en imprégnant le bois et en le recouvrant d'un vernis.

Le pendule à mercure. — Dans les horloges de précision, on doit chercher à annuler, à compenser l'effet de dilatation par un autre effet également fonction de la température. Il s'agit en somme de conserver le centre d'oscillation du pendule dans la même position, quelle que soit la température.

En 1715, Graham (1673-1751) a imaginé un pendule dont la lentille est un récipient cylindrique plus ou moins rempli de mercure. Au chaud, la tige du pendule (souvent en acier) se dilate et fait descendre le centre d'oscillation, tandis que le mercure de la lentille se dilate vers le haut et remonte le centre d'oscillation ; si la quantité de mercure est bien choisie, les deux effets s'annulent.

En variant la quantité de mercure, on modifie l'effet compensateur, mais aussi le moment d'inertie, le moment statique et la période. Cette dernière doit être ajustée chaque fois que la quantité de mercure est changée.

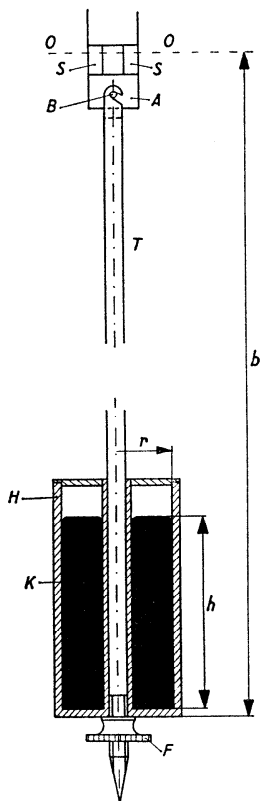


Fig. 450

Calcul d'un pendule à mercure. — Le calcul exact d'un pendule compensé est long et compliqué si l'on veut tenir compte de toutes les pièces du pendule : lames de suspension *S* (fig. 450), pince *A*, arbre *B*, tige *T*, écrou de réglage *F*, récipient *H*, colonne de mercure *K*, qui n'ont pas toutes une forme géométrique simple. Or, il s'agit de calculer des moments d'inertie et des moments statiques, ce qui n'est possible que si l'on connaît la masse du pendule ; celle-ci peut être déterminée par pesée si le pendule est déjà construit ou par le calcul s'il n'existe pas encore. Dans ce dernier

cas, on utilise les valeurs de la densité données dans des tables.

On conçoit que le résultat du calcul ne puisse pas être absolument exact ; il est cependant précieux parce qu'il évite au praticien bien des tâtonnements. Mais l'ajustement définitif de la compensation se fait par

l'expérience et l'observation de la marche de l'horloge à différentes températures.

Il est légitime de simplifier les calculs des pendules compensés, mais il faut se rendre compte de la grandeur des erreurs suscitées par ces simplifications.

Pour déterminer la quantité de mercure qui compense un pendule dont les dimensions sont données, on a préconisé plusieurs formules : seule celle de Wanach qui est simple et suffisamment exacte pour la pratique sera rappelée ici. Cet auteur suppose le récipient cylindrique. D'après (444) :

$$l = \frac{I}{ma} = \frac{I}{M},$$

où M désigne le moment statique du pendule. Le pendule est compensé si l ne varie pas avec la température θ , c'est-à-dire si $\frac{dl}{d\theta} = 0$, soit ici :

$$\frac{dl}{d\theta} = \frac{M \frac{dI}{d\theta} - I \frac{dM}{d\theta}}{M^2} = \frac{\frac{dI}{d\theta} - l \frac{dM}{d\theta}}{M}. \quad (495)$$

On distinguera la partie solide du pendule de moment d'inertie I' et de moment statique M' , de la partie liquide avec I'' et M'' comme moment d'inertie et moment statique. On a :

$$I = I' + I'', \quad M = M' + M'',$$

d'où :

$$\frac{dI}{d\theta} = \frac{dI'}{d\theta} + \frac{dI''}{d\theta}, \quad \frac{dM}{d\theta} = \frac{dM'}{d\theta} + \frac{dM''}{d\theta}.$$

Soit dm un élément de masse situé à la distance x de l'axe de rotation :

$$I' = \sum x^2 dm, \quad M' = \sum x dm.$$

On peut considérer que, dans les deux expressions, x désigne la même grandeur puisqu'il s'agit d'un pendule de précision dont les oscillations sont de faible amplitude.

La grandeur x varie avec la température θ ; soit α le coefficient de dilatation linéaire pour x (on suppose que toutes les parties solides du pendule sont faites de la même matière). Pour une variation $d\theta$ de la température, la grandeur x varie de :

$$dx = \alpha x d\theta,$$

d'où :

$$\frac{dx}{d\theta} = ax.$$

Il viendra donc :

$$\begin{aligned}\frac{dI'}{d\theta} &= \sum 2x \frac{dx}{d\theta} dm = 2a \sum x^2 dm = 2aI', \\ \frac{dM'}{d\theta} &= \sum \frac{dx}{d\theta} dm = a \sum x dm = aM' .\end{aligned}$$

La formule (495) devient :

$$\frac{dl}{d\theta} = \frac{2aI' + \frac{dI''}{d\theta} - l\left(aM' + \frac{dM''}{d\theta}\right)}{M' + M''}.$$

Jusqu'à présent, aucune hypothèse n'a été faite sur la forme des différentes pièces du pendule. La condition de compensation d'un *pendule de forme quelconque* est exprimée par la formule :

$$2aI' - a dM' + dI'' - l dM'' = 0. \quad (496)$$

On admet maintenant que le récipient à mercure est un cylindre creux de rayon intérieur r ; si h désigne la hauteur de la colonne de mercure, m la masse du mercure et b la distance de la base du cylindre de mercure à l'axe de suspension, on a :

$$I'' = m \frac{r^2}{4} + m \frac{h^2}{12} + m \left(b - \frac{h}{2}\right)^2 = m \left(\frac{r^2}{4} + b^2 - bh + \frac{h^2}{3}\right), \quad (497)$$

$$M'' = m \left(b - \frac{h}{2}\right). \quad (498)$$

Dans ces expressions, les grandeurs r , b et h varient avec θ :

$$\frac{dr}{d\theta} = ar, \quad \frac{db}{d\theta} = ab, \quad \frac{dh}{d\theta} = \alpha' h.$$

α' est ici le coefficient de dilatation réel de la colonne de mercure, compte tenu de la dilatation du mercure et de celle du récipient dont le coefficient de dilatation linéaire est α . Soit γ le coefficient de dilatation cubique

du mercure ; le volume V_θ et la section droite S_θ de la colonne de mercure à $\theta^\circ \text{C}$ sont :

$$V_\theta = V_0 (1 + \gamma\theta), \quad S_\theta = S_0 (1 + 2\alpha\theta),$$

d'où :

$$\frac{V_\theta}{S_\theta} = h_\theta = \frac{V_0}{S_0} \frac{1 + \gamma\theta}{1 + 2\alpha\theta} = h_0 (1 + \gamma\theta) (1 + 2\alpha\theta)^{-1}.$$

En négligeant les termes en α^2 et en $\alpha\gamma$, on a :

$$h_\theta = h_0 (1 + \gamma\theta) (1 - 2\alpha\theta) = h_0 \left[1 + (\gamma - 2\alpha)\theta \right].$$

Si l'on pose $\gamma - 2\alpha = \alpha'$, on obtient :

$$h = h_0 (1 + \alpha'\theta).$$

De (497) et (498) on déduit :

$$\begin{aligned} \frac{dI''}{d\theta} &= m \left(\frac{r}{2} \frac{dr}{d\theta} + 2b \frac{db}{d\theta} - b \frac{dh}{d\theta} - h \frac{db}{d\theta} + \frac{2h}{3} \frac{dh}{d\theta} \right) \\ &= m \left(\frac{\alpha r^2}{2} + 2ab^2 - \alpha'bh - abh + \frac{2\alpha'h^2}{3} \right) \\ &= m \left[\alpha \left(\frac{r^2}{2} + 2b^2 - bh \right) + \alpha' \left(\frac{2}{3}h^2 - bh \right) \right] = 2\alpha I'' - mh \left(b - \frac{2h}{3} \right) (\alpha' - \alpha) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{dM''}{d\theta} &= m \left(\frac{db}{d\theta} - \frac{1}{2} \frac{dh}{d\theta} \right) \\ &= m \left(ab - \frac{1}{2} \alpha'h \right) = \alpha M'' - m \frac{h}{2} (\alpha' - \alpha). \end{aligned}$$

En introduisant ces valeurs dans (496), on trouve :

$$2\alpha I' - \alpha M' + 2\alpha I'' - mh \left(b - \frac{2h}{3} \right) (\alpha' - \alpha) - \alpha M'' + m \frac{h}{2} (\alpha' - \alpha) = 0$$

ou

$$2 \alpha l - \alpha l M - m h (\alpha' - \alpha) \left(b - \frac{2h}{3} - \frac{l}{2} \right) = 0,$$

soit :

$$2 \alpha \frac{l}{M} - l \alpha - \frac{m h}{M} (\alpha' - \alpha) \left(b - \frac{2h}{3} - \frac{l}{2} \right) = 0$$

et enfin :

$$\alpha l - \frac{m h}{M} (\alpha' - \alpha) \left(b - \frac{2h}{3} - \frac{l}{2} \right) = 0, \quad (499)$$

qui est la *formule de Wanach*.

Cette formule n'est simple qu'en apparence. Par exemple, pour déterminer la hauteur h de la colonne de mercure qui compense un pendule à seconde ($l = 99,4$ cm) dont la partie solide est en acier, on admettra :

$$\alpha = 11 \cdot 10^{-6}, \quad \gamma = 180 \cdot 10^{-6},$$

d'où :

$$\alpha' = \gamma - 2 \alpha = 158 \cdot 10^{-6}, \quad \alpha' - \alpha = 147 \cdot 10^{-6}.$$

Soient a la distance du centre de gravité de la partie solide à l'axe de rotation du pendule, m' la masse correspondante et δ la masse spécifique du mercure. Alors :

$$M' = m' a, \quad M = m' a + m \left(b - \frac{h}{2} \right),$$

$$\frac{M}{m} = \frac{m' a}{m} + b - \frac{h}{2} = \frac{m' a}{\pi r^2 h \delta} + b - \frac{h}{2} = \frac{m' a + \left(b - \frac{h}{2} \right) \pi r^2 h \delta}{\pi r^2 h \delta}$$

et

$$\frac{m h}{M} = \frac{\pi r^2 h^2 \delta}{m' a + \left(b - \frac{h}{2} \right) \pi r^2 h \delta}.$$

Cette dernière équation permet d'éliminer m dans (499), mais il reste encore deux inconnues, b et h .

Puisque le pendule existe, on admettra pour b une valeur probable et on calculera h par la formule de Wanach, qui sera du 3^e degré en h . Avec la quantité de mercure correspondant à cette hauteur h , on déterminera expérimentalement la période du pendule, on corrigera b et on trouvera la hauteur correspondante de la colonne de mercure ; on obtiendra ainsi finalement la véritable valeur de h .

La compensation est trop faible si l'horloge retarde au chaud ; dans ce cas, il faut augmenter la quantité de mercure. On diminuera cette quantité si la compensation est trop forte.

On arrive de cette façon à rendre égales les périodes du pendule pour deux températures de référence (0° et 30° C par exemple).

Mais l'horloge ne sera pas compensée pour les températures intermédiaires et pour celles qui sont en deçà ou au-delà des températures de référence.

Le pendule à mercure a une erreur secondaire. La cause de l'erreur secondaire de la compensation mercurielle est semblable à celle de l'erreur secondaire du balancier acier-laiton. La dilatation linéaire de la tige du pendule est donnée par :

$$l = l_0 (1 + \alpha \theta + \beta \theta^2).$$

Cette formule est aussi applicable à la colonne de mercure. Dans ce dernier cas, il faut déduire les coefficients α et β des coefficients de dilatation cubique.

Les coefficients de dilatation linéaire pour l'acier (tige du pendule) valent par exemple¹ :

$$\alpha = 11 \cdot 10^{-6}, \quad \beta = 7 \cdot 10^{-9}.$$

Les coefficients de dilatation cubique du mercure sont :

$$\gamma_1 = 180 \cdot 10^{-6}, \quad \gamma_2 = 2 \cdot 10^{-9}.$$

Les coefficients de dilatation linéaire sont environ 3 fois plus petits que ceux de dilatation cubique, de sorte que les coefficients de dilatation linéaire du mercure sont :

$$\alpha' = 60 \cdot 10^{-6}, \quad \beta' = 0,7 \cdot 10^{-9}.$$

Le coefficient quadratique β de l'acier est environ 10 fois plus considérable que celui β' du mercure.

¹ C'est à dessein que nous avons choisi pour le coefficient β une valeur très petite : celle qu'il prend pour le fer pur. Pour l'acier, la valeur de β peut être jusqu'à 15 fois plus grande.

L'effet de la dilatation de l'acier sera représenté par une ligne à courbure prononcée, celui de la dilatation du mercure par une courbe presque rectiligne : la compensation ne peut être parfaite.

L'erreur secondaire du pendule à seconde compensé au mercure est d'environ 0,07 s par jour pour une différence de 30° entre les températures de référence ; elle n'est pas négligeable en regard du degré de précision des horloges actuelles. On ne connaît pas de moyen pratique de la réduire ou de l'éliminer.

Le pendule à mercure est simple à construire ; il est élégant ; sa plus belle qualité est d'avoir une *compensation réglable* sans qu'il soit nécessaire de décrocher le pendule. Il a aussi quelques défauts à côté de son prix élevé : la compensation a une erreur secondaire ; le mercure attaque beaucoup de métaux (Au, Ag, Pb, Zn, Cu, Cr, etc.), soit directement, soit par les vapeurs — toxiques pour l'homme — qu'il émet. On lui reproche aussi le mouvement de la surface du liquide pendant l'oscillation du pendule.

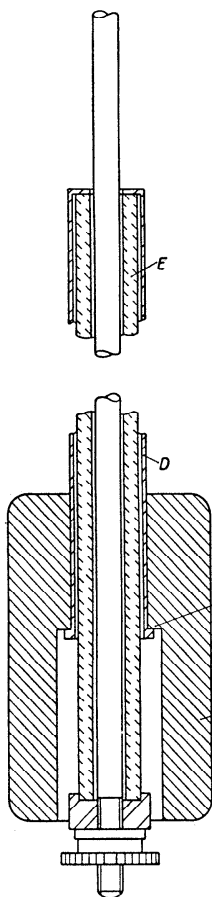


Fig. 451

Pendule compensateur au zinc. — Pour éliminer ce dernier inconvénient et en même temps réduire le prix du pendule, on a remplacé la colonne de mercure par un cylindre en zinc.

La figure 451 indique la construction de ce pendule : la lentille *B* en fonte est supportée en *C* par un tube en tôle *D* qui entoure le tube en zinc *E* remplaçant le mercure. Les coefficients de dilatation linéaire du zinc et du mercure sont $26 \cdot 10^{-6}$ et $60 \cdot 10^{-6}$. Le tube de zinc capable de compenser la dilatation de la tige du pendule doit être plus de deux fois plus long que la colonne de mercure dans un pendule à mercure.

Le calcul de la longueur du tube de zinc se fait de la même façon que celui de la hauteur de la colonne mercurielle. Ici aussi l'ajustement de la compensation doit se faire par l'observation de la marche de l'horloge au froid et au chaud.

Le pendule à grill. — Le pendule à grill inventé en 1726 par John Harrison (1693-1776) a une lentille lourde fixée à une série de tringles dont les unes sont en acier et les autres en laiton, en bronze ou en zinc.

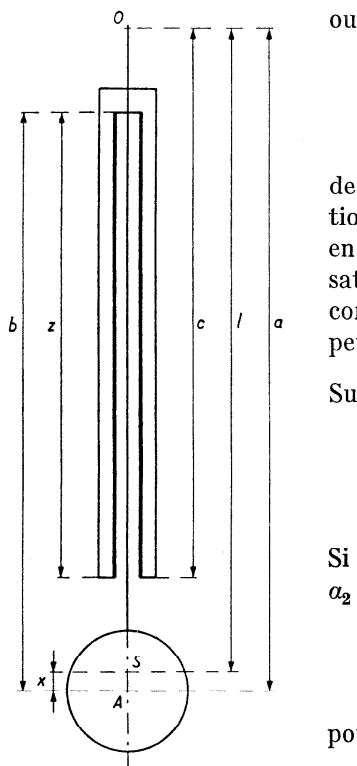


Fig. 453

ou

$$z = \frac{\alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} a.$$

Il est plus pratique d'exprimer z en fonction de la longueur réduite l du pendule. La relation entre a et l dépend de la construction et en particulier du nombre des tringles compensatrices et des dimensions de la lentille. Le constructeur sait que pour un modèle donné, il peut admettre une valeur pour $x = a - l$.

Supposons $x = \frac{l}{40}$; dans ce cas :

$$a = \frac{41}{40} l, \quad z = \frac{41}{40} \frac{\alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} l.$$

Si le gril est en acier-zinc, $\alpha_1 = 11 \cdot 10^{-6}$, $\alpha_2 = 26 \cdot 10^{-6}$ et

$$z = \frac{41}{40} \frac{11 \cdot 10^{-6}}{15 \cdot 10^{-6}} \cdot 99,4 = 74,71 \text{ cm}$$

pour un pendule à seconde.

Le résultat du calcul est approximatif parce que nous avons fait certaines hypothèses : non

seulement pour $x = \frac{l}{40}$, mais pour les valeurs

de α_1 et de α_2 ; enfin nous avons exigé que A reste à la même distance de O , quelle que soit la température, tandis que ce qui importe c'est la position du centre d'oscillation S . Le constructeur doit donc apporter un correctif différent d'un modèle à l'autre.

La longueur des tiges compensatrices doit être déterminée avant la construction puisqu'il n'y a pas moyen de modifier la compensation sans démonter le pendule.

Envisageons le *pendule à gril à compensation réglable* dont la figure 454 donne la disposition schématique des organes. Les tringles d'acier d , d sont reliées par la traverse DE et passent librement à travers la pièce BC ; elles portent la lentille A . La tige OF du pendule passe librement dans DE et est fixée à BC . Un tube de zinc f , f entoure OF ; sa longueur est égale à la distance entre les deux traverses ; quand il se dilate, il entraîne DE et par suite la lentille A vers le haut. Le tube de zinc et la

tige du pendule ont une série de trous équidistants; une goupille H rend les deux pièces solidaires.

Dès que la goupille est en place, la partie inférieure du tube en zinc se dilate vers le bas comme la tige du pendule dont elle est solidaire; la partie supérieure du tube de zinc se dilate vers le haut. En déplaçant la goupille, il est possible de modifier la longueur de la partie efficace du tube compensateur.

Soit $FH = \frac{z}{n}$. Pour une élévation de $\Delta\theta^\circ$ de la température, la dilatation vers le bas des tiges d'acier dont le coefficient de dilatation vaut α_1 est :

$$\alpha_1 \left(a + z + \frac{z}{n} \right) \Delta\theta.$$

La dilatation vers le haut du tube de zinc dont le coefficient de dilatation vaut α_2 est :

$$\alpha_2 z \Delta\theta.$$

La compensation est parfaite pour :

$$\alpha_2 z \Delta\theta = \alpha_1 \left(a + z + \frac{z}{n} \right) \Delta\theta$$

ou

$$z = \frac{\alpha_1}{\alpha_2 - \frac{n+1}{n} \alpha_1} a.$$

Admettons comme précédemment que $a = \frac{41}{40} l$;
dans ce cas :

$$z = \frac{41}{40} \frac{\alpha_1}{\alpha_2 - \frac{n+1}{n} \alpha_1} l.$$

La longueur totale du tube de zinc est $z + \frac{z}{n}$.

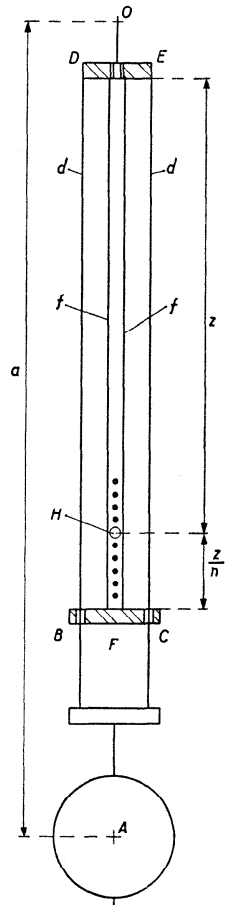


Fig. 454

Le pendule à tige d'invar. — Depuis la découverte de l'*invar* (ferro-nickel à 36 % Ni) par Ch.-Ed. Guillaume (1861-1937), on utilise pour les horloges de précision, le pendule à tige d'invar. Le coefficient de dilatation de l'invar est de l'ordre de $1 \cdot 10^{-6}$, c'est-à-dire 11 fois plus faible que celui de l'acier.

D'après (494), l'effet d'une élévation de 1° de la température est, pour une horloge avec pendule à tige d'invar, un retard de 0,043 s par jour.

L'invar brut de coulée subit des changements progressifs ; une barre conservée à la température ambiante s'allonge constamment dans le cours du temps, et cet allongement, de plus en plus lent, peut être constaté pendant un grand nombre d'années. Ch.-Ed. Guillaume a mesuré la même barre pendant 28 ans. Cet allongement et la modification de la période qui en résulte sont inadmissibles pour un pendule de haute précision ; une barre de 1 m peut s'allonger au cours des années de 15μ ; la période du pendule à seconde passerait de 2 à 2,000 07 s, ce qui provoquerait un retard diurne de 0,648 s. Par un étuvage prolongé suivi d'un refroidissement progressif s'étendant sur plusieurs mois, on est parvenu à stabiliser l'invar. Aujourd'hui les barres d'invar pour les tiges de pendule sont livrées étuvées, stabilisées et après détermination de leur coefficient de dilatation.

L'invar supporte bien les chocs et est susceptible d'un beau poli ; on peut l'usiner avec des outils très durs et très robustes.

Pour les tiges des pendules de précision, on a aussi utilisé le quartz fondu dont le coefficient de dilatation est $0,5 \cdot 10^{-6}$. Mais ces tiges très fragiles sont délicates à manier et à usiner.

Pour les horloges courantes, on pourrait employer sans autre des tiges de pendule en invar, n'était-ce leur prix élevé ; pour les horloges de précision, il est nécessaire de compenser la faible influence de la dilatation de l'invar.

Le pendule en invar se compose généralement d'une tige T en invar et d'une lentille en acier, en laiton ou en bronze. La compensation se fait au moyen d'un cylindre B (fig. 455) reposant sur l'écrou de réglage D et supportant la lentille A en son centre de gravité G . Un contre-écrou D' assure la position de la pièce compensatrice et de la lentille. La pièce compensatrice est faite en un métal beaucoup plus dilatable que l'invar (acier, bronze).

Il est important de calculer aussi exactement que possible la longueur de la pièce compensatrice. Comme le calcul comporte, malgré tous les soins qu'on y apporte, un certain degré d'approximation, il est nécessaire, une fois le pendule et l'horloge construits, de contrôler la marche au chaud et au froid. Si la compensation est trop faible, l'horloge retarde encore au chaud : la pièce compensatrice est trop courte et il faut la rem-

placer par une autre plus longue, ce qui nécessite un démontage du pendule. Ces retouches de la compensation prennent beaucoup de temps, car chaque modification de la pièce compensatrice entraîne la modification du moment d'inertie et du moment statique, donc de la période.

Pour faciliter les retouches de la compensation, Paul Berner (1858-1942) a imaginé un dispositif dans lequel la lentille *A* (fig. 456) traversée par

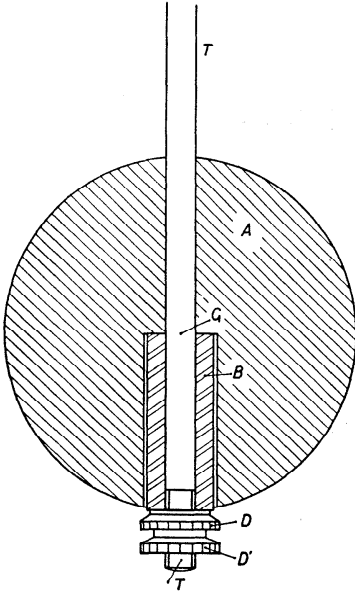


Fig. 455

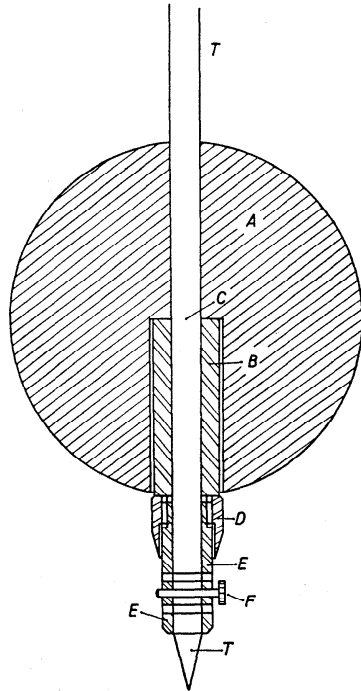


Fig. 456

la tige *T* repose en son milieu *C* sur la première pièce compensatrice *B*. Cette pièce — un cylindre creux — repose sur une douille *D* de réglage, elle-même vissée sur la seconde pièce compensatrice *E*. Cette dernière est percée ainsi que la tige *T* d'un certain nombre de trous équidistants perpendiculaires à l'axe du pendule. Une goupille *F* rend solidaires la tige et la pièce compensatrice *E*.

La compensation se fait par la dilatation du cylindre *B* et par celle de la partie de *E* qui se trouve au-dessus de la goupille *F*. En déplaçant *F* vers le bas, on renforce la compensation. Ce dispositif rappelle celui du pendule à gril à compensation réglable; il permet de retoucher la compensation sans démonter le pendule ni modifier sensiblement la période.

Calcul d'un pendule à tige d'invar. — Envisageons la construction la plus simple, celle qui est représentée par la figure 455.

Désignons par M et m les masses de la lentille et de la tige, par I et C le moment d'inertie et le moment statique du pendule, par L la distance du centre de gravité de la lentille à l'axe de rotation, par l la longueur de la pièce compensatrice, par α_1 et α_2 les coefficients de dilatation linéaire de la tige et de la pièce compensatrice.

Le moment d'inertie du pendule est :

$$I = \frac{m}{3}(L + l)^2 + ML^2.$$

Le moment statique vaut :

$$C = g \left[\frac{m}{2}(L + l) + ML \right].$$

La période du pendule pour les très petites oscillations est :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{m}{3}(L + l)^2 + ML^2}{g \left[\frac{m}{2}(L + l) + ML \right]}}.$$

Pour un pendule à seconde, $T = 2$, donc :

$$\pi \sqrt{\frac{\frac{m}{3}(L + l)^2 + ML^2}{g \left[\frac{m}{2}(L + l) + ML \right]}} = 1,$$

d'où nous tirons :

$$\pi^2 \left[\frac{m}{3}(L + l)^2 + ML^2 \right] = g \left[\frac{m}{2}(L + l) + ML \right].$$

Posons $\frac{M}{m} = A$; nous obtenons :

$$\pi^2 m \left[\frac{1}{3}(L + l)^2 + AL^2 \right] = mg \left[\frac{L + l}{2} + AL \right]$$

et, après simplifications :

$$g(L + l + 2AL) = \frac{2\pi^2}{3} \left[(L + l)^2 + 3AL^2 \right]. \quad (500)$$

Nous pouvons calculer la longueur l , du moins approximativement. Nous savons que L vaut environ 100 cm pour un pendule à seconde. Pour qu'il y ait compensation, il faut que :

$$\alpha_1(L + l) = \alpha_2 l,$$

d'où :

$$l = \frac{\alpha_1 L}{\alpha_2 - \alpha_1}. \quad (501)$$

Nous avons une valeur approchée puisque L n'est pas nécessairement égal à 100 cm.

Si la pièce compensatrice est en laiton ($\alpha_2 = 18 \cdot 10^{-6}$) par exemple,

nous avons :
$$l = \frac{L}{17}.$$

Au moyen de la formule (500), nous pouvons calculer L en tenant compte de (501). Cependant nous devons admettre une valeur pour $A = \frac{M}{m}$.

Pour que la période reste constante, il faut que :

$$\frac{I}{C} = \text{constante} = K,$$

quelle que soit la température θ . Nous aurons donc :

$$K = \frac{I}{C} = \frac{\frac{m}{3}(L + l)^2 + ML^2}{g \left[\frac{m}{2}(L + l) + ML \right]} = \frac{\frac{1}{3}(L + l)^2 + AL^2}{g \left[\frac{1}{2}(L + l) + AL \right]}. \quad (502)$$

Quand la température varie de $\Delta\theta$, la distance L du centre de la lentille à l'axe de suspension devient :

$$L' = L(1 + \alpha_1 \Delta\theta) + \lambda(1 + \alpha_1 \Delta\theta) - \lambda(1 + \alpha_2 \Delta\theta),$$

λ étant la longueur exacte à $\theta^\circ \text{C}$ de la pièce compensatrice.

Si nous désignons par I' et par C' le moment d'inertie et le moment statique du pendule à la température $(\theta + \Delta\theta)^\circ \text{C}$, nous aurons également :

$$\frac{I'}{C'} = \frac{\frac{1}{3}(L+l)^2(1 + \alpha_1\Delta\theta)^2 + AL'^2}{g\left[\frac{1}{2}(L+l)(1 + \alpha_1\Delta\theta) + AL'\right]} = K.$$

Mais :

$$K = \frac{I'}{C'} = \frac{I}{C} = \frac{I' - I}{C' - C} = \frac{\Delta I}{\Delta C}.$$

Si dans les expressions de L'^2 et $(1 + \alpha_1\Delta\theta)^2$ nous négligeons les termes très petits, nous pourrions écrire :

$$\begin{aligned} L'^2 &\cong L^2(1 + 2\alpha_1\Delta\theta) + 2\lambda L(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta\theta, \\ (1 + \alpha_1\Delta\theta)^2 &\cong 1 + 2\alpha_1\Delta\theta, \end{aligned}$$

de sorte que finalement :

$$K = \frac{\Delta I}{\Delta C} = \frac{\frac{1}{3}(L+l)^2 \cdot 2\alpha_1 + 2AL\left[L\alpha_1 + \lambda(\alpha_1 - \alpha_2)\right]}{g\left[\frac{1}{2}(L+l)\alpha_1 + A\left\{L\alpha_1 + \lambda(\alpha_1 - \alpha_2)\right\}\right]}$$

ou

$$\frac{4}{3g} \frac{(L+l)^2 \alpha_1 + 3AL[L\alpha_1 + \lambda(\alpha_1 - \alpha_2)]}{(L+l)\alpha_1 + 2A[L\alpha_1 + \lambda(\alpha_1 - \alpha_2)]} = K. \quad (503)$$

Puisque nous connaissons L et l et que nous avons admis une valeur de A , nous pourrions tirer λ de l'équation (503) après avoir calculé K au moyen de (502).

Le pendule à compensation étagée. — Dans un cabinet d'horloge soumis aux fluctuations de la température, celle-ci est généralement plus élevée au haut qu'au bas du cabinet. Cette différence de température est évaluée d'après la valeur du gradient. *Le gradient de la température est la différence de température entre deux points de la même verticale, distants de 1 m l'un de l'autre.*

Supposons sur la même verticale deux points très voisins dont les hauteurs mesurées en mètres à partir d'un même point (bas de l'horloge, bord

de la mer, etc.) sont h et $h + \Delta h$. En ces points, la température est θ et $\theta + \Delta\theta$. Le gradient de température entre ces deux points est $\frac{\Delta\theta}{\Delta h}$. Si les points sont infiniment voisins, le gradient est $\frac{d\theta}{dh}$ et nous pouvons parler du gradient en un point. Le gradient peut être positif, nul ou négatif.

L'existence d'un gradient de la température n'a en soi pas grand inconvénient pour la marche de l'horloge; c'est la variation du gradient en fonction du temps qui fait que les variations de température affectent la marche de l'horloge, malgré la compensation.

Les variations du gradient de la température sont souvent assez importantes: $0^{\circ},56$ dans la tour de l'équatorial de Berlin, 1° dans la tour de l'équatorial de Neuchâtel. Dans la salle des pendules de l'Institut géodésique de Potsdam, le gradient a varié de $0^{\circ},5$ d'un jour à l'autre et de $2^{\circ},3$ pendant l'année; ces résultats ont été obtenus dans une salle chauffée; ils ont été nettement améliorés par la suppression du chauffage.

Or une variation de 1° du gradient peut modifier de $0,25$ s la marche diurne d'une horloge à seconde.

La tige d'un pendule se trouvant dans une boîte dans laquelle le gradient de température n'est pas nul, se dilate ou se contracte inégalement dans ses différentes parties. La pièce compensatrice (colonne de mercure, tube de zinc, cylindre en bronze, etc.) généralement au bas du pendule ne subit pas les mêmes fluctuations de la température que le haut de la tige. Si la compensation est parfaite pour une certaine distribution de la température, elle ne l'est plus pour une autre.

Les pendules à mercure ou à tige d'invar, tels que nous les avons décrits, ne peuvent pas compenser de façon parfaite; les pendules à gril ou à compensation au zinc tiennent mieux compte de la répartition de la température.

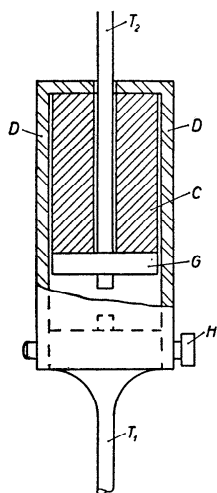
Il est possible de construire des *pendules à compensation étagée*, appelés aussi *pendules à compensation par étages*, *pendule à compensation double* ou *à compensation intégrale*.

La pièce compensatrice est placée à un endroit où la température correspond à la moyenne des températures auxquelles est soumise la tige du pendule. Théoriquement la compensation n'est pas encore parfaite, puisque la répartition de la température n'est pas toujours la même. Il faudrait avoir une pièce compensatrice mobile et se déplaçant suivant les variations du gradient.

En pratique, le pendule à compensation étagée n'a sa raison d'être que dans les horloges de haute précision; or celles-ci sont généralement disposées de façon que les fluctuations de la température soient faibles,

régulières et lentes, de sorte que l'effet de la variation du gradient soit à peu près constant.

Le pendule à compensation étagée à tige d'invar de Riefler comprend une lentille *A* (fig. 457) appuyée en son centre de gravité sur un tube *B* qui repose sur un écrou de réglage *E* vissé sur la tige T_1 du pendule. Un contre-écrou *F* assure la position de la lentille. Le tube *B* est en invar : il ne participe donc pas à la compensation puisqu'il s'allonge et se raccourcit comme T_1 .



La tige du pendule est en deux parties T_1 et T_2 . La pièce compensatrice *C*, en laiton ou en ferro-nickel suivant la valeur du coefficient de dilatation de l'invar, repose sur l'écrou *G* vissé sur T_2 ; un contre-écrou non représenté empêche *G* de tourner. La gaine *D* entoure la pièce compensatrice sur laquelle elle repose ; son prolongement inférieur est ajusté sur la tête de T_1 ; une goupille *H* rend *D* et T_1 solidaires.

Lorsque la température s'élève, la pièce compensatrice *C* se dilate vers le haut entraînant la gaine *D*, la tige T_1 et la lentille *A*. L'effet compensateur de *C* dépend de sa position. L'expérience a conduit à placer, dans un pendule à seconde, le dessus de la pièce compensatrice à environ 28 cm de l'axe de suspension. Cette position correspond à une certaine répartition de la température. Dans une horloge d'observatoire ou de laboratoire, la répartition de la température varie peu et lentement ; dans ce cas, le pendule à compensation étagée a donné de bons résultats.

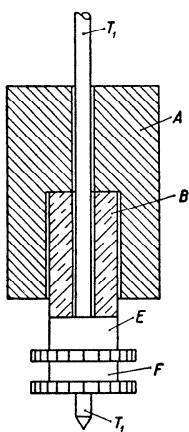


Fig. 457

Valeur des calculs concernant les pendules compensés. — Les exemples traités montrent que l'on ne peut guère conserver l'illusion de calculer à coup sûr les dimensions des pièces compensatrices d'un pendule compensé : plusieurs des facteurs qui entrent dans ces calculs sont mal connus et le calculateur est contraint de simplifier la forme des organes.

Les calculs présentés sont incomplets ; ils ne tiennent pas compte de deux facteurs non négligeables : l'influence de la température sur la suspension et sur la densité de l'air.

L'influence sur la suspension est double : la température modifie la longueur des lames de suspension et en même temps le module de flexion des ressorts. On tient parfois compte dans les calculs de l'allongement

des lames par suite d'une élévation de la température. Mais celle-ci affaiblit en même temps le ressort de suspension, ce qui diminue l'effet accélérateur signalé précédemment ; en même temps l'amplitude des oscillations croît, ce qui accentue l'allongement de la période.

La densité de l'air diminue dès que la température s'élève ; la poussée de l'air sur le pendule diminue et le moment d'inertie du pendule est moins influencé par l'air entraîné.

On comprend qu'en dernier ressort, seule l'expérience puisse décider des mesures à prendre pour parfaire la compensation.

Les calculs ne sont cependant pas inutiles puisqu'ils donnent d'emblée une solution approchée et évitent au constructeur de longs tâtonnements.

Pour les pendules des horloges de précision, il faut tendre à supprimer les variations de la température ambiante, ce qui annulerait automatiquement le gradient et ses variations.

Influence de l'air sur le mouvement du pendule. — Un pendule libre écarté de sa position d'équilibre d'un angle φ_0 met plus de temps pour s'arrêter lorsqu'il oscille dans le vide. L'air contrarie le mouvement, mais il modifie aussi la période. Il provoque plusieurs phénomènes : 1° un allègement du pendule qui, d'après le principe d'Archimède, subit une poussée de bas en haut égale au poids de l'air déplacé ; 2° l'entraînement d'une certaine quantité d'air ; 3° un frottement de l'air entraîné contre celui qui ne l'est pas.

La poussée aérostatique diminue le poids du pendule, donc la quantité mg de la formule (449) et, par conséquent, augmente la période.

L'entraînement de l'air provoque une augmentation du moment d'inertie du pendule, c'est-à-dire une augmentation de la période.

Cl. Attinger a montré que, pour les balanciers, l'effet de l'air entraîné est proportionnel à la pression ou à la racine carrée de la pression suivant que le balancier oscille dans un milieu limité ou non.

Dans tous ces phénomènes, la densité de l'air joue un rôle ; or, la densité de l'air est fonction de la température et de la pression.

Cherchons à calculer l'effet de la poussée de l'air sur la période du pendule et sur la marche de l'horloge. Supposons un pendule homogène de volume V et de masse spécifique δ_1 ; appelons δ_2 la masse spécifique de l'air, T_0 la période dans le vide et T_1 la période dans l'air. Pour des oscillations d'amplitude infiniment petite, nous avons :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mga}} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{V\delta_1ga}}.$$

La poussée de l'air agit au centre de gravité du pendule :

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I}{V(\delta_1 - \delta_2)ga}} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{V\delta_1 ga \left(1 - \frac{\delta_2}{\delta_1}\right)}},$$

donc :

$$T_1 = T_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\delta_2}{\delta_1}\right),$$

puisque δ_2 est petit en comparaison de δ_1 . Nous obtenons ainsi :

$$\frac{\Delta T_0}{T_0} = \frac{1}{2} \frac{\delta_2}{\delta_1} \quad (504)$$

et

$$\mu = -43\,200 \frac{\delta_2}{\delta_1}. \quad (505)$$

Pour un pendule en acier, $\delta_1 = 7,8 \text{ g/cm}^3$; d'autre part :

$$\delta_2 = 1,293 \cdot 10^{-3} \text{ g/cm}^3.$$

Nous aurons donc :

$$\mu = -7,17 \text{ s.}$$

La différence de marche est importante lorsque le pendule passe du vide à l'air.

L'air entraîné augmente le moment d'inertie du pendule, qui devient $I + \Delta I$; la variation relative de la période vaut :

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2} \frac{\Delta I}{I},$$

d'où :

$$\mu = -43\,200 \frac{\Delta I}{I}.$$

ΔI dépend de la forme du pendule.

Les expériences faites par Baily ont montré que, pour une forme donnée du pendule, l'effet est indépendant de la densité des matériaux, mais est d'autant plus grand que la tige du pendule est plus mince.

L'influence du fluide entraîné n'est pas négligeable; les expériences font constater qu'elle équivaut à la moitié à peu près de l'influence de la poussée aérostatique; elle provoquerait donc un retard de 3 à 4 s par jour.

Ces deux effets — celui de la poussée aérostatique et celui de l'entraînement de l'air — sont indirectement fonction de la température puisque celle-ci modifie la densité de l'air.

Les effets de l'air ambiant ne sont, en réalité, pas aussi importants que ceux que nous venons de mentionner : les horloges ne passent pas du vide à l'air ou inversement ; elles sont seulement soumises aux variations de la densité dues à la pression ou à la température.

Nous admettrons que la variation de la marche d'une horloge provoquée par l'air ambiant est proportionnelle à la variation de la pression, et poserons :

$$\mu = - \alpha (H - H_n) ;$$

dans cette formule H désigne la pression actuelle, H_n la pression normale ou pression de référence et α une constante pour un pendule donné. H et H_n sont généralement indiqués en mm de mercure. Le *coefficient barométrique* α est positif, ce qui veut dire qu'une augmentation de la pression ($H > H_n$) provoque un retard de l'horloge.

Si $\alpha = 0,01$, la marche de l'horloge sera modifiée de 0,01 s pour une différence de pression de 1 mm Hg.

Dans nos régions, $H - H_n$ peut atteindre en un jour ± 15 mm Hg ; la marche diurne d'une horloge peut donc varier de :

$$\mu = \mp 0,15 \text{ s.}$$

Compensation barométrique et compensation thermique. — Pour compenser l'influence des variations de la pression barométrique, on a préconisé l'emploi de capsules anéroïdes dont les membranes déplacent des poids lorsque la pression atmosphérique varie. Airy (1801-1892) a proposé de compenser l'effet de la pression par un aimant.

Ces moyens sont rarement appliqués : ils sont compliqués et la correction n'est cependant jamais parfaite.

Si l'on utilise pour la compensation thermique des procédés que l'on sait imparfaits, c'est qu'il s'agit de corriger des effets beaucoup plus importants. Le coefficient thermique pour une horloge non compensée est $- 0,5$ s ; le coefficient barométrique est de l'ordre de 0,01 s, soit 50 fois plus petit.

Dans les observatoires et dans les laboratoires, on utilise un moyen radical mais coûteux. Les horloges sont enfermées dans des enceintes étanches maintenues à température constante.

Dans l'enceinte, la pression est inférieure à la pression extérieure, de sorte que cette dernière exerce une pression sur les joints. Si l'on ne va

pas jusqu'à faire le vide bien que cela diminuerait fortement l'amortissement du mouvement pendulaire, c'est qu'on redoute une influence défavorable sur la lubrification ; d'autre part, le vide est difficile à maintenir.

On maintient la température constante au moyen d'un thermostat. La boîte étanche contenant l'horloge est placée dans une enceinte fermée à température constante ; la paroi séparant les deux espaces est faite en un métal bon conducteur de la chaleur tel que le cuivre.

A l'Observatoire de Paris, on utilise un moyen encore plus radical : les horloges se trouvent à 27 m au-dessous du sol, c'est-à-dire en un endroit où les fluctuations diurnes ou annuelles de la température n'existent plus.

Les pendules libres. — On peut, dans une certaine mesure, mettre un pendule à l'abri des fluctuations de la température et de la pression ; il est impossible de le soustraire à l'obligation de recevoir de l'énergie pour l'entretien de son mouvement. Le pendule doit rester plus ou moins en contact avec un échappement. Même dans les échappements de Reid, de Riefler et de Strasser où le pendule est sous l'influence de l'échappement surtout pendant le dégagement, il y a là une résistance plus ou moins variable.

On a réalisé des horloges dans lesquelles le pendule est, comme on dit, libre ; en réalité il ne l'est pas complètement.

Dans l'*horloge de Shortt*, l'horloge principale a un pendule quasi libre ; elle est associée à une horloge secondaire, dite horloge asservie, dont l'échappement commande le mécanisme d'impulsion du pendule principal ; les deux horloges sont synchronisées. La restitution d'énergie se fait toutes les 30 s au moment où le pendule est près de la verticale : l'impulsion commence à quelques minutes d'angle de la position de repos et se termine à la même distance après la position de repos. L'effet de l'impulsion sur la période est théoriquement nul. Comme il n'y a qu'une impulsion toutes les 30 s, le pendule est libre la plupart du temps.

L'horloge Shortt a donné des résultats remarquables dans des observatoires de premier ordre, tels que ceux de Greenwich et de Paris.

Dans l'*horloge à pendule partiellement équilibré de Schuler* le pendule principal est aussi séparé de l'horloge chargée d'entretenir son mouvement et d'actionner les aiguilles de l'horloge.

Le pendule principal, partiellement équilibré, a une suspension à couteau ; ce dispositif diminue l'action défavorable sur les couteaux. L'entretien du mouvement du pendule se fait par impulsions électro-magnétiques en utilisant une cellule photo-électrique. L'horloge directrice et l'horloge asservie sont synchronisées. Le pendule libre oscille dans une enceinte remplie d'hydrogène.

La construction détaillée de ces deux horloges remarquables est décrite dans les ouvrages spéciaux traitant de l'horlogerie électrique.

Les horloges sans pendule. — L'organe régulateur peut être un corps vibrant ou oscillant autre que le pendule ; on a construit des *horloges à diapason* dans lesquelles les vibrations d'un diapason remplissent les fonctions des oscillations du pendule. Les vibrations du diapason doivent également être entretenues : elles le sont soit par un échappement soit par des attractions électromagnétiques. L'effort demandé à la lame vibrante est considérable, aussi n'utilise-t-on ce dispositif que dans des appareils fonctionnant pendant une durée assez courte. La période de la lame dépend de la valeur du module d'Young, fonction de la température. On utilise des lames vibrantes en élinvar et on maintient le tout dans une enceinte à température aussi constante que possible ; au moyen d'un thermostat, on règle facilement la température à $0,1^{\circ}$ près.

Dans l'*horloge à quartz*, on utilise les vibrations d'un cristal de quartz taillé de façon qu'un champ électrique alternatif provoque la dilatation et la contraction du cristal. Les oscillations du cristal, c'est-à-dire les dilatations et les contractions, sont très rapides et très régulières. Leur rapidité est un inconvénient puisque la fréquence est de 80 000 à 100 000 ; on diminue celle-ci au moyen de démultiplicateurs (ou diviseurs) de fréquence pour obtenir une fréquence propre à alimenter un moteur synchrone chargé de faire tourner les aiguilles de l'horloge.

La période des oscillations du quartz dépend des dimensions du cristal et de la température ; il y a une température optimum (environ $+ 36^{\circ}$ C) aux environs de laquelle la fréquence varie peu ; c'est la température que l'on cherche à réaliser au moyen d'un thermostat dans l'enceinte qui contient le cristal vibrant.

La période du quartz se modifie avec le temps : c'est un phénomène de vieillissement.

On cherche à perfectionner l'horloge à quartz en régularisant encore les oscillations du quartz par celles de l'atome d'azote au sein de la molécule du gaz ammoniac. C'est l'*horloge atomique* étudiée actuellement au « Bureau of standards » de Washington. Sans doute cherchera-t-on à se libérer du quartz et à ne se servir que des oscillations des atomes ?

Ces horloges utilisent les propriétés des courants électriques et électroniques ; elles sont amplement décrites dans les ouvrages spéciaux sur l'horlogerie électrique.

On trouvera plus loin les résultats remarquables obtenus au moyen des horloges à quartz.

Le pendule conique. — Un corps A de masse m (fig. 458) attaché à un fil B décrit une surface conique d'axe OO : c'est un *pendule conique*.

Si A décrit un cercle de centre C et de rayon r avec la vitesse angulaire

constante ω , on a les relations suivantes : la force centrifuge dirigée suivant CA est égale à $m\omega^2 r$ et

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{m\omega^2 r}{mg} = \frac{\omega^2 r}{g}.$$

Soit l la longueur AO du fil de suspension ; on a :

$$r = l \sin \varphi,$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega^2 l \sin \varphi}{g},$$

d'où l'on tire :

$$\cos \varphi = \frac{g}{\omega^2 l}. \quad (506)$$

Le mouvement de la masse A est périodique.

Une oscillation comprend ici le parcours de la circonférence (C, r) ; le temps employé pour ce parcours est la durée d'oscillation ou la période. L'angle φ est appelé, par analogie, l'amplitude.

Si A fait n tours par seconde, n désigne la fréquence ; on a :

$$\omega = 2\pi n.$$

En introduisant cette valeur dans (506), on obtient :

$$\cos \varphi = \frac{g}{4\pi^2 n^2 l},$$

d'où :

$$n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l \cos \varphi}}$$

et

$$T = \frac{1}{n} = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \varphi}{g}}. \quad (507)$$

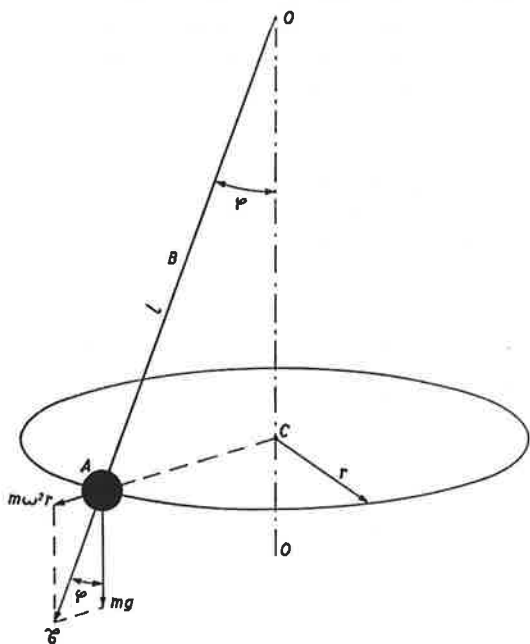


Fig. 458

La période est constante si φ est constant, c'est-à-dire si la masse A reste toujours dans un même plan perpendiculaire à OO .

Lorsque φ est petit, on a :

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \dots$$

et, en négligeant les termes à partir du troisième :

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2},$$

d'où :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 - \frac{\varphi^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}},$$

soit :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 - \frac{\varphi^2}{4} \right). \quad (508)$$

Soit T_0 la période pour des amplitudes infiniment petites :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

donc :

$$T = T_0 \left(1 - \frac{\varphi^2}{4} \right). \quad (509)$$

La période du pendule conique décroît avec l'amplitude contrairement à ce qui se passe dans le pendule circulaire où :

$$T = T_0 \left(1 + \frac{\varphi^2}{16} \right).$$

La comparaison des deux dernières formules montre que la période du pendule conique décroît plus vite que celle du pendule circulaire n'augmente ; les variations de la période en fonction de l'amplitude sont représentées dans la figure 459.

Comme le pendule circulaire, le pendule conique est isochrone pour des oscillations d'amplitude infiniment petite.

Huygens a construit un *pendule conique isochrone pour toutes les amplitudes* ; il oblige la masse A à rester sur un paraboloïde de révolution lorsque l'amplitude varie. Pour cela le fil de suspension s'appuie sur une

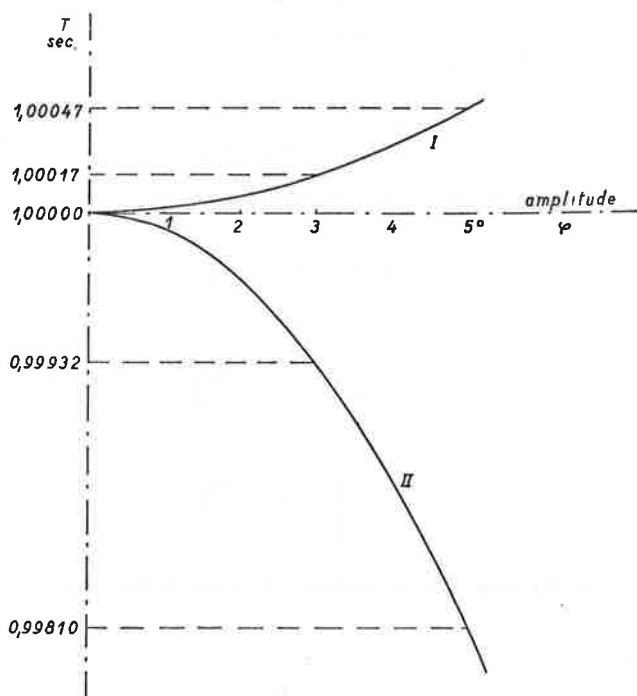


Fig. 459

ame courbée suivant la développée de la parabole décrite par la masse pesante. En résumé, la longueur l change suivant l'amplitude, de façon que T reste constant. La solution est ingénieuse, mais difficile à réaliser ; elle présente les mêmes inconvénients que le pendule cycloïdal.

Le pendule conique appliqué aux horloges. — Le pendule conique donnerait aux horloges une qualité précieuse : le mouvement continu et régulier du rouage et des aiguilles. Ce mouvement permettrait d'évaluer facilement et sûrement un intervalle d'une fraction de période ; il provoquerait aussi une usure moins grande du rouage et aurait comme corollaire la suppression de l'échappement.

On peut imaginer un rouage d'horlogerie dont le dernier mobile serait un bras CD (fig. 460) entaillé d'une fente dans laquelle serait engagée l'extrémité du pendule ; l'axe de rotation du bras coïncide avec l'axe du pendule.

Sous l'influence d'une force motrice (poids ou ressort), le rouage, le bras CD et le pendule OA prennent une vitesse qui va s'accroissant ; la

résistance de l'air augmente également et, pour une certaine valeur de φ , l'équilibre s'établit ; la vitesse angulaire du bras reste dès lors constante. Il suffit alors de munir d'aiguilles certains mobiles tournant à la vitesse correspondante à la vitesse de régime du pendule.

Mais il faut un couple moteur constant — les ressorts sont exclus — et des résistances qui ne varient pas.

Le pendule est en équilibre dynamique pour une vitesse angulaire ou pour un angle φ donnés ; l'équilibre est instable : dès que ω augmente, φ doit aussi croître ; la masse du pendule s'écarte alors de la verticale ; il se produit une augmentation de la résistance de l'air ainsi qu'un frottement considérable contre une des parois de la fente de CD .

On a cherché à régulariser la vitesse au moyen d'une suspension élastique. D'après la figure 458, la résultante de la force centrifuge (ou axifuge) et de la pesanteur est la tension \mathcal{T} du fil de suspension. Dès que ω croît, \mathcal{T} augmente aussi puisqu'elle est fonction de φ :

$$\mathcal{T} = \frac{mg}{\cos \varphi}.$$

Si le fil de suspension comprend un ressort à boudin, celui-ci s'allongera dès que \mathcal{T} augmentera. En choisissant convenablement le ressort, on peut obliger la masse du pendule à rester dans un plan perpendiculaire à OO , mais cette condition est difficile à réaliser.

Le mode de suspension du pendule a une grande importance. Le plus simple est la suspension à fil dont nous avons dit les inconvénients ; le meilleur est la suspension à lames, qui comprend quatre lames agencées comme le montre la figure 461. Deux lames DD sont fixées dans la pièce B qui porte l'arbre auquel est suspendu le pendule P ; les lames CC sont tenues dans la pièce A . Les lames DD et CC qui doivent être identiques sont disposées à angle droit ; les deux systèmes sont reliés par une colonne I .

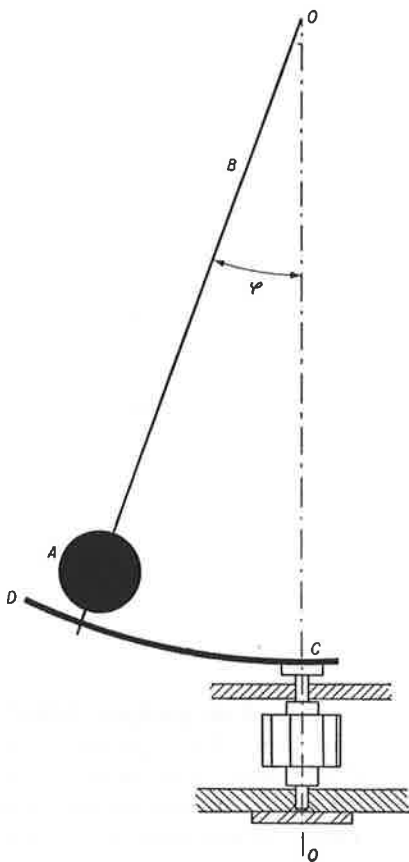


Fig. 460

On a construit des appareils à pendule conique pour mesurer de petits intervalles de temps ; certains régulateurs de machines (régulateur de Watt, par exemple) ont un pendule conique comme organe principal.

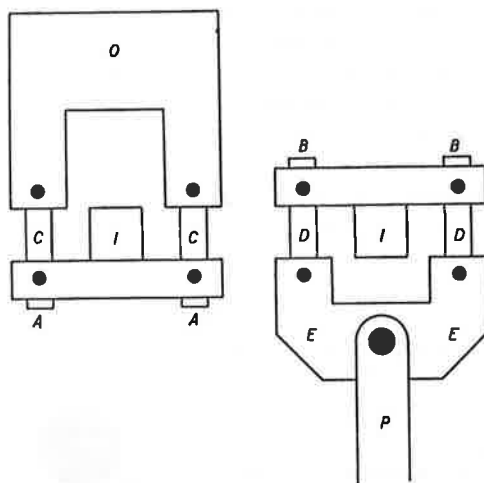


Fig. 461

Rappel de quelques formules concernant la torsion. — Soit (fig. 462) une barre AB de longueur L et de section constante, encastrée en A . Pour tordre d'un angle α l'extrémité B , il faut y appliquer deux forces tangentielles formant un couple de moment C ; si la section droite de la barre est un cercle de rayon r , on a :

$$C = \mu \frac{I_s}{L} \alpha, \quad (510)$$

formule dans laquelle I_s désigne le moment d'inertie polaire de la section droite et μ un coefficient qui diffère d'un matériau à l'autre. D'après la formule 9 du chapitre IV (t. I, p. 104) :

$$I_s = \frac{\pi r^4}{2}$$

pour un fil rond. Donc :

$$C = \mu \frac{\pi r^4}{2L} \alpha. \quad (511)$$

La formule (510) est valable pour toute section qui reste plane après la torsion, c'est-à-dire pour celles qui sont voisines de la section circulaire, par exemple la section ovale ou elliptique.

Pour les tiges à sections rectangulaires et lorsque la hauteur h du rectangle est beaucoup plus grande que l'épaisseur e , on utilisera la formule :

$$C = 5 \frac{\mu e^3 h}{L 16} \alpha$$

ou

$$C = 0,3125 \mu \frac{e^3 h}{L} \alpha. \quad (512)$$

Le facteur numérique est un peu incertain, mais la valeur de μ ne l'est pas moins.

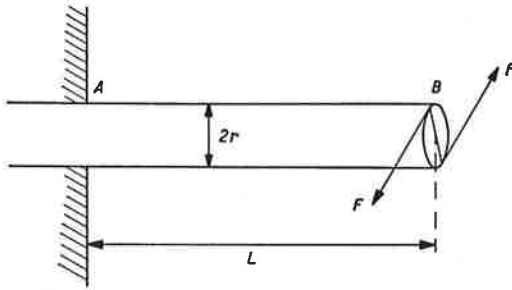


Fig. 462

Le coefficient μ est appelé *coefficient de rigidité, module de torsion, module de rigidité* ou *module de Coulomb*.

D'après (510) :

$$\mu = \frac{CL}{I_s \alpha}.$$

Les dimensions du module de Coulomb sont :

$$\left[\mu \right] = \frac{ML^2T^{-2} \cdot L}{L^4} = ML^{-1}T^{-2},$$

c'est-à-dire une force MLT^{-2} divisée par une surface L^2 . Le module est exprimé en dynes/cm² dans le système C.G.S., en kg*/mm² dans un système où la force est une des grandeurs fondamentales. Voici quelques valeurs de μ :

Métal	Dynes/cm ²	Kg*/mm ²
Aluminium laminé	$2,37 \cdot 10^{11}$	2500
Laiton laminé à froid	$3,53 \cdot 10^{11}$	3600
Cuivre laminé	$4,24 \cdot 10^{11}$	4300
Duralumin	$2,75 \cdot 10^{11}$	2800
Monel	$6,18 \text{ à } 6,86 \cdot 10^{11}$	6400 à 7000
Nickel	$7,06 \text{ à } 7,55 \cdot 10^{11}$	7200 à 7700
Acier recuit (C = 0,38 %)	$8,04 \cdot 10^{11}$	8200
Tungstène étiré	$14,81 \cdot 10^{11}$	15000
Zinc	$\sim 3 \cdot 10^{11}$	3300

Ces valeurs varient d'un échantillon à l'autre ; le tableau donne l'ordre de grandeur.

Les deux modules, celui d'Young E et celui de Coulomb μ , sont reliés par une équation empirique :

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \sigma)}$$

dans laquelle σ , le *coefficient de Poisson*, est un nombre qui diffère peu de 0,25, de sorte que :

$$\mu \cong 0,4 E.$$

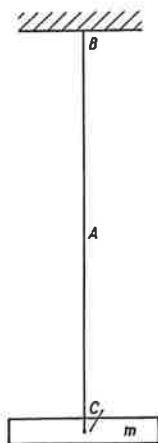


Fig. 463

Le pendule de torsion. — Une masse m dont le centre de gravité est en C (fig. 463) est soutenue par un fil A dont une extrémité est encastrée en B . En tordant le fil en C d'un certain angle de façon que la torsion se fasse autour de CB , nous donnons au fil une force élastique qui le ramènera dans sa position d'équilibre dès que le couple de torsion cessera d'agir, tout comme la force élastique du spiral ramène le balancier dans la montre. La masse m exécutera une série d'oscillations d'amplitude décroissante. Nous avons un *pendule de torsion*.

Une position quelconque de ce pendule est caractérisée par son *élongation*, c'est-à-dire par l'angle dont le pendule a tourné depuis sa position d'équilibre ; l'élongation maximum est l'*amplitude* ; l'oscillation a deux positions extrêmes.

L'oscillation se fait autour de O (fig. 464) ; soit OA la position d'équilibre ou position de repos. Quand le rayon OA est en OB , l'élongation est φ ; quand il est en OE_1 ou en OE_2 , l'élongation φ_0 est l'amplitude.

Une *oscillation* est accomplie quand le rayon repère va de E_1 à E_2 dans le sens de la flèche 1, puis revient de E_2 à E_1 suivant la flèche 2; la durée d'une oscillation est la *période*.

Le couple de rappel en un point d'élongation φ est :

$$C = \mu \frac{I_s}{L} \varphi.$$

Posons $\mu \frac{I_s}{L} = M$; nous obtenons :

$$C = M\varphi.$$

Puisque le couple de rappel est proportionnel à l'élongation, les oscillations du pendule de torsion sont *isochrones* : leur durée est indépendante de l'amplitude.

L'équation du mouvement du pendule de torsion est :

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} + M\varphi = 0,$$

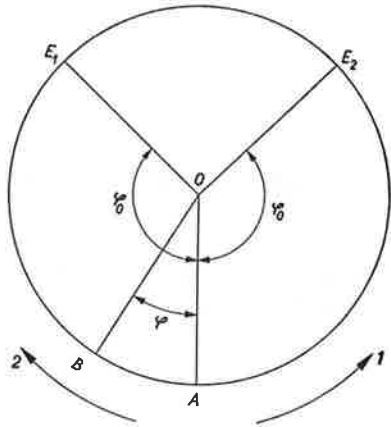


Fig. 464

dans laquelle I désigne le moment d'inertie de la masse m par rapport à l'axe du pendule.

Cette équation est semblable à (122). La période T du pendule de torsion vaut :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{M}} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\mu \frac{I_s}{L}}}. \quad (513)$$

La vitesse angulaire ω correspondant à l'élongation φ a pour expression :

$$\omega = \sqrt{\frac{M}{I}} \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}.$$

Elle atteint sa valeur maximum Ω quand $\varphi = 0$:

$$\Omega = \varphi_0 \sqrt{\frac{M}{I}}.$$

Le temps t écoulé depuis le passage au point mort jusqu'au moment où l'élongation est φ vaut :

$$t = \sqrt{\frac{I}{M}} \arcsin \frac{\varphi}{\varphi_0}$$

ou

$$t = \frac{T}{2\pi} \arcsin \frac{\varphi}{\varphi_0}.$$

Application du pendule de torsion à l'horlogerie. — Il y a des horloges avec pendule de torsion ; les oscillations sont généralement beaucoup plus lentes que celles du balancier-spiral ; l'amortissement est très faible lorsque le pendule est bien construit ; les résistances sont celle de l'air et le frottement intérieur du fil de torsion de sorte que l'énergie d'entretien du mouvement peut être petite. Les horloges à pendule de torsion ont généralement une longue durée de marche.

Le faible amortissement a permis aux constructeurs d'utiliser le pendule de torsion dans des horloges où la force d'entretien provient des fluctuations de la température ou de la pression atmosphérique ambiantes. Dans ces horloges, le fil de suspension est un ruban dont la section droite est un rectangle à bouts arrondis. L'entretien se fait par un échappement tel que

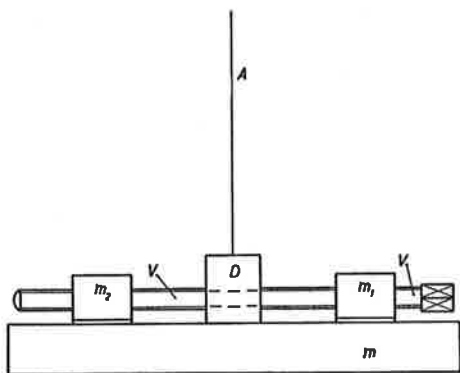


Fig. 465

celui de Graham ou l'échappement à ancre des montres ; l'impulsion est donnée à une cheville de plateau, par exemple. Dans ce cas, le plateau est libre sur un tube entourant le fil de suspension ; il est relié par un spiral hélicoïdal à un disque solidaire de la lame de suspension. L'impulsion se traduit par un armage du spiral hélicoïdal et par une torsion du fil de suspension.

L'ajustement de la période se fait en modifiant la longueur du fil de suspension ou le moment d'inertie de la masse oscillante. Celle-ci porte un manchon D (fig. 465) dans lequel est encastrée la lame de torsion ; deux masses auxiliaires m_1 et m_2 sont vissées sur une tige V ; les filets à

gauche et à droite de D sont de sens inverse, mais ils ont le même pas. En tournant V , on peut écarter ou rapprocher m_1 et m_2 de D de la même quantité ; on modifie ainsi le moment d'inertie sans déranger l'équilibre.

L'horloge à pendule de torsion serait précise si le module de Coulomb était constant ; mais, comme le module d'Young, il dépend de la température et sans doute aussi de l'état de contrainte et de l'histoire thermique et mécanique du fil. Utilisée avec une lame de suspension en acier, l'horloge à pendule de torsion a une variation de marche d'environ 17 s par jour pour une variation de température de 1° . En utilisant une lame de suspension en élinvar (mételinvar, nivarox, isoval, etc.), on réduit considérablement cette influence de la température ; en effet, avec un élinvar dont le coefficient thermique est de 0,5 s, la variation de la marche diurne correspondant à une différence de température de 1° est d'environ 0,8 s.

Le pendule de torsion ne convient pas encore pour une horloge de précision, mais il peut être appliqué à une bonne horloge d'appartement. Pour en faire un pendule précis, il faudrait y apporter un dispositif de compensation thermique.

La grande durée des oscillations est aussi un grave inconvénient : les aiguilles n'avancent que toutes les 8 à 10 secondes voire toutes les minutes, ce qui rend impossible la lecture de l'heure à la seconde.

Mais le pendule de torsion est devenu un instrument très précieux pour les laboratoires ; il a permis de déterminer le frottement intérieur des métaux, l'élasticité des spiraux, l'influence de la pression barométrique sur la période d'un pendule, les écarts à la loi de Hooke. Les travaux de Coulomb, de Ch.-Eug. Guye et de ses élèves, du Laboratoire suisse de recherches horlogères attestent l'efficacité du pendule de torsion pour la recherche scientifique.

La précision des horloges. — Si parfaite que soit une horloge, elle n'indique jamais longtemps l'heure exacte. Son état, constaté tous les jours à la même heure, varie d'un jour à l'autre d'une quantité qu'on appelle la marche diurne.

Pour les besoins courants, une horloge qui reste dans la même minute pendant un mois est une bonne horloge. Il en va autrement s'il s'agit d'horloges d'observatoire ou de laboratoire : la marche diurne de ces horloges est indiquée en millisecondes.

Nous avons parlé des horloges de précision munies d'un échappement de Graham, de Reid, de Strasser, de Riefler et des horloges de Shortt ou de Schuler, puis des horloges à quartz.

On compare les résultats obtenus par plusieurs horloges en considérant la variation de la marche diurne et la variation progressive mensuelle, c'est-à-dire l'accélération de la marche.

Une étude du Bureau international de l'heure donne les résultats suivants :

Epoque	Horloge	Echappement	Variation de la marche journalière, en seconde	Lieu d'observation
1932	Shortt	—	0,001 5	Greenwich
	Riefler	Riefler	0,004 9 à 0,005 8	Hambourg et Potsdam
	Leroy	Reid	0,000 9	Paris
	Shortt	—	0,000 9	Paris
	à quartz	—	0,003 4	Berlin

Le tableau ci-après donne les écarts des marches moyennes mensuelles par rapport à la moyenne de la période pour des horloges Shortt et à quartz observées de 1934 à 1937 :

Epoque	Horloge	Ecart des marches moyennes, mensuelles, en seconde	Lieu d'observation
1934 à 1937	Shortt	0,001 1	Paris
	Shortt	0,001 1	Washington
	à quartz	0,001 4	Berlin
	à quartz	0,001 3	Hambourg

La précision des horloges Shortt et des horloges à quartz est équivalente.

Depuis que ces constatations ont été faites, les horloges à quartz ont été perfectionnées ; des résultats plus récents sont donnés ci-dessous :

Epoque	Horloge	Nombre d'horloges	Variation		Lieu d'observation
			journalière	progressive mensuelle	
1946 à 1947	Shortt	3	0,001 0 s	0,000 8 s	Washington
	à quartz	2	0,001 5	0,002 9	Washington
	à quartz	2	0,000 5	0,001 7	Washington

La variation progressive mensuelle est plus forte dans les horloges à quartz ; elle est due sans doute aux phénomènes de vieillissement du quartz signalés plus haut.

On peut prévoir que l'horloge à quartz sera encore améliorée, soit qu'on parvienne à stabiliser le quartz soit qu'on régularise les oscillations, comme on tente de le faire aujourd'hui dans l'horloge atomique. Cette dernière surpassera sans doute les horloges mécaniques pour les mesures très précises du temps.

Rendement et qualité des horloges et des montres. — On parle parfois du rendement d'une montre ou d'une horloge. Examinons cette question.

Dans le chapitre I de cet ouvrage (t. I, p. 22), nous avons défini le rendement d'une machine : c'est le rapport de l'énergie utile recueillie à l'énergie totale absorbée.

La montre et l'horloge paraissent bien être des machines puisqu'elles transforment l'énergie élastique d'un ressort ou l'énergie potentielle d'un poids soit en énergie mécanique, soit en mouvement. Mais rien ne sort de la montre sous forme d'énergie utile. Le rendement d'une montre ou d'une horloge envisagée comme transformateur d'énergie est nul. La montre absorbe de l'énergie et ne « rend » rien.

Ce résultat semble paradoxal parce que pour les machines, le rendement est synonyme de qualité.

Le paradoxe disparaît si nous envisageons la montre (ou l'horloge) non plus comme une machine, mais comme un ensemble de deux machines. La première que nous pourrions appeler le *mécanisme d'entretien* comprend le ressort (ou le poids) et son barillet, le rouage et l'échappement ; la seconde est l'*organe réglant*, c'est-à-dire le balancier-spiral dans la montre, le pendule dans les horloges à pendule. La première machine a pour but de maintenir la seconde en mouvement.

La première machine a un rendement, car elle « rend » à l'organe réglant une partie de l'énergie du ressort-moteur.

La seconde n'a aucun rendement : elle reçoit de l'énergie du mécanisme d'entretien et ne rend rien.

Appelons η_1 et η_2 les rendements de chacune des deux machines et η le rendement total ; nous avons :

$$\eta = \eta_1 \cdot \eta_2 .$$

Puisque $\eta_2 = 0$:

$$\eta = 0 .$$

Pour sauver les apparences, E. Neusel propose d'envisager un rendement interne de l'organe réglant ; dans celui-ci, il y a transformation continue d'énergie potentielle en énergie cinétique et d'énergie cinétique en énergie potentielle. Chaque transformation est accompagnée d'une perte d'énergie.

Le mot « rendement » prendrait ainsi une acception nouvelle qui semble

justifiée puisque ce rendement interne de l'organe réglant augmente généralement avec la qualité de la montre.

Le rendement η_1 du mécanisme d'entretien peut être calculé d'après la courbe d'amortissement qui a une forme semblable à celle indiquée par la figure 466. Dans celle-ci, l'ordonnée indique l'amplitude φ_0 , ou une quantité proportionnelle à l'amplitude, par exemple la vitesse angulaire maximum Ω .

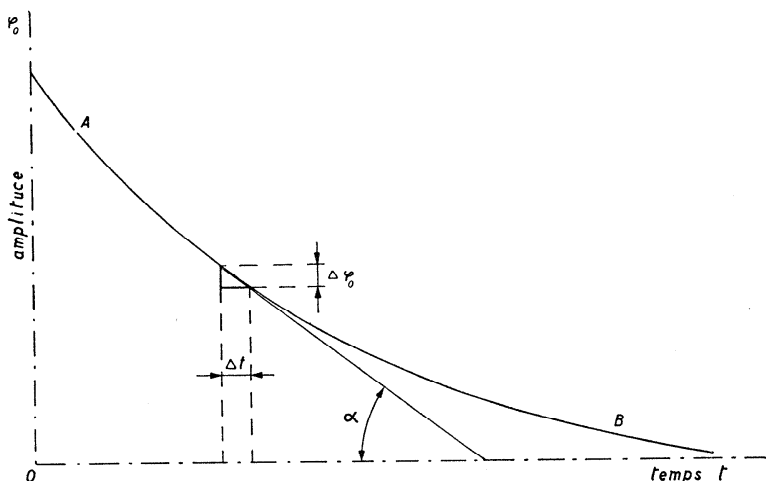


Fig. 466

Nous avons précédemment calculé la perte d'énergie du balancier pendant une alternance et pour une amplitude donnée φ_0 (formule 184) :

$$\Delta W_c = \frac{1}{2} C \varphi_0 \Delta \varphi_0,$$

C désignant ici le moment élastique du spiral. Or :

$$\frac{\Delta \varphi_0}{\Delta t} = \operatorname{tg} \alpha, \quad (514)$$

donc :

$$\Delta W_c = \frac{1}{2} C \varphi_0 \Delta t \operatorname{tg} \alpha.$$

Mais Δt est la durée d'une alternance, $\Delta t = \frac{T}{2}$, et, par conséquent :

$$\Delta W_c = \frac{1}{2} C \varphi_0 \frac{T}{2} \operatorname{tg} \alpha. \quad (515)$$

L'équation aux dimensions ne semble pas être satisfaite si nous considérons $\operatorname{tg} \alpha$ comme un nombre, mais ici, d'après (514), $\operatorname{tg} \alpha$ a comme dimension T^{-1} .

Pour une amplitude donnée φ_0 , nous avons une perte d'énergie cinétique ΔW_c qui doit être restituée à chaque alternance pour que l'amplitude se conserve.

Durant une alternance le ressort moteur perd une partie ΔW_p de son énergie, perte qui est égale au produit du moment élastique M du ressort par l'angle $\Delta \beta$ dont le ressort s'est désarmé au cours de l'alternance. Admettons que le barillet fait un tour en a heures. Pendant une alternance, il décrit un angle $\Delta \beta$ égal à :

$$\Delta \beta = \frac{2\pi T}{2 \cdot 3600 a},$$

d'où :

$$\Delta W_p = M \cdot \Delta \beta = M \frac{\pi T}{3600 a}.$$

Le rendement η_1 est égal à $\frac{\Delta W_c}{\Delta W_p}$, soit :

$$\eta_1 = \frac{900 a C}{\pi M} \varphi_0 \operatorname{tg} \alpha. \quad (516)$$

Pour une montre (ou une horloge) donnée, le facteur :

$$\frac{900 a C}{\pi M}$$

est constant. Le rendement dépend de φ_0 et de α ; la figure 466 montre que $\operatorname{tg} \alpha$ augmente en même temps que φ_0 .

Or, l'amplitude d'un balancier de montre varie d'une oscillation à l'autre ; elle diminue au long d'une journée parce que le ressort moteur se détend ; elle dépend de la position de la montre, de la température et de la pression atmosphérique ; enfin elle diminue au fur et à mesure que les huiles s'épaississent et que le ressort moteur se rend. L'expression donnée par (516) ne peut représenter que le *rendement instantané* du mécanisme d'entretien.

Essayons de calculer ce que E. Neusel appelle le rendement interne de l'organe réglant.

Quand l'amplitude est φ_0 , l'énergie cinétique maximum du balancier vaut :

$$W_{c \max.} = \frac{1}{2} I \Omega^2 = \frac{1}{2} I \left(\varphi_0 \sqrt{\frac{C}{I}} \right)^2 = \frac{1}{2} C \varphi_0^2.$$

Après une alternance, elle est :

$$W'_{c\max.} = \frac{1}{2} C (\varphi_0 - \Delta\varphi_0)^2.$$

Pour cette alternance, le rendement serait :

$$\eta_2 = \frac{W'_{c\max.}}{W_{c\max.}} = \frac{\frac{1}{2} C (\varphi_0 - \Delta\varphi_0)^2}{\frac{1}{2} C \varphi_0^2}.$$

En négligeant le terme $\Delta\varphi_0^2$, nous obtenons ;

$$\eta_2 = 1 - 2 \frac{\Delta\varphi_0}{\varphi_0}. \quad (517)$$

Ici aussi il s'agit d'un rendement instantané.

Nous pourrions alors considérer le produit $\eta_1 \eta_2$ comme le rendement de la montre et poser :

$$\eta = \eta_1 \eta_2.$$

De cette façon, nous donnons un sens nouveau au mot rendement et attribuons un rendement à une machine qui ne rend rien du tout, du moins sous forme d'énergie.

Il me semble qu'il vaut mieux ne pas parler du rendement d'une montre pas plus d'ailleurs qu'on ne parle de celui d'un voltmètre.

Cependant le constructeur aura avantage à évaluer la grandeur η_1 qui est bien le rendement du mécanisme d'entretien. Il aura aussi intérêt à connaître η_2 ; au lieu de parler d'un rendement intérieur (expression dans laquelle le second terme contredit le premier), il vaudrait mieux introduire une expression nouvelle (indice ou coefficient de transformation, par exemple).

La quantité η est d'autant plus grande que la montre (ou l'horloge) est mieux construite.

Mais la qualité d'une montre ne réside pas exclusivement dans l'excellence de sa construction, caractérisée par la valeur η ; elle réside aussi dans le réglage, c'est-à-dire dans la régularité de la marche dans le temps nonobstant les changements de position, de température, de pression. Cette régularité n'est pas indépendante de η , mais elle n'est pas entièrement contenue dans cette grandeur.

De graves défauts tels que le manque de compensation thermique, les défauts d'équilibre, etc. peuvent affecter une montre ayant une valeur élevée pour η .

Or, les qualités qui font qu'une montre est bonne sont, aux yeux du possesseur de la montre, celles qui caractérisent sa marche, et la valeur de η ne l'intéresse guère.

Pour évaluer les qualités d'une montre, il faut noter son comportement au cours du temps et lors de changements de position, de température et de pression : c'est ce que font les Observatoires chronométriques et les Bureaux officiels de contrôle de la marche des montres. Ces qualités sont traduites en nombres ; elles s'appellent : variation de la marche diurne, écart moyen de la marche diurne, écart moyen correspondant à un changement de position, coefficient thermique, erreur secondaire, etc. Ces nombres qui indiquent les qualités d'une montre sont réunis en un seul, tel que le nombre de classement calculés dans les observatoires ; ce nombre n'a pas de sens en dehors de la formule qui le relie à ceux qui indiquent les différentes qualités que nous avons énumérées.

Le nombre de classement indique mieux la qualité d'une montre que η . Mais ce dernier facteur est important pour le constructeur, car s'il est trop faible, la montre n'obtiendra pas un bon classement, c'est-à-dire ne sera pas une montre comme tout horloger consciencieux cherche à en construire.

BIBLIOGRAPHIE

Deux préoccupations nous ont guidé dans l'établissement de la présente bibliographie : dresser une liste d'ouvrages de sciences auxquels le lecteur puisse se rapporter pour élucider des questions qui ne relèvent pas directement de la théorie de l'horlogerie ; lui indiquer quelques livres, brochures et articles auxquels il puisse recourir pour approfondir ses connaissances en matière d'horlogerie. Loin d'être complet, cet ensemble de références ne constitue donc qu'un choix que le lecteur pourra étendre à son gré en feuilletant les revues horlogères ou en parcourant les catalogues des bibliothèques publiques.

PÉRIODIQUES

Nous citons ci-dessous, dans l'ordre alphabétique des abréviations qui servent à les désigner par la suite, quelques-unes des principales revues horlogères ainsi que certaines publications périodiques comportant des études ayant trait à l'horlogerie :

ACT. SOC. HELV. SC. NAT.

ACTES DE LA SOCIÉTÉ HELVÉTIQUE DES SCIENCES NATURELLES. — Aarau, H. R. Sauerländer & C^{ie}.

AG. HORL.

AGENDA DE POCHE POUR L'HORLOGERIE ET LA PETITE MÉCANIQUE. — Bienne, Editions horlogères Charles Rohr. — Paraît depuis 1905.

AMER. HORL.

THE AMERICAN HOROLOGIST AND JEWELER. Official national publication of the united horological Association of America, Inc. and All its Offiliates. — Denver (Colorado), Roberts Publishing Company. — Mensuel.

ANN. FR. CHRONOM.

ANNALES FRANÇAISES DE CHRONOMÉTRIE. — Organe trimestriel de l'Observatoire national de Besançon, de l'Institut de chronométrie de l'Université de Besançon, du Centre technique de l'industrie horlogère et de la Société chronométrique de France, publiées avec le concours du Centre national de la recherche scientifique et des organes corporatifs et universitaires. — Besançon.

ARCH. SC.

ARCHIVES DES SCIENCES. — Jusqu'en 1948, ARCHIVES DES SCIENCES PHYSIQUES ET NATURELLES éditées par la Société de physique et d'histoire naturelle de Genève. — Genève.

BULL. SOC. NE. SC. NAT.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ NEUCHATELOISE DES SCIENCES NATURELLES.
— Neuchâtel.

BULL. SOC. S. CHRONOM.

BULLETIN ANNUEL DE LA SOCIÉTÉ SUISSE DE CHRONOMÉTRIE ET DU
LABORATOIRE SUISSE DE RECHERCHES HORLOGÈRES. — Lausanne, Edi-
tions du Journal suisse d'horlogerie et de bijouterie.

CLESSIDRA

LA CLESSIDRA. — Organo ufficiale dell'Associazione Orologiai d'Italia.
— Roma, Associazione Orologiai d'Italia. — Mensuel.

C. R. ACAD. SC.

COMPTES RENDUS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES. — Paris.

DTSCH. UHRM. Z.

DEUTSCHE UHRMACHER ZEITSCHRIFT. — Stuttgart, Verlag Wilhelm
Diebener. — Mensuel.

FR. HORL.

LA FRANCE HORLOGÈRE. — Revue universelle de l'horlogerie, de la
bijouterie, de la joaillerie, de l'orfèvrerie et des industries s'y ratta-
chant. — Besançon. — Mensuel.

HOROL. J.

HOROLOGICAL JOURNAL INCORPORATING THE WATCH AND CLOCK MAKER.
Official Organ of the British Horological Institute and of the British
Clock and Watch Manufacturer's Association. — Londres, N. A. G.
Press Ltd. — Mensuel.

J. S. HORL.

JOURNAL SUISSE DES HORLOGERS. — Lausanne. — Mensuel.

J. S. HORL. BIJ.

JOURNAL SUISSE D'HORLOGERIE ET DE BIJOUTERIE. Bulletin officiel de
la Foire suisse de l'horlogerie à Bâle. Revue de la Société suisse de
chronométrie. — Lausanne, Editions Scriptar. — Bimestriel. — Paraît
en français (avec traduction allemande), anglais et espagnol.

J. S. HORL. BRANCH. ANNEXES

JOURNAL SUISSE D'HORLOGERIE ; BRANCHES ANNEXES ET MÉCANIQUE DE
PRÉCISION. — Lausanne, Editions Scriptar.

MÉM. BUR. POIDS & MES.

MÉMOIRES DU BUREAU INTERNATIONAL DES POIDS ET MESURES. — Paris.

MONTRE FR.

LA MONTRE FRANÇAISE. Revue trimestrielle de la Fédération nationale
de l'industrie française de la montre. — Besançon.

MONTRE S.

LA MONTRE SUISSE. — Annuaire et publication représentative de l'in-
dustrie horlogère et ses branches annexes. — Soleure, Imprimerie Vogt-
Schild.

REV. FR. BIJ. HORL.

REVUE FRANÇAISE DES BIJOUTIERS-HORLOGERS. — Revue mensuelle d'information de la bijouterie, joaillerie, orfèvrerie, horlogerie. — Paris, Pierre Johannot.

REV. INT. HORL.

REVUE INTERNATIONALE DE L'HORLOGERIE. — La Chaux-de-Fonds. — Bimensuel.

REV. POLYTECHN.

REVUE POLYTECHNIQUE. — Genève. — Mensuel.

SCHWEIZ. UHR

DIE SCHWEIZER UHR. — Fachorgan der gesamter schweizerischer Uhren-industrie. — Soleure, Verlag Vogt-Schild A. G. — Bimensuel.

S. HORL.

LA SUISSE HORLOGÈRE. Organe officiel de la Chambre suisse de l'horlogerie, des Associations patronales, des Chambres de commerce, des Bureaux de contrôle, de l'Information horlogère suisse et de la Fiduciaire horlogère. — Jusqu'en 1948, la Fédération horlogère suisse. — La Chaux-de-Fonds.

— ED. HEBD.

ÉDITION HEBDOMADAIRE SUISSE.

— ED. INT.

ÉDITION INTERNATIONALE. — Trimestriel.

TECHNICA

TECHNICA. Publié mensuellement par le Comité national de la bijouterie, orfèvrerie, médailles et insignes, métaux précieux et des professions annexes. — Bruxelles.

QUELQUES OUVRAGES DE SCIENCES

APPEL, PAUL. — *Analyse mathématique*. 6^e édition entièrement refondue par GEORGES VALIRON. T. I. *Analyse des courbes, surfaces et fonctions usuelles. Intégrales simples*. T. II. *Equations différentielles. Développements en séries. Nombres complexes. Intégrales multiples. Probabilité. Déterminants. Exercices*. — Paris, Gauthier-Villars, 1951.

BLANC, CHARLES. — *Les équations différentielles de la technique*. — Neuchâtel, Editions du Griffon, 1947.

BOUASSE, H. — *Cours de mathématiques générales*. 7^e mille. — Paris, Delagrave, 1937.

BOUASSE, H. et E. TURRIÈRE. — *Exercices et compléments de mathématiques générales*. 3^e éd. — Paris, Delagrave, 1934.

BOULIGAND, G. — *Initiation à l'analyse mathématique*. 4^e éd. — Paris, Vuibert, 1947.

BOULIGAND, G. et G. RABATÉ. — *Initiation aux méthodes vectorielles et aux applications géométriques de l'analyse*. 5^e éd. — Paris, Vuibert, 1947.

- BOULIGAND, G. et J. RIVAUD. — *L'enseignement des mathématiques générales par les problèmes*. T. I. — Paris, Vuibert, 1951.
- BRILLOUIN, LÉON. — *Notions élémentaires de mathématique pour les sciences expérimentales*. 2^e éd. — Paris, Masson, 1939.
- BRUHAT, G. — *Cours de physique générale. Mécanique*. 3^e édition. — Paris, Masson, 1944.
- GAU, ÉMILE. — *Calculs numériques et graphiques*. Paris, Colin, 1925.
- GRANDVILLE, W. A. et P. F. SMITH. — *Eléments de calcul différentiel et intégral*. Traduit de l'anglais par A.-A.-M. SALLIN. 10^e éd. — Paris, Vuibert, 1948.
- HAAG, J. — *Cours complet de mathématiques spéciales*. — Paris, Gauthier-Villars. — T. I. *Algèbre et analyse*. 3^e éd., 1949. — T. II. *Géométrie*. 3^e éd., 1937. — T. III. *Mécanique*. 2^e éd., 1940. — T. IV. *Géométrie descriptive et trigonométrie*. 3^e éd., 1949.
- *Exercices du cours de mathématiques spéciales*. — Paris, Gauthier-Villars. — T. I. *Algèbre et analyse*. 3^e éd., 1949. — T. II. *Géométrie*. 2^e éd., 1944.
- PERRY, JOHN. — *Mécanique appliquée*. Traduit de l'anglais par E. DA-VAUX. — Paris, Hermann. — T. I. *L'énergie mécanique*, 1913. — T. II. *Constructions déformables et machines en mouvement*, 1915.
- SMITH, P. F. et W. R. LONGLEY. — *Eléments de mécanique rationnelle*. Traduit de l'anglais par A.-A.-M. SALLIN. 2^e édition. — Paris, Librairie Vuibert, 1941.
- VOGT, HENRI. — *Eléments de mathématiques supérieures*. T. I. *Compléments d'algèbre. Géométrie analytique. Calcul différentiel et intégral*. 18^e éd. — Paris, Vuibert, 1949.
- VOGT, HENRI et PAUL MENTRÉ. — *Eléments de mathématiques supérieures*. T. II. *Mécanique*. 2^e éd. — Paris, Vuibert, 1942.

OUVRAGES D'HORLOGERIE Traité généraux

- ANDRADE, J. — *Chronométrie*. — Paris, O. Doin, 1908.
- ANDRADE, JULES. — *Horlogerie et chronométrie*. — Paris, Baillières, 1924. — (Encyclopédie de mécanique appliquée.)
- BERNER, G.-A. — *Notes pratiques pour l'horloger. Le ressort et son barillet. Les engrenages. Les échappements. Réglage et rhabillage*. Texte français et allemand. — Bienne, A. Rohr.
- *L'horloger-électricien*. Préface de L. REVERCHON et de CH. PONCET. 2^e éd. — Bienne, E. Magron, 1926.
- BOUASSE, H. — *Pendule, spiral, diapason*. 2 vol. — Paris, Delagrave, — 1920.

- FAVARGER, P. — *L'électricité et ses applications à la chronométrie*. 3^e éd. — Neuchâtel, Editions du Journal suisse d'horlogerie et de bijouterie, 1924.
- GOULD, RUPERTT. — *The Marine Chronometer. Its History and Development*. — Londres, J. D. Porter, 1923.
- GRANIER, JEAN. — *La mesure du temps*. — Paris, Presses universitaires de France, 1943.
- GROSSMANN, JULES et HERMANN. — *Horlogerie théorique. Cours de mécanique appliquée à la chronométrie*. T. I. — Berne, E. Magron, 1908. — T. II avec une annexe sur les aciers au nickel et leurs applications à l'horlogerie, par CH.-ED. GUILLAUME. — Bienne et Paris, E. Magron et Gauthier-Villars, 1912.
- GUYE, RENÉ et MAX BOSSART. — *Horlogerie électrique*. Préface d'A. JAQUEROD. — Lausanne, Editions du Journal suisse d'horlogerie et de bijouterie, Scriptor S. A., 1948.
- L'HORLOGERIE, une tradition helvétique*. Ouvrage publié sous la direction d'ALFRED CHAPUIS avec la collaboration de nombreux savants horlogers. — Neuchâtel, Editions de la Bourgade, 1948.
- JAMES, E. — *Théorie et pratique de l'horlogerie*. — Paris, Gauthier-Villars, 1906.
- JAQUET, EUGÈNE et ALFRED CHAPUIS. — *Histoire et technique de la montre suisse des origines à nos jours*, avec la collaboration de G.-ALBERT BERNER. — Bâle et Olten, Urs Graf, 1945.
- LAVEST, R. — *Notes d'horlogerie*. — Le Locle et La Chaux-de-Fonds, Technicum neuchâtelois, 1939.
- *Horlogerie électrique*. — Le Locle et La Chaux-de-Fonds, Technicum neuchâtelois, 1934.
- PONCET, CH. — *L'horloger*. 2^e éd. — Paris, Eyrolles, 1924.
- RAMBAL, JOSEPH. — *Enseignement théorique de l'horlogerie*. T. I. *Notions générales*. — Genève, Edité par le Comité directeur du Journal suisse d'horlogerie, 1889.
- RÉSAL, H. — *Des applications de la mécanique à l'horlogerie*. — Paris, Dunod, 1868.
- TARDY. — *Bibliographie générale de la mesure du temps, suivie d'un essai de classification technique et géographique*. Préface de PAUL DITISHEIM. — Paris, Tardy, 1947.

La force motrice

- ATTINGER, CLAUDE. — *Développement du ressort dans son barillet. Influence de la bride* in BULL. SOC. S. CHRONOM., 1933, pp. 13-16.
- BÉGUIN, P. — *Le rôle de la longueur du ressort de barillet* in REV. INT. HORL., n° 15, pp. 37-43, septembre 1949.

- BUFFAT, EUG. — *Historique et technique de la montre Roskopf*. — Genève, Administration du Journal suisse d'horlogerie, 1914.
- CART, H. — *Tolérances et normalisations horlogères* in BULL. SOC. S. CHRONOM., 1949, pp. 558-596.
- DITISHEIM, F. P. — *Le problème esthétique* in J. S. HORL. BIJ., n^{os} 11-12, novembre-décembre 1944.
- GROSCLAUDE, L. A. — *Le cœur de chronographe* in J. S. HORL. BIJ., n^o 5, pp. 129-135, novembre 1917.
- GUYE, S. — *Quel est le rendement mécanique d'une montre et de ses principaux organes ?* in J. S. HORL. BIJ., n^{os} 5-6, pp. 311-313, mai-juin 1946 et n^{os} 7-8, pp. 457-460, juillet-août 1945.
- HUMBERT, B. — *Le chronographe, son fonctionnement, sa réparation*. Préface de PIERRE DUBOIS. — Lausanne, Editions du Journal suisse d'horlogerie et de bijouterie, Scriptor S. A., 1950.
- JAMES, ÉMILE. — *Les sonneries de montres, pendules et horloges*, 2^e éd. revue et augmentée. — Bienne, E. Magron, 1927.
- JAQUET, E. et D. GIBERTINI. — *La réparation des pendules*. — Neuchâtel, Editions du Journal suisse d'horlogerie, 1936.
- KOCHER, H. — *A quand le système de tolérances pour l'industrie horlogère ?* in J. S. HORL. BRANCH. ANNEXES, n^{os} 9-10, pp. 203-210, 1948.
— *La normalisation dans l'industrie horlogère* in BULL. SOC. S. CHRONOM., 1949, pp. 597-606.
- LAVEST, R. — *Propos variés* in J. S. HORL. BIJ., n^{os} 1-2, pp. 87-88 ; n^o 3-4, pp. 124-126 ; n^{os} 5-6, pp. 249-251 ; n^{os} 7-8, pp. 342-344 ; n^{os} 9-10, pp. 481-482 ; n^{os} 11-12, pp. 536-538, 1946.
- LECOULTRE, J. E. — *Le cœur dans les chronographes* in J. S. HORL. BIJ., n^o 10, pp. 311-312, avril 1894.
- NEUSEL, E. — *A propos du rendement de la montre* in AG. HORL., 1948, pp. 93-104.
— *Le problème du changement d'unités en mécanique* in AG. HORL., 1950, pp. 77-88.
- RUFENACHT, W. — *Rendement, réglage* in AG. HORL., 1949, p. 65.
- SCHILLER, P. E. — *Le superstroboscope et son application à l'étude des mouvements dans les montres* in J. S. HORL. BIJ., pp. 439-445, 1946.
- TIERCY, G. — *Les chronomètres et les théories qui s'y rapportent* in S. HORL., ÉD. INT., n^o 2, mai 1949.
- VÉNUM, H. — *Unités - Notations - Systèmes de tolérances en horlogerie* in J. S. HORL. BIJ. BRANCH. ANNEXES, n^{os} 1-2, pp. 28-34, 1950.

TABLE DES PLANCHES

	Tomes	Pages
Pl. I, fig. 14	Chronomètre de marine	I 56-57
Pl. II, fig. 48	Dynamomètre	I 108-109
Pl. III, fig. 75 et 76	Défauts de structure d'un métal .	I 128-129
Pl. IV, fig. 77 et 78	Défauts de structure d'un métal .	I 132-133
Pl. V, fig. 78 a	Défauts de structure d'un métal .	I 136-137
Pl. VI, fig. 146	Projecteur de profils	I 236-237
Pl. VII, fig. 167	Variations de l'amplitude du balancier en fonction du temps	I 252-253
Pl. VIII, fig. 160	Influence des tolérances de fabrication sur le moment de la force transmise et la répartition de la menée	I 256-257
Pl. IX, fig. 208	Appareil utilisé pour déterminer le moment d'inertie d'un balancier	II 30-31
fig. 213	Machines à régler permettant de déterminer si le spiral convient à un balancier donné	II 30-31
Pl. X, fig. 218	Appareils à déterminer la marche momentanée d'une montre . . .	II 58-59
fig. 219 a	Dispositifs enregistreurs du vibrographe.	II 58-59
Pl. XI, fig. 331	Diagramme obtenu en enregistrant les bruits d'une montre	II 254-255
fig. 333	Diagramme schématisé	II 254-255
Pl. XII, fig. 334 et 335	Diagramme obtenu en enregistrant les bruits d'une montre	II 258-259
Pl. XIII, fig. 335 a	Diagramme obtenu en enregistrant les bruits d'une montre	II 262-263
Pl. XIV, fig. 397 et 398	Balanciers à affixe	II 414-415

TABLE DES MATIÈRES DU TOME II

CHAPITRE VII. — LE MOUVEMENT OSCILLATOIRE DU BALANCIER- SPIRAL	1
<p>Le mouvement oscillatoire et la mesure du temps, 1. — Définition du mouvement oscillatoire périodique, 2. — Le mouvement oscillatoire rectiligne et isochrone, 3. — Calcul de la période, 7. — Calcul du temps employé par le mobile pour passer de l'élongation x_1 à l'élongation x_2, 8. — Calcul de la vitesse du mobile en un point d'élongation x, 9. — L'amplitude dans le mouvement oscillatoire rectiligne simple reste constante, 9. — Dans le mouvement oscillatoire simple, les oscillations sont isochrones, 10. — Les forces qui engendrent un mouvement oscillatoire simple, 10. — Mouvement oscillatoire du balancier-spiral, 11. — Vitesse angulaire, période, etc., 13. — Autre manière de trouver les formules précédentes, 14. — Constance de l'amplitude et isochronisme, 15. — Nombres d'alternances, d'oscillations, de fréquences et de périodes souvent utilisés dans les chronomètres de marine et dans les montres, 17. — La fonction harmonique, 17. — Construction de la sinusoïde $y = A \sin Bt$, 19. — Série de Fourier, 21. — Représentation cinématique d'une fonction sinusoïdale du temps, 22. — Représentation vectorielle d'une fonction sinusoïdale du temps, 23. — Somme de deux fonctions sinusoïdales de même période, 24. — Dérivée d'une fonction sinusoïdale du temps, 26. — Le moment d'inertie du balancier, 27. — Détermination expérimentale du moment d'inertie d'un balancier, 28. — Détermination du moment élastique C du spiral, 32. — Longueur d'un spiral considéré comme une spirale d'Archimède, 32. — Relation entre la marche diurne d'une montre et la période du balancier, 35. — Relation entre la modification de la période et les modifications des facteurs qui influencent la période, 36. — Calcul de la modification de la longueur du spiral provoquant une variation donnée de la marche de la montre, 37. — Influence des modifications des autres facteurs agissant sur la période, 38. — Détermination expérimentale du moment élastique du spiral, 38. — La numérotation des spiraux, 42.</p>	

— La marche instantanée d'une montre, 46. — La méthode des coïncidences, 48. — Application de la méthode des coïncidences à l'horlogerie, 49. — La marche diurne d'une montre ou d'une horloge en fonction de l'intervalle entre deux coïncidences successives, 52. — Précision de la méthode, 53. — Le réglage des montres par la méthode des coïncidences, 54. — Réalisation des coïncidences acoustiques, 56. — Réalisation des coïncidences optiques, 57. — Les machines à déterminer la marche momentanée des montres, 58. — Vérification de l'isochronisme, 62. — Le mouvement oscillatoire réel du balancier-spiral, 63. — Le mouvement du balancier-spiral dans le cas d'un frottement constant, 63. — Le mouvement du balancier-spiral dans le cas d'un frottement proportionnel à la vitesse angulaire du balancier, 69. — Diminution de l'amplitude provoquée par un frottement proportionnel à la vitesse angulaire. Le décrement logarithmique, 75. — La perturbation relative de la période due à l'amortissement, 77. — Détermination expérimentale du décrement logarithmique, 78. — Représentation graphique du mouvement oscillatoire, amorti par un frottement proportionnel à la vitesse angulaire, 79. — Examen d'un cas réel, 80. — Perte d'énergie du balancier à chaque oscillation, 84. — L'entretien des oscillations, 85. — Influence d'une percussion sur la période du balancier-spiral, 85. — Augmentation de l'amplitude provoquée par une percussion, 89. — Des conditions que doit remplir un bon échappement, 91.

CHAPITRE VIII. — LE CALCUL DU MOMENT D'INERTIE D'UN CORPS . 93

Définition du moment d'inertie, 93. — Quelques théorèmes concernant les moments d'inertie, 95. — Variation du moment d'inertie d'un corps par rapport à une droite qui se déplace parallèlement à elle-même, 97. — Moment d'inertie d'un corps par rapport à une droite quelconque passant par son centre de gravité, 98. — Ellipsoïde central d'inertie, 100. — Propriétés de l'ellipsoïde central d'inertie, 101. — La symétrie et la détermination des axes centraux d'inertie, 104. — Moments principaux d'inertie de quelques corps simples, 106. — Moment d'inertie d'un solide homogène de révolution par rapport à son axe, 116. — Système matériel plan, 117. — Moments principaux d'inertie de quelques systèmes matériels plans, 119. — Moment d'inertie d'une surface plane, 121.

CHAPITRE IX. — LES ÉCHAPPEMENTS 125

Fonctions de l'échappement, 125. — Classification des échappements, 126. — Le repos dans les échappements, 127.

— La restitution de l'énergie par l'échappement, 128. — Dispositif à force constante de Henri Jeanneret, 129. — L'évolution des échappements, 131. — L'échappement à roue de rencontre, 133. — La période du foliot, 136. — L'échappement à ancre à recul, 138. — Influence de l'échappement sur l'isochronisme de l'organe réglant, 140. — Entretien des oscillations par modification de la position d'équilibre de l'organe réglant, 142. — Influence du déplacement de la position d'équilibre sur la période de l'oscillateur, 143. — Restitution au balancier de l'énergie dissipée, 147. — Transmission de l'énergie par percussion, 148. — Les vitesses pendant le dégagement, 149. — Durée de la chute, 150. — Rappel de quelques formules concernant la percussion, 151. — Formules de la percussion pour les corps tournants, 152. — Vitesse de la cheville après le choc, 155. — Vitesse angulaire du balancier à la fin de l'impulsion, 155. — Valeur de l'énergie restituée au balancier, 156. — Exemple numérique, 157.

CHAPITRE X. — ECHAPPEMENTS A REPOS POUR LES MONTRES . . 161

Les échappements à repos, 161. — L'échappement à cylindre, 161. — Fonctionnement de l'échappement à cylindre, 163. — Les angles parcourus par le cylindre ou le balancier et par la roue, 165. — Les dimensions du cylindre et de la roue, 166. — Tracé de l'échappement à cylindre, 169. — Transmission de l'énergie de la roue au balancier, 172. — Les modifications apportées par la pratique aux données de la théorie, 175. — La flèche du cylindre, 176. — Défauts dans l'échappement à cylindre, 177. — L'amplitude du balancier, 178. — Influence de l'échappement à cylindre sur la période du balancier, 179. — L'échappement duplex, 182. — Fonctionnement de l'échappement duplex, 182. — Les angles décrits par le balancier et par la roue, 184. — Comparaison avec l'échappement à cylindre, 185. — Tracé de l'échappement duplex, 186. — Influence de l'échappement duplex sur la période du balancier, 188. — Une variante de l'échappement duplex : l'échappement Jacot, 189. — Inconvénients de l'échappement duplex à double dent de repos, 192.

CHAPITRE XI. — L'ÉCHAPPEMENT LIBRE A ANCRE DES MONTRES . . 193

Les échappements libres, 193. — L'échappement à ancre, 193. — La roue d'échappement, 194. — L'ancre et la fourchette, 195. — Le plateau et la cheville, 196. — Fonctionnement de l'échappement à ancre, 197. — Protection de l'échappement contre certains chocs, 199. — Rappel de la fourchette contre les butées, 200. — Les angles parcourus par le balancier, 202. — Les angles parcourus par

l'ancre, 203. — Les angles parcourus par la roue d'échappement, 204. — Relations entre quelques angles, 205. — Répercussion de la modification de certains angles, 208. — Les chutes, 209. — Les chocs, 210. — Rapport des dimensions de la roue et de l'ancre, 210. — Tracé des palettes pour l'échappement à dents pointues et à repos équidistants, 212. — Les palettes de l'échappement à dents pointues : palettes équidistantes et tracé mixte, 214. — Dessin des palettes et des dents de la roue d'échappement à surfaces d'impulsion partagées et à repos équidistants, 215. — Roue et palettes de l'échappement à ancre suisse à bras de levier égaux, 218. — Tracé mixte de la roue et des palettes de l'échappement à ancre suisse, 220. — Tracé de la roue et de l'ancre dans l'échappement à chevilles, 221. — Les chutes dans l'échappement à chevilles, 223. — La fourchette, la cheville et les plateaux dans le système à double plateau, 224. — La fourchette, la cheville et le plateau dans le système à simple plateau, 228. — Transmission de l'énergie de la roue à l'ancre, 228. — Transmission de l'énergie pendant l'action de la roue sur la palette d'entrée de l'ancre, 230. — Transmission de l'énergie pendant l'action de la roue sur la palette de sortie de l'ancre, 232. — Transmission de l'énergie de la fourchette à la cheville de plateau, 233. — Moments de la force de dégagement de l'ancre et de l'attraction contre les butées par la pression de la roue contre le plan de repos d'une palette, 234. — Le recul dynamique de la roue d'échappement, 236. — Angle parcouru par la roue jusqu'à ce qu'une dent rattrape le plan d'impulsion d'une des palettes, 239. — Le rendement de l'échappement à ancre, 241. — L'arrêt sur le plan d'impulsion, 242. — L'arrêt sur le repos, 244. — Dimensions des organes de l'échappement, 246. — La durée des fonctions de l'échappement, 248. — Influence de l'échappement à ancre sur la période du balancier, 250. — L'amplitude du balancier dans l'échappement à ancre, 251. — Etude expérimentale de l'échappement à ancre, 252. — La méthode stroboscopique, 253. — Les bruits de la montre, 255. — L'interprétation des diagrammes de l'oscillographe, 256. — Moyens d'analyser le diagramme des bruits de la montre, 257. — Le choc fait-il rebondir la cheville de plateau ? 260. — Y a-t-il rupture de contact entre la cheville et la fourchette après le choc ? 261. — Les mouvements de la cheville et de la fourchette après le choc, 262. — Calculs pour un cas concret, 263. — Durée réelle du dégagement, 264. — Confirmation expérimentale des résultats de l'analyse mathématique, 265. — Les défauts de l'échappement à ancre, 266. — La mise d'échappement, 266.

CHAPITRE XII. — L'ÉCHAPPEMENT A DÉTENTE 269

Analogies et différences fondamentales avec l'échappement à ancre, 269. — Les organes de l'échappement à détente, 269. — Fonctionnement de l'échappement à détente, 271. — Tracé de l'échappement à détente, 272. — Les chocs et les chutes, 273. — Angle de levée du balancier et dimensions de la roue et du grand plateau, 274. — La chute d'entrée, 275. — La chute de sortie, 276. — Position du centre de la détente, 277. — Le tirage, 279. — Le dégagement, 281. — Positions relatives des centres de pivotement des trois organes, 282. — Distance entre le centre du repos et le centre de la détente, 283. — Calcul de la chute d'entrée réelle, 283. — Les organes du dégagement, 285. — L'échappement ne tient pas le repos, 287. — Amplitude du balancier, 288. — Position relative des palettes, 288. — Influence de l'échappement à détente sur la période, 289. — Position des organes de l'échappement quand le spiral est détendu, 291. — Avantages et inconvénients de l'échappement à détente, 292.

CHAPITRE XIII. — LES PERTURBATIONS DE LA PÉRIODE DU BALANCIER-SPIRAL 295

Les facteurs modifiant la période du balancier-spiral, 295. — Les frottements, 296. — L'échappement, 297. — Les secousses, 297. — Le rebattement, 297. — La formule d'Airy, 302. — La puissance réglante du balancier, 305. — Défauts d'équilibre du balancier, 307. — Discussion de la formule de Phillips, 311. — Position du centre de gravité d'un balancier déséquilibré, 313. — Le tourbillon, 315. — La période du balancier-spiral dans le tourbillon à détente, 316. — La période du balancier-spiral dans le tourbillon à ancre, 320. — Simplification de la formule de Phillips, 321. — Défauts d'équilibre de l'ancre, 322. — Les défauts d'équilibre du spiral, 326. — Le centre de gravité d'une spirale d'Archimède, 327. — Comment ramener le centre de gravité à l'origine de la courbe? 330. — Déplacement du centre de gravité d'un spiral pendant le mouvement du balancier, 332. — Influence de la position du point d'attache du spiral à la virole, 333. — L'application des règles du point d'attache, 338. — Les courbes terminales, 339. — Les conditions de Phillips, 340. — La pression latérale sur les pivots du balancier et l'isochronisme, 340. — Le centre de gravité du spiral après la déformation, 342. — Valeur pratique des courbes terminales de Phillips, 351. — Comment dessiner une courbe Phillips, 352. — Courbe Phillips formée d'un arc de cercle, 356. — Courbe Phillips formée de deux arcs de cercle dont l'un a son centre sur l'axe du balancier, 358. — Courbe Phillips

composée de deux quarts de cercle reliés par une droite, 360. — Segment rectiligne remplissant les conditions de Phillips, 361. — La courbe intérieure du spiral plat, 362. — Réalisation des courbes Phillips, 364. — Le jeu du spiral entre les goupilles de la raquette, 365. — La lame du spiral est, au repos, à égale distance des goupilles, 366. — Formule générale pour calculer l'influence du jeu du spiral entre les goupilles de la raquette, 372. — Insuffisance des solutions classiques du problème des goupilles, 377. — Compensation de deux effets perturbateurs, 378. — La règle de Pierre Le Roy, 379. — Modifications de l'élasticité du spiral, 379. — L'influence de la température, 385. — La compensation thermique au moyen du balancier bimétallique, 389. — La déformation des lames bimétalliques, 390. — Conséquences pratiques de la formule de Villarceau, 395. — Critique de la formule de Villarceau, 396. — Le moment d'inertie d'un balancier bimétallique déformé, 398. — L'erreur secondaire de la compensation, 399. — Cause de l'erreur secondaire, 400. — Moyens de corriger l'erreur secondaire, 404. — Quelques propriétés intéressantes des alliages de fer et de nickel, 407. — Le spiral autocompensateur, 410. — Correction du coefficient thermique des spiraux compensateurs, 412. — La force centrifuge, 414. — L'inertie du spiral, 417. — Des variations de la pression barométrique, 426. — Les champs magnétiques, 434. — Influence du champ magnétique sur l'amplitude, 438. — Influence du champ magnétique sur la marche des montres, 439. — Protection des montres contre les effets du champ magnétique, 440. — Définition de la montre amagnétique, 441. — La théorie du réglage et le réglage pratique, 442.

CHAPITRE XIV. — LES HORLOGES 445

Montres et horloges, 445. — Les échappements des horloges à pendule, 445. — L'échappement de Brocot, 446. — Liaison du pendule et de l'échappement, 449. — L'angle d'impulsion de l'ancre dans l'échappement de Brocot, 450. — Transmission de la force dans l'échappement Brocot, 451. — L'échappement de Graham, 453. — L'échappement de Reid, 454. — Influence des échappements de Brocot, de Graham et de Reid sur la période du pendule, 457. — Les échappements à force ou à impulsions constantes, 458. — L'échappement de Riefler, 460. — L'échappement de Strasser, 462. — Influence des échappements de Riefler et de Strasser sur la période du pendule, 464. — La période du pendule physique ou pendule composé, 464. — La période du pendule mathématique ou pendule simple, 472. — Discussion de

la formule (449), 473. — La longueur réduite du pendule physique, 474. — Le centre d'oscillation du pendule, 474. — La position du centre d'oscillation, 477. — La période du pendule partiellement équilibré, 482. — L'anisochronisme du pendule libre, 483. — L'action du pendule sur l'axe de rotation, 485. — Le pendule cycloïdal et isochrone, 488. — Modification de la période du pendule, 491. — Le curseur de Huygens, 491. — Modification de la période par des poids auxiliaires, 494. — La suspension du pendule, 495. — La suspension à fil, 496. — Le pendule à développante de cercle, 496. — La suspension à couteau, 499. — Le couteau de Haag, 502. — Insuffisance de la solution de Haag, 503. — La suspension à ressort, 504. — La réaction élastique du ressort de suspension, 505. — L'influence de la température, 507. — Le pendule à mercure, 510. — Calcul d'un pendule à mercure, 510. — Pendule compensateur en zinc, 516. — Le pendule à gril, 516. — Le pendule à tige d'invar, 520. — Calcul d'un pendule à tige d'invar, 522. — Le pendule à compensation étagée, 524. — Valeur des calculs concernant les pendules compensés, 526. — Influence de l'air sur le mouvement du pendule, 527. — Compensation barométrique et compensation thermique, 529. — Les pendules libres, 530. — Les horloges sans pendule, 531. — Le pendule conique, 531. — Le pendule conique appliqué aux horloges, 534. — Rappel de quelques formules concernant la torsion, 536. — Le pendule de torsion, 538. — Application du pendule de torsion à l'horlogerie, 540. — La précision des horloges, 541. — Rendement et qualité des horloges et des montres, 543.

BIBLIOGRAPHIE	549
-------------------------	-----

TABLE DES PLANCHES	569
------------------------------	-----

ACHEVÉ D'IMPRIMER
POUR LE COMPTE DE LA
CHAMBRE SUISSE DE L'HORLOGERIE,
A LA CHAUX-DE-FONDS,
SUR LES PRESSES DE
L'IMPRIMERIE CENTRALE S. A.,
A NEUCHÂTEL,
LE 10 MAI 1952.